اجابات الفصل الأول الفرع العلمي والصناعي

حلول الوحدة الاولى / حساب التفاضل

تمارين (١-١) صفحة ٨

السؤال الأول: أ) مقدار التغير في ق(س) = ق(٥) − ق(٣) = $\frac{\text{٧٨}}{\text{٥}}$

ب) متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٤ الى ١ يساوي = $\frac{\text{ق(١)}-\text{ق(٤)}}{\text{١}-\text{٤}} = \frac{\text{٥١}}{\text{١٢}} = \frac{\text{١٧}}{\text{٤}}$

السؤال الثاني: متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة $[\frac{\pi}{\text{٢}}\text{،}\pi]$ $= \frac{\text{ق}(\pi)-\text{ق}(\frac{\pi}{\text{٢}})}{\pi-\frac{\pi}{\text{٢}}} = \frac{\text{٤}}{\pi}$

السؤال الثالث: متوسط التغير $= \frac{\text{ق(أ)}-\text{ق(١)}}{\text{أ}-\text{١}} = \frac{\text{أ}^{\text{٢}}+\text{أ}^{\text{٢}}-(\text{٦}-\text{١})}{\text{أ}-\text{١}} = \frac{\text{٢أ}^{\text{٢}}-\text{٥}}{\text{أ}-\text{١}} = \text{٩}$

ومنها $\text{٢أ}^{\text{٢}}-\text{٥}=\text{٩أ}-\text{٩}$ وبالتالي $\text{٢أ}^{\text{٢}}-\text{٩أ}+\text{٤}=\text{٠}=(\text{٢أ}-\text{١})(\text{أ}-\text{٤})$

$\text{أ}=\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (مرفوض لأن أ > ٢) ، $\text{أ}=\text{٤}$ ومنها $\text{أ}=\text{٤}$

السؤال الرابع : متوسط التغير للاقتران ك (س) في الفترة[١،٣]

$= \frac{\text{ك(٣)}-\text{ك(١)}}{\text{٢}} = \frac{\text{٩+٣ق(٣)}-(\text{١+٣ق(١)})}{\text{٢}} = \frac{\text{٨+٣(ق(٣)}-\text{ق(١))}}{\text{٢}} = \text{٤}+\text{٣}\,\frac{\text{ق(٣)}-\text{ق(١)}}{\text{٢}}$ =

$= \text{٤}+\text{٣}\times\text{٤} = \text{١٦}$

السؤال الخامس: ميل المستقيم ل = ظا١٣٥ $= \frac{\text{ق(٣)}-\text{ق(١)}}{\text{٢}} = -\text{١}$

متوسط التغير في الاقتران هـ(س) $= \frac{\text{هـ(٣)}-\text{هـ(١)}}{\text{٢}}$

$= \frac{\text{٣ق(٣)+٩}-\text{١}-(\text{٣ق(١)+١}-\text{١})}{\text{٢}} = \frac{\text{٨}}{\text{٢}}+\text{٣}\,\frac{\text{ق(٣)}-\text{ق(١)}}{\text{٢}} \quad = \text{٤}+\text{٣}\times-\text{١}=\text{١}$

السؤال السادس: السرعة المتوسطة في الفتر ة [١،٣]

$= \frac{\text{ف(٣)}-\text{ف(١)}}{\text{٣}-\text{١}} = \frac{\text{٩}+\text{٣ب}-(\text{١}+\text{ب})}{\text{٣}-\text{١}} = \text{٦}$

ومنها ٢ب + ٨=١٢ وبالتالي ب=٢

السؤال السابع: متوسط التغير للاقتران ق (س)

$$= \frac{\text{ق}(\text{ن}) - \text{ق}(٢)}{\text{ن} - ٢} = \frac{\text{أ}\,\text{ن}^{٢} + \text{ب}\text{ن} + \text{جـ} - (٤\text{أ} + ٢\text{ب} + \text{جـ})}{\text{ن} - ٢}$$

$$= \frac{\text{أ}(\text{ن}^{٢} - ٤) + \text{ب}(\text{ن} - ٢)}{\text{ن} - ٢} = \frac{\text{ن} - ٢}{\text{ن} - ٢} \times (\text{أ}(\text{ن} + ٢) + \text{ب}) = (\text{أ}(\text{ن} + ٢) + \text{ب})$$

السؤال الثامن :أ) متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ١

$$= \frac{\text{ق}(١) - \text{ق}(٠)}{١ - ٠} = \text{ق}(١) - \text{ق}(٠)$$

$$= ١ + \text{هـ}^{١+١} - (٠ + \text{هـ}^{٠+١}) = ١ + \text{هـ}^{٢} - \text{هـ}$$

ب) متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى هـ

$$= \frac{\text{ق}(\text{هـ}) - \text{ق}(١)}{\text{هـ} - ١} = \frac{\text{هـ}^{\text{ن}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{هـ} + \text{هـ} - (١ + \text{لـو}_{\text{هـ}} ١)^{\text{ن}}}{\text{هـ} - ١} \qquad \frac{٣ - \text{هـ}}{١ - \text{هـ}} = \frac{\text{هـ} + \text{ن} - ١}{\text{هـ} - ١}$$

ومنها ن - ١ = -٣ وبالتالي ن =-٢

تمارين (١-٢) صفحة ١٦

السؤال الأول: $\text{ق}'(-١) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(-١ + \text{هـ}) - \text{ق}(-١)}{\text{هـ}} =$

$$\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٢\text{هـ} - \text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٢ - \text{هـ}}{١} = ٢$$

السؤال الثاني :أ) $\text{ق}'(٤) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٤ + \text{هـ}) - \text{ق}(٤)}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(٤ + \text{هـ}) + (٤ + \text{هـ})^{٢} - ٢٠}{\text{هـ}}$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٤ + \text{هـ} + ١٦ + ٨\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} - ٢٠}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٩\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = ٩$$

ب) $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٣} = \underset{\Delta س\leftarrow ٠}{نهــا} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \underset{س\leftarrow ٣}{نهــا} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{س - ٣} = \underset{س\leftarrow ٣}{نهــا} \frac{\frac{٣ - س}{٣س}}{س - ٣} = \underset{س\leftarrow ٣}{نهــا} \frac{-١}{٣س} = \frac{-١}{٩}$

ج) عندما س=٠   نلاحظ أن: ق(س) يغير من قاعدته

$$ق'(٠) = \underset{س\leftarrow ٠}{نهــا} \frac{ق(س) - ق(٠)}{س - ٠}$$

$ق'(٠^+) = \underset{س\leftarrow ٢}{نهــا} \frac{٠ - ٠}{س} = ٠ ، ق'(٠^-) = \underset{س\leftarrow ٠}{نهــا} \frac{-س^٢}{س} = ٠$ ومنها $ق'(٠) = ٠$

عندما س = $\frac{١}{٢}$ فإن $ق'(\frac{١}{٢}) = \underset{س\leftarrow \frac{١}{٢}}{نهــا} \frac{[س]س^٢ - ٠}{س - \frac{١}{٢}} = \underset{س\leftarrow \frac{١}{٢}}{نهــا} \frac{٠}{س - \frac{١}{٢}} = ٠$

أي ان $ق'(\frac{١}{٢}) = ٠$

السؤال الثالث : في الفترة]−١،١[

$$ق'(س) = \underset{ع\leftarrow س}{نهــا} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع\leftarrow س}{نهــا} \frac{٢\sqrt{ع+٣} - ٢\sqrt{س+٣}}{ع - س}$$

$$= \underset{ع\leftarrow س}{نهــا} \frac{٢\sqrt{ع+٣} - ٢\sqrt{س+٣}}{ع - س} \times \frac{٢\sqrt{ع+٣} + ٢\sqrt{س+٣}}{٢\sqrt{ع+٣} + ٢\sqrt{س+٣}}$$

$$\underset{ع\leftarrow س}{نهــا} \frac{٤(ع - س)}{(ع - س)(٢\sqrt{ع+٣} + ٢\sqrt{س+٣})} = \frac{١}{\sqrt{س+٣}}$$

في الفترة]١،٤[:

$$ق'(س) = \underset{ع\leftarrow س}{نهــا} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع\leftarrow س}{نهــا} \frac{\frac{٤}{ع} - \frac{٤}{س}}{ع - س} = \underset{ع\leftarrow س}{نهــا} \frac{\frac{٤(س - ع)}{عس}}{ع - س} = \frac{-٤}{س^٢}$$

عندما س= −١ ، ٤ المشتقة غير موجودة (أطراف فترة)

عندما س = ١ ، المشتقة غير موجودة لأن $ق'(١)^{+} \neq ق'(١)^{-}$ وذلك بإيجادهما باستخدام تعريف

المشتقة فتكون $ق'(س) = \begin{cases} \frac{١}{\sqrt{س+٣}} ، & س \in]-١ ، ١] \\ \frac{-٤}{س^{٢}} ، & س \in]١ ، ٤[\end{cases}$

السؤال الرابع : أفرض العرض س فيكون الطول ٣س

ومنها المساحة $م = ٣س^{٢}$

معدل التغير في مساحة الصفيحة (عندما س = ٦)

$$م'(س) = \lim_{س \to ٦} \frac{م(س) - م(٦)}{س - ٦} = \lim_{س \to ٦} \frac{٣س^{٢} - ١٠٨}{س - ٦} = ٣٦ سم^{٢} / س$$

السؤال الخامس :أ) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣+٥هـ) - ق(٣)}{١٠هـ} = \frac{٥}{١٠} ق'(٣) = \frac{١}{٢} \times ٤ = ٢$ (بفرض و= ٥ هـ)

ب) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١}{ق(١) - ق(س)} = \lim_{س \to ١} \frac{\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}}{\frac{ق(١) - ق(س)}{س - ١}}$ بقسمة البسط والمقام على (س-١)

$$= - \lim_{س \to ١} \frac{س + ١}{\frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١}} = \frac{-٢}{ق'(١)} = \frac{-٢}{-٢} = ١$$

ج) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١+٩هـ) - ق(١)}{\sqrt{١+هـ} - ١} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{ق(١+٩هـ) - ق(١)}{هـ}}{\frac{\sqrt{١+هـ} - ١}{هـ}}$

$$= ٩ق'(١) \times \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{\sqrt{١+هـ} - ١} \times \frac{\sqrt{١+هـ} + ١}{\sqrt{١+هـ} + ١}$$

(بالضرب بالمرافق والتبسيط) $= ٩ \times -٢ \times ٢ = -٣٦$

د) $\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(1+3\text{هـ}) - \text{ق}(1-3\text{هـ})}{10\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(1+3\text{هـ}) - \text{ق}(1) - \text{ق}(1-3\text{هـ}) + \text{ق}(1)}{10\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(1+3\text{هـ}) - \text{ق}(1) - (\text{ق}(1-3\text{هـ}) - \text{ق}(1))}{10\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(1+3\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{10\text{هـ}} - \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(1-3\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{10\text{هـ}}$

$= \dfrac{3}{10} \times \text{ق}'(1) - \dfrac{-3}{10}\text{ق}'(1) = \dfrac{-6}{5}$ بالفرض لكل حالة

هـ) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س ق}(3) - 3\text{ق}(\text{س})}{\text{س} - 3} = \underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س ق}(3) - 3\text{ق}(3) + 3\text{ق}(3) - 3\text{ق}(\text{س})}{\text{س} - 3}$

$= \underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(3)(\text{س} - 3) + 3(\text{ق}(3) - \text{ق}(\text{س}))}{\text{س} - 3} = \text{ق}(3) - 3\text{ق}'(3) = -14$

تمارين (١-٣) صفحة ٢٥

السؤال الأول : أ) $\text{ق}'(\text{س}) = 5\text{س}^4 - 2\text{س}$ ومنها $\text{ق}'(-1) = 5 + 2 = 7$

ب) $\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س}^3 - 1) \times 1 + 3\text{س}^2(\text{س} + 12)$

ومنها $\text{ق}'(3) = 26 + 27(12 + 3) = 431$

ج) $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{(5 - \text{س}^2) \times 2\text{س} - -2\text{س} \times \text{س}^2}{(5 - \text{س}^2)^2}$ ومنها $\text{ق}'(-2) = -20$

السؤال الثاني : أ) $(\text{ق} + \text{هـ}^2)'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}'(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})$

$= \text{ق}'(\text{س}) + 2\text{هـ}'(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) = \text{ق}'(1) + 2\text{هـ}'(1) \times \text{هـ}(1)$

$= 3 + 2 \times -3 \times -1 = 9$

ب) $\left(\text{س}^{٢}\,\text{ن}(\text{س}) - \frac{٣}{\text{هـ}(\text{س})}\right)'(١) = \left(\text{س}^{٢}\,\text{ن}'(\text{س}) + ٢\text{س}\,\text{ن}(\text{س}) + \frac{٣\,\text{هـ}'(\text{س})}{\text{هـ}^{٢}(\text{س})}\right)(١)$

$$= \left(\text{ن}'(١) + ٢\,\text{ن}(١) + \frac{٣\,\text{هـ}'(١)}{\text{هـ}^{٢}(١)}\right) = ٣ + ٤ + -٩ = -٢$$

ج) $\left(\frac{\text{ن}}{\text{هـ}}\right)'(١) = \frac{\text{ن}'(١)\,\text{هـ}(١) - \text{هـ}'(١) \times \text{ن}(١)}{\text{هـ}^{٢}(١)}$

نجد $\text{ن}'(١)$ **من اشتقاق** $\text{ن}(\text{س})$ **حيث** $\text{ن}'(١) = ٠$ ، **ق(١)=$\frac{١}{٢}$**

ميل المماس = ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$= \text{ظا}\ ١٥٠ = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$$

ومنها $\text{هـ}'(١) = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\text{هـ}(١) = ١$

بالتعويض ينتج أن: $\left(\frac{\text{ن}}{\text{هـ}}\right)'(١) = \frac{١}{٢\sqrt{٣}}$

السؤال الرابع: أ) $\text{ص}' = \frac{\text{س}+١-\text{س}}{(\text{س}+١)^{٢}} = \frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}}$ ، $\text{ص}'' = \frac{-٢}{(\text{س}+١)^{٣}}$

الطرف الأيمن = $٢ \times \frac{\text{س}}{(\text{س}+١)} \times \frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}} + \text{س} \times \frac{-٢}{(\text{س}+١)^{٣}} = ٠$ **= الطرف الأيسر**

ب) $\text{ص} = \text{أ}\,\text{س}^{٥} + ٥\text{س}^{-٤}$ ، $\text{ص}' = ٥\text{أ}\,\text{س}^{٤} - ٢٠\text{س}^{-٥}$

$$\text{ص}'' = ٢٠\text{أ}\,\text{س}^{٣} + ١٠٠\text{س}^{-٦} = ٢٠\text{أ}\,\text{س}^{٣} + \frac{١٠٠}{\text{س}^{٦}} = ٢٠(\text{أ}\,\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{-٦})$$

ومنها $\text{ص}'' = \frac{٢٠}{\text{س}^{٢}}\left(\text{أ}\,\text{س}^{٥} + \frac{٥}{\text{س}^{٤}}\right) = \frac{٢٠\text{ص}}{\text{س}^{٢}}$

السؤال الخامس: **بعد التبسيط** $\text{ن}(\text{س}) = (١ - \text{س}^{١٦})$ **ومنها** $\text{ن}'(\text{س}) = -١٦\,\text{س}^{١٥}$

$\text{ن}'(١) = -١٦$

السؤال السادس : أولا: $\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$ **ومنها** $\text{ن}'(\text{س}) = ٢\text{س}$

أ) $\text{ن}'(٠) = ٠$

ب) هـ$'$(٠) غير موجودة لأن هـ(س) غير متصل عندها

جـ) $(ق \times هـ)(س) = \begin{cases} ٠ & ، س \in [٠، \frac{١}{٢}) \\ -س^{٢} & ، س \in (-\frac{١}{٢}، ٠) \end{cases}$

لاحظ ان الاقتران الجديد متصل عندما س = ٠

د) لاحظ أنه لا يمكن تحديد وجود $(ق \times هـ)'(٠)$ باستخدام مشتقة حاصل الضرب

$(ق \times هـ)'(س) = \begin{cases} ٠ & ، س \in (٠، \frac{١}{٢}) \\ -٢س & ، س \in (-\frac{١}{٢}، ٠) \end{cases}$ ومنها $(ق \times هـ)'(٠) = ٠$

ثانيا : نستنتج أنه لا يمكن الحكم على وجود أو عدم وجود المشتقة باستخدام قواعد الاشتقاق لذلك نعود إلى إيجاد قاعدة الاقتران الأصلي ثم نحدد وهذا لا يتناقض مع القاعدة المذكورة .

السؤال السابع : $ق(س) = س^{٤} + أس^{٣} - ٣$ ، $ق'(س) = ٤س^{٣} + ٣أ س^{٢}$

$ق''(س) = ١٢س^{٢} + ٦أ س$ ، $ق^{(٣)}(س) = ٢٤س + ٦أ$ ،

$ق^{(٣)}(٢) = ٢٤ \times ٢ + ٦أ = ١٨$ ومنها أ = -٥

السؤال الثامن : $ق(س) = س^{ن}$ ، $ق'(س) = ن س^{ن-١}$ ، $ق''(س) = ن(ن-١)س^{ن-٢}$

$ق'''(س) = ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣} = أس$ ومنها $ن - ٣ = ١$ ، $ن = ٤$ ،

لكن $ن(ن-١)(ن-٢) = أ$ ومنها $أ = ٢٤$

السؤال التاسع : نفرض ٢س = ع ومنها $س = \frac{ع}{٢}$ عندما س ← ١ فإن ع ← ٢

النهاية = $\lim_{ع \to ٢} \frac{ق'(ع) - ق'(٢)}{\frac{ع}{٢} - ١} = ٢ \lim_{ع \to ٢} \frac{ق'(ع) - ق'(٢)}{ع - ٢} = ٢ق''(٢) = ٢ \times ٥ = ١٠$

تمارين (١-٤) صفحة ٢٩

السؤال الأول :

أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢\text{جاس}-٢\text{قا}^٢\text{س}$

ب) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(١+\text{قاس})(-\text{قاس ظاس})-(١-\text{قاس})(\text{قاس ظاس})}{(١+\text{قاس})^٢} = \frac{-٢\text{قاس ظاس}}{(١+\text{قاس})^٢}$

ج) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{قتاس}+\text{ظتاس}+\text{س قتاس ظتاس}+\text{س قتا}^٢\text{س}}{(\text{قتاس}+\text{ظتاس})^٢} = \frac{١+\text{س قتاس}}{\text{قتاس}+\text{ظتاس}}$

د) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س قاس}+\text{س}^٢\text{قاس ظاس} = \text{س قاس}(٢+\text{س ظاس})$

السؤال الثاني : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^٢\text{س} = ١+\text{ظا}^٢\text{س}$ **(يتم التعامل مع مشتقة ظا^{٢}س على أنها حاصل ضرب)**

$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = ٢\text{قا}^٢\text{س ظاس} = ٢\text{ظاس}(١+\text{ظا}^٢\text{س}) = ٢\text{ص}(١+\text{ص}^٢)$

السؤال الثالث : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س جتاس}-\text{جاس}}{\text{س}^٢}$

$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = \frac{-\text{س}^٢\text{جاس}-٢\text{س جتاس}+٢\text{جاس}}{\text{س}^٣}$

الآن الطرف الأيمن= $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}+\frac{٢}{\text{س}}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}+\text{ص}$

= $\frac{-\text{س}^٢\text{جاس}-٢\text{س جتاس}+٢\text{جاس}}{\text{س}^٣}+\frac{٢}{\text{س}}\times\frac{\text{س جتاس}-\text{جاس}}{\text{س}^٢}+\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ **=٠ (مع التبسيط والاختصار)**

السؤال الرابع : $\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}+\text{جاس}$ ، $\text{ق}''(\text{س}) = ١+\text{جتاس} = ٠$

ومنها جتاس $= -١$، س $= \pi$ ، س $= -\pi$

السؤال الخامس : $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{قا}(\text{س}^٢+\text{هـ})-\text{قا}(\text{س}^٢)}{\text{هـ}}$ **=** $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{قا}(\text{ص}+\text{هـ})-\text{قا}(\text{ص})}{\text{هـ}}$

= $(\text{قاص})'$ **=** $\text{قاص ظاص} = \text{قاس}^٢\text{ظاس}^٢$

تمارين (١-٥) صفحة ٣٦

السؤال الأول :

أ) ناتج التعويض = $\frac{\cdot}{\cdot}$ وبالتالي قيمة النهاية = $\underset{س \leftarrow ١}{نهــا} \frac{هـ^{س-١} - ١}{\frac{١}{س}} = \frac{هـ^{\cdot} - ١}{١} = \cdot$

ب) ناتج التعويض = $\frac{\cdot}{\cdot}$ وبالتالي قيمة النهاية= $\underset{س \leftarrow \cdot}{نهــا} \frac{٤}{قا^{٢} س} = ٤$

ج) ناتج التعويض = $\frac{\cdot}{\cdot}$ وبالتالي قيمة النهاية = $\underset{س \leftarrow \cdot}{نهــا} \frac{١ - جتاس}{٣س^{٢}}$ وناتج التعويض = $\frac{\cdot}{\cdot}$

نطبق قاعدة لوبيتال مرة اخرى فتصبح $\underset{س \leftarrow \cdot}{نهــا} \frac{جاس}{٦س}$ وناتج التعويض $\frac{\cdot}{\cdot}$ تطبق قاعدة

لوبيتال مرة أخرى فتصبح $\underset{س \leftarrow \cdot}{نهــا} \frac{جتاس}{٦} = \frac{١}{٦} \Leftarrow \underset{س \leftarrow \cdot}{نهــا} \frac{س - جاس}{س^{٣}} = \frac{١}{٦}$

السؤال الثاني :

أ) $\frac{ءص}{ءس} = -جاس \times هـ^{س} + هـ^{س} جتاس$

ب) $ص = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} س$ ومنها $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢س}$

ج) $ص = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} س^{-٥} = \frac{-٥}{٢} لـو_{هـ} س$ ومنها $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٥}{٢س}$

د) $ص = (هـ^{س} - ٢)(هـ^{س} + ٢)$

$\frac{ءص}{ءس} = (هـ^{س})(هـ^{س} + ٢) + (هـ^{س})(هـ^{س} - ٢)(هـ^{س})$ ، ومنها $\frac{ءص}{ءس} = ٢هـ^{٢س}$

السؤال الثالث : متوسط تغير الاقتران ص $= \frac{ق(٢) - ق(\cdot)}{٢} = \frac{٢أ هـ^{-١} - \cdot}{٢}$

$= \frac{أ}{هـ} = \frac{٢}{هـ}$ ، ومنها $أ = ٢$

السؤال الرابع : $ص' = ٢س + هـ^{س} = ص = س^{٢} + هـ^{س} + ١$ ومنها $س^{٢} - ٢س + ١ = \cdot$

وبحل المعادلة ينتج أن: س = ١

السؤال الخامس :بما أن ناتج التعويض = $\frac{\cdot}{\cdot}$ نستخدم قاعدة لوبيتال

$$\underset{س \leftarrow ا}{نهـــا} \frac{س^{ن} - ا^{ن}}{س^{م} - ا^{م}} = \underset{س \leftarrow ا}{نهـــا} \frac{ن س^{ن-1}}{م س^{م-1}} = \frac{ن}{م} \frac{ا^{ن-1}}{ا^{م-1}} = \frac{ن}{م} ا^{ن-م}$$

السؤال السادس : لاحظ أن ناتج التعويض = $\frac{\cdot}{\cdot}$

قيمة النهاية = $\underset{س \leftarrow 1}{نهـــا} \frac{ق(1) - ق'(س)}{1} = ق(1) - ق'(1) = 6 - 3 = 3$

تمارين (١-٦) صفحة ٤٣

السؤال الأول: ميل المستقيم = $\frac{-1}{2}$ ، ميل المماس = ٢ لأنه عمودي عليه .

ميل المنحنى = ميل المماس ومنها ٢س − ٢ = ٢ ، س = ٢

نقطة التماس = (٢،١)

السؤال الثاني : $ق'(س) = -2$ظاس قا^{2}س

ميل المماس= $ق'(\frac{\pi}{4}) = -2$ظا$\frac{\pi}{4}$ قا$^2\frac{\pi}{4} = -4$

$ق(\frac{\pi}{4}) = 3 -$ظا$^2\frac{\pi}{4} = 3 - 1 = 2$ ومنها نقطة التماس $(\frac{\pi}{4}،2)$

معادلة المماس ص − ٢ = −٤(س − $\frac{\pi}{4}$) ومنها ص = −٤س + π + ٢

السؤال الثالث : $ق'(س) = \frac{1}{س}$ ميل المماس= $ق'(2) = \frac{1}{2}$ ، $ق(2) = \cdot$

معادلة المماس هي ص − ٠ = $\frac{1}{2}$(س − ٢) ومنها ص = $\frac{1}{2}$س − ١

المماس يقطع محور السينات في النقطة ب (٢،٠) والصادات في النقطة جـ (٠،−١)

مساحة المثلث م ب ج = $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$ وحدة مساحة

السؤال الرابع : ميل المماس $= \frac{-1}{6}$ ، $ق'(س) = \frac{-6}{(س-2)^2}$

ميل المماس $= ق'(س) = \frac{-1}{6} = \frac{-6}{(س-2)^2}$

وبحل المعادلة ينتج أن: س = ٨ أو س = −٤

عندما س=٨ ، ص = ٤ ، أ = ٣٢ ، وعندما س=−٤ ، ص = ٢ ، أ = ٨

السؤال الخامس : أقصى ارتفاع عندما السرعة = صفر أي أن: $٤٠ - ١٠ن = ٠$، ومنها ن=٤

$ف(٤) = ٨٠$م

المسافة الكلية المقطوعة $= ١٠٠ = ٢ \times ٨٠ - ف(ن)$

$ف(ن) = ٦٠$ ، أي يكون الجسم على ارتفاع ٦٠ م وهو نازل

$٤٠ن - ٥ن^2 = ٦٠$، ومنها $ن = ٦،٢$ ، $ن = ٢$ تهمل

سرعة الجسم في اللحظة المطلوبة $= ٤٠ - ١٠ \times ٦ = -٢٠$ م / ث

السؤال السادس : $ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن^2$

أ) أقصى ارتفاع عندما السرعة = صفر

$ع(ن) = ٣٠ - ١٠ن = ٠$، ومنها $ن = ٣$ ث

أقصى ارتفاع $= ف(٣) = ٤٥$م

ب) عندما يكون الجسم على مستوى سطح العمارة تكون الإزاحة = −٤٠ م

$٣٠ن - ٥ن^2 = -٤٠$ ومنها ن=٢،ن $= ٤$ ث ، ن=٢ تهمل

السرعة في تلك اللحظة(ن=٤) = −١٠ م / ث

تمارين (١-٧) صفحة ٤٨

السؤال الأول :

أ) $\frac{دص}{دس} = -٣(س^2 + س + ١)^{-٤} \times (٢س + ١)$

عندما س= ١ : $\frac{دص}{دس} = -٣(٣)^{-٤} \times (٢ + ١) = \frac{-١}{٩}$

ب) $ص = س^2 قا\frac{\pi}{س}$ ومنها $\frac{دص}{دس} = س^2 قا\frac{\pi}{س} ظا\frac{\pi}{س} \times \frac{-\pi}{س^2} + ٢س قا\frac{\pi}{س}$

عندما س=١ : $\frac{دص}{دس} = -٢$

جـ) $ص = ٥ع^{٢} - ٧$ ، $\frac{دص}{دع} = ١٠ع$

$$ع = \frac{١}{س^{٢}+١} ، \quad \frac{دع}{دس} = \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = ١٠ع \times \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}} = ١٠ \times \frac{١}{س^{٢}+١} \times \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$$

عندما س=١ : $\frac{دص}{دس} = \frac{-٥}{٢}$

د) $\frac{دص}{دس} = قا^{٢}\frac{\pi}{س} \times \frac{-\pi}{س^{٢}} - ٢جتا\pi س \times جا\pi س \times \pi$

عندما س=١ : $\frac{دص}{دس} = -\pi$

هـ) $\frac{دص}{دس} = ٣(لـو_{هـ} س)^{٢} \times \frac{١}{س}$

عندما س=١ : $\frac{دص}{دس} = ٠$

السؤال الثاني : $ق'(س) = \frac{\frac{٢س م'(س)}{م(س)} - ٢لـو_{هـ} م(س)}{٤س^{٢}}$

$$ق'(١) = \frac{\frac{٢م'(١)}{م(١)} - ٢لـو_{هـ} م(١)}{٤} = \frac{١}{هـ} - ١$$

السؤال الثالث : أ) $ق'(س) = (٢س+١)هـ^{س^{٢}+س}$

ب) $ع'(س) = \frac{٣س^{٢}-٦س}{س^{٣}-٣س^{٢}}$

السؤال الرابع : $ق'(س) = ٢س^{٣} م'(س^{٢}+١) + ٢س م(س^{٢}+١)$

$$ق''(س) = ٤س^{٤} م''(س^{٢}+١) + ٤س^{٢} م'(س^{٢}+١) + ٦س^{٢} م'(س^{٢}+١) + ٢م(س^{٢}+١)$$

$$ق''(١) = ٤$$

السؤال الخامس : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣ق}^{\text{٢}}(\text{س})\text{ق}'(\text{س}) - \text{٣س}^{\text{٢}}\text{ق}'(\text{س}^{\text{٣}})$

عندما س= ٢ : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{٣٠}$

السؤال السادس : $\text{ق}'(\text{س}) = \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س}$ ومنها $\text{ق}'(\frac{\pi}{\text{٤}}) = \text{قتا}^{\text{٢}}\frac{\pi}{\text{٤}} = \text{٢}$

$\text{ق}(\frac{\pi}{\text{٤}}) = \text{٤} - \text{ظتا}\frac{\pi}{\text{٤}} = \text{٣}$ نقطة التماس $(\frac{\pi}{\text{٤}}\text{،}\text{٣})$

ميل العمودي $= \frac{-\text{١}}{\text{٢}}$ ، معادلة العمودي هي $\text{ص} = -\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} + \frac{\pi}{\text{٨}} + \text{٣}$

السؤال السابع: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{٢ن} + \text{٥}$

عندما ن=١ : $\frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} = \text{٢}$ أيضًا $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{٢} \times \text{١} + \text{٥} = \text{٧}$

عندما ن=١ : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} = \text{٧} \times \text{٢} = \text{١٤}$

السؤال الثامن : $\text{ص} = \text{أجتاس}^{\text{٢}} + \text{بجاس}^{\text{٢}}$

$\text{ص}' = -\text{٢أس جاس}^{\text{٢}} + \text{٢ب س جتاس}^{\text{٢}}$

$\text{ص}'' = -\text{٤أس}^{\text{٢}}\text{جتاس}^{\text{٢}} - \text{٢أجاس}^{\text{٢}} - \text{٤ب س}^{\text{٢}}\text{جاس}^{\text{٢}} + \text{٢ب جتاس}^{\text{٢}}$

$\text{س ص}'' = \text{س}(-\text{٤أس}^{\text{٢}}\text{جتاس}^{\text{٢}} - \text{٢أجاس}^{\text{٢}} - \text{٤ب س}^{\text{٢}}\text{جاس}^{\text{٢}} + \text{٢ب جتاس}^{\text{٢}})$

$\text{س ص}'' = -\text{٤أس}^{\text{٣}}\text{جتاس}^{\text{٢}} - \text{٤ب س}^{\text{٣}}\text{جاس}^{\text{٢}} - \text{٢أس جاس}^{\text{٢}} + \text{٢ب س جتاس}^{\text{٢}}$

$\text{س ص}'' = -\text{٤س}^{\text{٣}}(\text{أجتاس}^{\text{٢}} + \text{ب جاس}^{\text{٢}}) - \text{٢أس جاس}^{\text{٢}} + \text{٢ب س جتاس}^{\text{٢}}$

$\text{س ص}'' = -\text{٤س}^{\text{٣}}\text{ص} + \text{ص}'$

السؤال التاسع: $\text{ق}'(\text{س}) = \text{١} - \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ ، $\text{هـ}'(\text{س}) = -\text{جاس}$

$(\text{ق} \circ \text{هـ})'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـ}'(\text{س})$

$= (\text{ق} \circ \text{هـ})'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{جتاس}) \times -\text{جاس}$

$= (\text{ق} \circ \text{هـ})'(\text{س}) = (\text{١} - \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}) \times -\text{جاس}$

$= \frac{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{١}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}} \times -\text{جاس} = \text{جا}^{\text{٣}}\text{س قا}^{\text{٢}}\text{س}$

السؤال العاشر : نفرض م = ٢ س فيكون

$$\lim_{هـ\to ٠} \frac{ظا(٢س+هـ)-ظا(٢س)}{هـ} = \lim_{هـ\to ٠} \frac{ظا(م+هـ)-ظا(م)}{هـ}$$

$$= (ظا م)' = قا^٢ م = قا^٢ ٢س$$

السؤال الحادي عشر : $\frac{ءص}{ءس} = م ن^{م-١} هـ^م نَ + م ن^م هـ^{م-١} هـَ = م ن^{م-١} هـ^{م-١} (ن هـَ + هـ نَ)$

بالضرب والقسمة على ن × هـ ينتج أن:

$$صَ = م ن^م هـ^م \times \frac{ن هـَ + هـ نَ}{ن هـ} = م ص \left(\frac{نَ}{ن} + \frac{هـَ}{هـ}\right)$$

ومنها $\frac{صَ}{ص} = م \left(\frac{نَ}{ن} + \frac{هـَ}{هـ}\right)$.

تمارين (١-٨) صفحة ٥٣

السؤال الأول :

أ) $٣س^٢ + ص + س صَ + ٤ص صَ = ٠$ ومنها $صَ = \frac{-٣س^٢ - ص}{س + ٤ص}$

ب) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٥}((١ - س^٢))^{-\frac{٤}{٥}} \times -٢س = \frac{-٢}{٥} س(١ - س^٢)^{-\frac{٤}{٥}}$

ج) $صَ = جتا(س + ص)(١ + صَ)$ بالتبسيط ينتج أن:

$$صَ = جتا(س + ص) \times \frac{١}{١ - جتا(س + ص)}$$

د) $\frac{-صَ}{ص^٢} - \frac{١}{س^٢} = ٠$ ومنها $صَ = \frac{-ص^٢}{س^٢}$

السؤال الثاني : نجد نقط التقاطع $ص - ٥ ص + ص^٢ = ٢٥$ ومنها $ص = -٦،$ $ص = ٥،$

عندما ص= -٦ لا يوجد س ، عندما ص=٥ فان س= ٠ ، ٣

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٣$ ، ميل المماس عندما س=٣ يساوي ٣

ميل العمودي $\frac{-١}{٣}$ ومنها معادلة العمودي هي $ص - ٥ = \frac{-١}{٣}(س - ٣)$

أي $ص = \frac{-١}{٣}س + ٦$

ميل المماس عند ما س=٠ يساوي -٣

ميل العمودي $\frac{١}{٣}$ ومنها معادلة العمودي هي $ص - ٥ = \frac{١}{٣}(س)$

$ص = \frac{١}{٣}س + ٥$

السؤال الثالث : بالاشتقاق الضمني ينتج أن:

$٢ف \frac{دف}{دن} = ٢أن$ ومنها $ع(ن) = \frac{دف}{دن} = \frac{أن}{ف} = \frac{أن}{\sqrt{أن^٢ + ٢٤}}$

$ع(٢) = \frac{٢أ}{\sqrt{أ \times ٢^٢ + ٢٤}} = ١$ ومنها $أ = ٣$

السؤال الرابع : $ف = أجا(٢ن + م)$ ، $ع = ٢أجتا(٢ن + م)$ ،

$ت = -٤أجا(٢ن + م) = -٤ف$

السؤال الخامس : نفرض نقطة التماس (س، ص) ، لاحظ ان النقطة المعطاة خارجة عن منحنى العلاقة

$٨س + ٢صص' = ٠$، ومنها $ص' = \frac{-٨س}{٢ص} = \frac{ص}{س + ٢}$

ومنها $ص^٢ = -٤س^٢ - ٨س = ٤ - ٤س^٢$

$س = -\frac{١}{٢}$، $ص = \pm\sqrt{٣}$ ، نقط التماس هي $(\frac{-١}{٢}، \sqrt{٣})، (\frac{-١}{٢}، -\sqrt{٣})$

السؤال السادس: $هـ^{س} + هـ^{ص}ص' = -هـ^{-س} - هـ^{-ص}ص'$

عند النقطة $(-١،١)$ يكون $\frac{١}{هـ} + هـص' = -هـ - هـ^{-١}ص'$

بالتبسيط ينتج أن : $ص' = -١$

السؤال السابع : $س^٢ = لــو_{هـ}س + لــو_{هـ}ص$ بالاشتقاق ينتج أن:

$٢س = \frac{١}{س} + \frac{ص'}{ص}$ ومنها $٢ = \frac{١}{١} + \frac{ص'}{هـ}$، $ص' = هـ$

تمارين عامة (الوحدة الاولى) صفحة ٥٤

السؤال الأول :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
د	أ	ب	أ	ج	د	ج	د	د	ج	ا	ب	ب	د

الأسئلة المقالية:

السؤال الثاني : متوسط التغير للاقتران ص = $\frac{\text{ق}(١) - \text{ق}(٠)}{١ - ٠} = ٢\text{هـ}^{٠} - \text{هـ}^{٠} = ١$

السؤال الثالث : $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{\text{ق}(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١) - \text{ق}(٢)}{\text{س}^{٢} - ١}$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{(٢\text{س} + ٢)\text{ق}'(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١)}{٢\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{(\text{س} + ١)\text{ق}'(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١)}{\text{س}} = ٢\text{ق}'(٢) = -٢$$

يمكن الحل باستخدام الفرض والقسمة .

السؤال الرابع: أ) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{هـ}^{٤\text{س}} - ١}{\text{ظاس}}$ ، بالتعويض داخل النهاية يكون الجواب $\frac{٠}{٠}$ وبالتالي:

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{هـ}^{٤\text{س}} - ١}{\text{ظاس}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{٤\text{هـ}^{٤\text{س}}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = ٤$$

ب) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{٢\text{س}}$ بالتعويض داخل النهاية يكون الجواب $\frac{٠}{٠}$ وبالتالي:

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{٢\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{٢} = \frac{٠ - ١}{٢} = \frac{-١}{٢}$$

ج) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا٢س} - \text{جاس}}{٢\text{س}}$ بالتعويض المباشر يكون الجواب $\frac{٠}{٠}$ وبالتالي:

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا٢س} - \text{جاس}}{٢\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{٢\text{جتا٢س} - \text{جتاس}}{٢} = \frac{٢ - ١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

د) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{١ - \text{جتاس}}{\text{س جاس}}$ بالتعويض المباشر يكون الجواب $\frac{٠}{٠}$ وبالتالي:

$\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{١ - \text{جتاس}}{\text{س جاس}} = \lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{جاس}}{\text{جاس} + \text{س جتاس}}$ وبالتعويض المباشر ينتج أيضا $\frac{٠}{٠}$ ونكمل تطبيق لوبيتال

$$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س جاس}} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{جاس} + \text{س جتاس}} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس} + \text{جتاس} - \text{س جاس}} = \frac{١}{٢}$$

السؤال الخامس :

أ) $ق'(١) = \lim\limits_{س \to ١} \dfrac{(س + ١)\sqrt{س} - ٢}{س - ١} = \lim\limits_{س \to ١} \dfrac{(س + ١)\sqrt{س} - ٢\sqrt{س} + ٢\sqrt{س} - ٢}{س - ١}$

بالاضافة والطرح

$$ق'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)\sqrt{س} + ٢(\sqrt{س} - ١)}{س - ١}$$

$= \lim\limits_{س \to ١} \sqrt{س} + ٢ \lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} = ١ + ٢ \times \frac{١}{٢} = ٢$ يمكن استخدام لوبيتال في ايجاد النهاية

ب) $ق'(١) = \lim\limits_{س \to ١} \dfrac{\sqrt[٣]{٢س - ١} - ١}{س - ١} =$ بفرض $ص = \sqrt[٣]{٢س - ١}$

$$ق'(١) = \lim_{ص \to ١} \frac{ص - ١}{\frac{ص^٣ + ١}{٢} - ١} = ٢\lim_{ص \to ١} \frac{ص - ١}{ص^٣ + ١ - ٢} = ٢\lim_{ص \to ١} \frac{١}{ص^٢ + ص + ١} = \frac{٢}{٣}$$

السؤال السادس: متوسط التغير في الاقتران هـ(س)

$$= \frac{هـ(٣) - هـ(٠)}{٣} = \frac{٩ + ق(٢) - ق(٠)}{٣} = \frac{٩ + ٦}{٣} = ٥$$

السؤال السابع : $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{ق(س) - ٢}{س - ١} = \lim\limits_{س \to ١} \dfrac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = ق'(١) = ٣$ ، $ق(١) = ٢$ لأن

ق(س) متصلاً عند س = ١

$$\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{س^٣ ق'(س) + ٣س^٢ ق(س)}{١}$$

$$= ق'(١) + ٣ق(١) = ٣ + ٣ \times ٢ = ٩$$

السؤال الثامن : نفرض أن زمن وصول كرة نزار $ن$ وزمن وصول كرة أحمد ن+١

$ف_١(ن + ١) = ف_٢(ن)$ ومنها $٥(ن + ١)^٢ = ١٥ن + ٥ن^٢$

$ن = ١$ زمن وصول كرة نزار

سرعة ارتطام كرة نزار $= ف'(١) = ١٥ + ١٠ \times ١ = ٢٥$ م/ث

السؤال التاسع : $ن'(س) = أ$ جتاس ، $هـ'(س) = \frac{٣ - ٣س^٢}{(س^٢ + ١)^٢}$

$(هـ \circ ن)'(\frac{\pi}{٦}) = هـ'(ن(\frac{\pi}{٦})) \times ن'(\frac{\pi}{٦}) = هـ'((\frac{أ}{٢})) \times (\frac{أ\sqrt{٣}}{٢}) = ٠$

ومنها

$هـ'(\frac{أ}{٢}) = ٠$ ومنها $هـ'(\frac{أ}{٢}) = ٣ - ٣(\frac{أ}{٢})^٢ = ٠$ ومنها $أ = \pm ٢$

السؤال العاشر : لاحظ أن: ق(س) منفصل عدما س = ١ ، س=٢

$$ن'(س) = \begin{cases} ٢س &، س \in]١، ٢[\\ ٢س &، س \in]٠، ١[\\ \frac{-٢}{(س+١)^٢} &، س \in]٢، \infty[\end{cases}$$

عند $س = ٠، ١، ٢$ غير موجودة .

السؤال الحادي عشر : $ف = ٢(هـ^{٢ن} - هـ^{-٢ن})$

$ع = ٢(٢هـ^{٢ن} + ٢هـ^{-٢ن})$ ، $ت = ٤(٢هـ^{٢ن} - ٢هـ^{-٢ن}) = ٤ف$

السؤال الثاني عشر : $ن'(س) = ٣$جا^{٢}س جتاس $+ ٣$جتا^{٢}س جاس

$ن''(س) = -٣$جا^{٣}س $+ ٦$جاس جتا^{٢}س $+ ٣$جتا^{٣}س $- ٦$جتا س جا^{٢}س

$ن''(س) = -٣$جا$^٣\frac{\pi}{٤} + ٦$جا$\frac{\pi}{٤}$جتا$^٢\frac{\pi}{٤} + ٣$جتا$^٣\frac{\pi}{٤} - ٦$جتا$\frac{\pi}{٤}$جا$^٢\frac{\pi}{٤}$

$ن''(\frac{\pi}{٤}) = -٣ \times \frac{١}{٢\sqrt{٢}} + ٦ \times \frac{١}{٢\sqrt{٢}} + ٣ \times \frac{١}{٢\sqrt{٢}} - ٦ \times \frac{١}{٢\sqrt{٢}} = ٠$

السؤال الثالث عشر : أ) $ن'(س) = ٣(س - ٢)^٢(٣ + ٢س)^٤ + ٨(س - ٢)^٣(٣ + ٢س)^٣$

$ن'(س) = (س - ٢)^٢(٣ + ٢س)^٣((٨(س - ٢) + ٣(٣ + ٢س)) = ٠$

$ن'(س) = (س - ٢)^٢(٣ + ٢س)^٣(١٤س - ٧) = ٠$

$س = ٢ ، \frac{١}{٢} ، \frac{-٣}{٢}$ ، $س = \frac{-٣}{٢}$ تهمل

ب) $ن'(س) =$ جتاس(١+جتاس) $-$ جا^{٢}س $= ٢$جتا^{٢}س $+$ جتاس $- ١ = ٠$

وبحل المعادلة ينتج أن القيمة المطلوبة هي $س = \frac{\pi}{٣}$

السؤال الرابع عشر : أ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(هـ^{٦س} + ٦س هـ^{٦س}) جاس - س هـ^{٦س} جتاس}{جا^{٢}س}$

ب) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(١ + لـو_{هـ}س) جتاس + س جاس لـو_{هـ}س}{جتا^{٢}س}$

السؤال الخامس عشر : $ف(ن) = أ(جتا٢ن + جا٢ن) = ٣$

$ع = ف^{\prime}(ن) = أ(٢جتا٢ن - ٢جا٢ن)$

$ت = ف^{\prime\prime}(ن) = أ(-٤جتا٢ن - ٤جا٢ن)$

$ت = ف^{\prime\prime}(ن) = -٤أ(جتا٢ن + جا٢ن) = -٤ \times ٣ = -١٢$ م/ث٢

السؤال السادس عشر : $ق^{\prime}(س) = \frac{\frac{٥}{٢} - ٢}{٢ - ١} = \frac{١}{٢}$

$= ١ - \frac{١}{س^{٢}} = \frac{١}{٢}$ ، $س = \pm \sqrt{٢}$

النقاط هي $(\sqrt{٢}، ق(\sqrt{٢}))$، $(-\sqrt{٢}، ق(-\sqrt{٢}))$.

حلول الوحدة الثانية/ تطبيقات التفاضل

تمارين (٢-١) صفحة ٦٥

السؤال الأول :

أ) $ق(س) = \sqrt{٤س - س^{٢}}$ على الفترة [٠، ٤]

نبحث في شروط نظرية رول على ق(س) في [٠، ٤]

ق(س) متصل على [٠، ٤]

$ق^{\prime}(س) = \frac{١}{٢}(٤س - س^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times (٤ - ٢س)$ ، $س \in]٠،٤[$

$\leftarrow ق^{\prime}(س) = \frac{٢ - س}{\sqrt{٤س - س^{٢}}}$ ، ق قابل للاشتقاق في]٠،٤[

ق(٠)= صفر ، ق(٤) = صفر $\Leftarrow$ ق(٠) = ق(٤)

تحققت شروط نظرية رول ومنها يوجد جـ ∋]٠،٤[: $ن'$(جـ) = ٠

$$\frac{٢-جـ}{\sqrt{٤جـ-جـ^{٢}}} = ٠ \Leftarrow جـ = ٢ \in]٠،٤[$$

ب) ن(س) = س^{٢} − ٢س − ٣ على الفترة [$^{-}$١،٣]

الحل: ن(س) = س^{٢} − ٢س − ٣ ، س ∋ [$^{-}$١،٣]

ق(س) متصل على [$^{-}$١،٣] وقابل للاشتقاق على]$^{-}$١،٣[لأنه كثير حدود

ق(−١) = ق(٣) = صفر

إذن تحققت شروط نظرية رول على ق(س) في [$^{-}$١،٣] ومنها يوجد جـ ∋]$^{-}$١،٣[: $ن'$(جـ) = ٠

$ن'$(س) = ٢س − ٢

$^{-}$٢ + ٢جـ = ٠ ⇐ جـ = ١ ∋]$^{-}$١،٣[

ج) ن(س) = لـوهـ$\left(س + \frac{١}{س}\right)$، س ∋ $\left[\frac{١}{٢} ، ٢\right]$

الحل: نبحث في شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في الفترة $\left[\frac{١}{٢}،٢\right]$

ق(س) متصل في $\left[\frac{١}{٢}،٢\right]$ لانه اقتران لوغريتمي والفترة ضمن مجاله

$ن'$(س) = $\frac{١}{س + \frac{١}{س}} \times \left(١ + \frac{^{-}١}{س^{٢}}\right)$ ، س ∋ $\left[\frac{١}{٢} ، ٢\right]$

ق(س) قابل للاشتقاق في الفترة $\left]\frac{١}{٢} ، ٢\right[$

ن($\frac{١}{٢}$) = لـوهـ$\left(\frac{١}{٢} + ٢\right)$ = لـوهـ$\left(\frac{٥}{٢}\right)$

ن(٢) = لـوهـ$\left(٢ + \frac{١}{٢}\right)$ = لـوهـ$\left(\frac{٥}{٢}\right)$

إذن ن($\frac{١}{٢}$) = ن(٢)

تحققت شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في الفترة $\left[\frac{١}{٢}،٢\right]$

إذن E جـ ∋ $\left]\frac{١}{٢}،٢\right[$: $ن'$(جـ) = ٠

$\frac{1}{جـ + \frac{1}{جـ}} \times \left(1 + \frac{-1}{جـ^2}\right) = 0$

$\left(\frac{جـ^2 - 1}{جـ^2}\right) = 0$ وعندما $\left(\frac{جـ^2 - 1}{(جـ^2)}\right) = 0$ إذن $جـ^2 - 1 =$ صفر ومنها جـ $= 1 \in]\frac{1}{2}، 2[$

لاحظ ان جـ $= -1 \notin]\frac{1}{2}،2[$ (تهمل)

د) $ق(س) =$ جا٢س + ٢جاس ، س $\in [0، \frac{\pi}{2}]$

الحل: نبحث في شروط نظرية رول على ق(س) في $[0، \frac{\pi}{2}]$ ، ق(س) متصل على $[0، \frac{\pi}{2}]$

ق(س) قابل للاشتقاق على الفترة $]0، \frac{\pi}{2}[$ بحيث $ق'(س) =$ ٢جتا٢س + ٢جتاس

ق(٠) = صفر ، $ق(\frac{\pi}{2}) = 2 \Leftarrow$ ق(٠) $\neq ق(\frac{\pi}{2})$

إذن لم تتحقق شروط نظرية رول $\Leftarrow$ قد يوجد ج

$ق'(جـ) =$ صفر $\Leftarrow$ ٢جتا٢جـ + ٢جتاجـ = ٠

جتا٢جـ+جتاجـ = ٠ $\Leftarrow$ ٢جتا^{2}جـ+جتاجـ − ١ = ٠

$\in$ (٢جتاجـ − ١)(جتاجـ + ١) = ٠ $\Leftarrow$ جتاجـ $= \frac{1}{2} \Leftarrow$ جـ $= \frac{\pi}{3} \in]0، \frac{\pi}{2}[$

او (جتا جـ + ١) = ٠ $\Leftarrow$ جتاجـ = −١ $\Leftarrow$ جـ $= \pi$ (تهمل)

السؤال الثاني:

أ) $ق(س) = س^3 - س - 1$ ، س $\in [-1، 2]$

ق(س) متصل على $[-1، 2]$ ، كثير حدود

$ق'(س) = 3س^2 - 1$ ، س $\in]-1، 2[$ ، ق(س) قابل للاشتقاق على الفترة

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في الفترة $[-1، 2]$

$\Leftarrow \exists$ جـ $\in]-1، 2[: ق'(جـ) = \frac{ق(2) - ق(-1)}{2 - (-1)}$

$$٣جـ^٢ - ١ = \frac{٥ - (^-١)}{٣} = \frac{٦}{٣} = ٢$$

$٣جـ^٢ = ٣ \leftarrow جـ^٢ = ١ \leftarrow جـ = ١ \in]^-١،٢[$ ، جـ= -١ (تهمل)

ب) $ق(س) = \frac{٤}{س + ٢}$ ، س $\in [^-١،٢]$

نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في $[^-١،٢]$

ق(س) متصل على $[^-١،٢]$

$$ق'(س) = \frac{٤ \times {}^-١}{(س + ٢)^٢} \text{ ، } س \in]^-١،٢[$$

ق قابل للاشتقاق في $]^-١،٢[$

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة $\Leftarrow$ E جـ $\in]^-١،٢[$ بحيث

$$ق'(جـ) = \frac{ق(٢) - ق(^-١)}{٢ - (-١)} = \frac{^-٤}{(جـ + ٢)^٢} = \frac{١ - ٤}{٣}$$

$$\frac{^-٤}{(جـ + ٢)^٢} = \frac{-٣}{٣} \Leftarrow \frac{^-٤}{(جـ + ٢)^٢} = {}^-١ \quad \text{ومنها} \quad ٤ = (جـ + ٢)^٢$$

$جـ + ٢ = ^\pm٢ \Leftarrow$ **جـ=صفر أو جـ = -٤ ترفض ومنها قيمة ج المطلوبة هي الصفر**

ج) $ق(س) = \sqrt{س} + ٢س$ ، س $\in [٤،٩]$

الحل : نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [٤،٩]

ق(س) متصل في [٤،٩] ، وقابل للاشتقاق في]٤،٩[حيث

$$ق'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}} + ٢$$

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [٤،٩]

$$\Leftarrow \text{E جـ} \in]٤،٩[: ق'(جـ) = \frac{ق(٩) - ق(٤)}{٩ - ٤}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{جـ}} + ٢ = \frac{٢١ - ١٠}{٥}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{جـ}} + ٢ = \frac{١١}{٥} \Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{جـ}} = \frac{١}{٥}$$

$$\Leftarrow ٢\sqrt{جـ} = ٥ \Leftarrow جـ = \frac{٢٥}{٤} \in]٤،٩[$$

السؤال الثالث:

$$ق(س) = \begin{cases} أس^{٢}+٢س & ، ٠ \le س \le ٢ \\ س^{٣} - بس+١٢ & ، ٢ < س \le ٣ \end{cases}$$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

إذن ق(س) متصل على [٠،٣] وقابل للاشتقاق على]٠،٣[

ق متصل على[٠،٣] $\Leftarrow \lim_{س \to ٢^{-}} ق(س) = \lim_{س \to ٢^{+}} ق(س)$

$\Leftarrow ٤أ+٤ = ٨-٢ب+١٢ \Leftarrow ٤أ+٢ب = ١٦$

$٢أ+ب = ٨$ -------

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢أس+٢ & ، ٠ < س \le ٢ \\ ٣س^{٢}-ب & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

$ق'(٢^{+}) = ق'(٢^{-}) \Leftarrow ٤أ+٢ = ١٢-ب$ (١)

$٤أ+ب = ١٠$ -------- (٢) وبحل المعادلتين (١) ، (٢)

$٤أ+ب = ١٠$

$٢أ+ب = ٨$

$٢أ = ٢ \Leftarrow أ = ١ \Leftarrow ٢\times١+ب = ٨ \Leftarrow ب = ٦$

لإيجاد قيمة جـ : $ق'(جـ) = \frac{ق(٣)-ق(٠)}{٣-٠} = \frac{٢١-٠}{٣} = ٧$

عندما ٠ $<$ جـ $\le$ ٢ ، $٢جـ+٢ = ٧ \Leftarrow ٢جـ = ٥ \Leftarrow جـ = \frac{٥}{٢}$ ترفض

عندما ٢ $<$ جـ $<$ ٣ ، $٣جـ^{٢}-٦ = ٧ \Leftarrow ٣جـ^{٢} = ١٣ \Leftarrow جـ = \sqrt{\frac{١٣}{٣}} \in]٠،٣[$

السؤال الرابع:

$ق(س) = \frac{١}{س}$ ، س $\in$ [أ،ب] ، س $>$ ٠أثبت باستخدام نظرية القيم المتوسطة ان $جـ^{٢} =$ أب

البرهان : نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [أ،ب]

ق(س) متصل لأن س > ٠ ، $\forall$ س $\in$ [أ،ب]

$ن'(س) = \frac{-١}{س^٢} \leftarrow$ ن قابل للاشتقاق على]أ،ب[لأن س > ٠

إذن تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة ومنها $\exists$ جـ $\in$]أ،ب[بحيث $ن'(جـ) = \frac{ن(ب) - ن(أ)}{ب - أ}$

$$\frac{-١}{جـ^٢} = \frac{\frac{١}{ب} - \frac{١}{أ}}{ب - أ} \Leftarrow \frac{-١}{جـ^٢} = \frac{أ - ب}{أب(ب - أ)}$$

$$\frac{-١}{جـ^٢} = \frac{-١}{أب} \Leftarrow جـ^٢ = أب$$ وهو المطلوب

السؤال الخامس :

البرهان : نبحث في شروط نظرية رول على ق(س) في $[٠،\pi]$

ق(س) متصل على $[٠،\pi]$ وقابل للاشتقاق على $]٠،\pi[$ بحيث $ن'(س) = ٨جتا٢س$ ، س $\in$ $]٠،\pi[$

ق(٠) = صفر ، $ن(\pi)$ = صفر $\Leftarrow ن(٠) = ن(\pi)$

إذن تحقق شروط نظرية رول $\Leftarrow \exists$ جـ $\in$ $]٠،\pi[$ بحيث $ن'(جـ)$ =صفر وهذا يعني ان للاقتران

ق(س) مماساً أفقياً واحداً على الاقل في $[٠،\pi]$ عند س= جـ

لإيجاد نقط التماس:

$ن'(جـ) = ٠ \Leftarrow ٨جتا٢جـ = ٠ \Leftarrow جتا٢جـ = ٠$

$٢جـ = \frac{\pi}{٢} \leftarrow جـ = \frac{\pi}{٤}$ او $٢جـ = ٣\frac{\pi}{٢} \leftarrow جـ = \frac{٣\pi}{٤}$

لأن القيم الأخرى جـ= ٠ ، جـ= π ترفض

إذن نقط التماس هي $\left(\frac{\pi}{٤}،٤\right)$ ، $\left(\frac{٣\pi}{٤}،-٤\right)$

السؤال السادس:

$ع(س) = ن \circ هـ(س)$ ، س $\in$ [أ،ب]، ن، هـ متصلين على الفترة [أ،ب]وقابلين للاشتقاق على الفترة]أ،ب[

هـ(أ) = ب ،هـ(ب) = أ أثبت أنه $\exists$ جـ $\in$]أ،ب[: $ع(أ) - ع(ب) = ن'(جـ)(ب - أ)$

البرهان:

نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [أ،ب]

ق(س) متصل على [أ،ب] وقابل للاشتقاق على]أ،ب[من المعطيات

تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة

$$\Leftarrow \exists\ \text{جـ} \in\ ]\text{أ،ب}[\ : \text{ن}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ن}(\text{ب}) - \text{ن}(\text{أ})}{\text{ب} - \text{أ}}$$

لكن ب = هـ(أ)، أ = هـ(ب) إذن $\text{ن}'(\text{جـ}) = \dfrac{\text{ن}(\text{هـ}(\text{أ})) - \text{ن}(\text{هـ}(\text{ب}))}{\text{ب} - \text{أ}}$

$$\text{ن}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ع}(\text{أ}) - \text{ع}(\text{ب})}{\text{ب} - \text{أ}}$$

$\text{ن}'(\text{جـ})(\text{ب} - \text{أ}) = \text{ع}(\text{أ}) - \text{ع}(\text{ب})$ وهو المطلوب

السؤال السابع:

البرهان : $\text{ن}(\text{س}) = \text{س جتا س}$ ، س $\in \left[\text{٠}، \frac{\pi}{\text{٢}}\right]$

ن(س) متصل على $\left[\text{٠}، \frac{\pi}{\text{٢}}\right]$ وقابل للاشتقاق على $\left]\text{٠}، \frac{\pi}{\text{٢}}\right[$

ق(٠) = صفر ، $\text{ن}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = \frac{\pi}{\text{٢}} \times \text{٠} = \text{٠} \Leftarrow \text{ن}(\text{٠}) = \text{ن}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right)$

إذن تحققت شروط نظرية رول ومنها $\Leftarrow \exists\ \text{جـ} \in \left]\text{٠}، \frac{\pi}{\text{٢}}\right[: \text{ن}'(\text{جـ}) = \text{٠}$

$\text{ن}'(\text{س}) = \text{س} \times -\text{جا س} + \text{جتا س} \times \text{١}$

$\text{ن}'(\text{س}) = \text{جتا س} - \text{س جا س}$ ومنه $\text{ن}'(\text{جـ}) = \text{جتا جـ} - \text{جـ جا جـ}$

وبالتالي ظتا جـ = جـ القيمة التي تعينها النظرية هي عندما ظتا س = س

تمارين (٢-٢) صفحة ٧٠

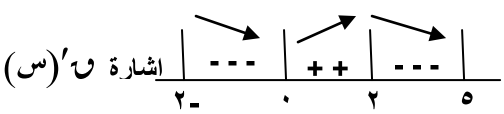
السؤال الاول:

أ) ق(س)= ٣س^{٢} - س^{٣} ، س ∈ [-٢، ٥]

الحل : ق(س) متصل على [-٢، ٥]

$\text{ن}'(\text{س}) = \text{٦س} - \text{٣س}^{\text{٢}}$

صفر=٣س (٢ - س)



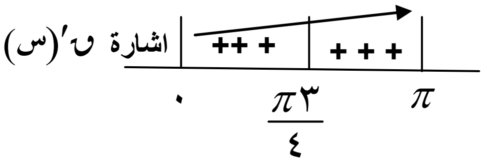
س= صفر أو س =٢

من اشارة ق َ (س) فإن ق(س) متناقص في [-٢، ٠] ، [٢، ٥] ومتزايد في [٠، ٢]

ب) ق َ (س) = س+جا^٢ س ، س ∈ [٠، π]

الحل: ق(س) متصل في [٠، π]

ق َ (س) = ١ + ٢جاس جتاس = ١+جا٢س ، س ∈]٠، π[



-١ = جا٢س ⇐ س = $\frac{٣\pi}{٤}$

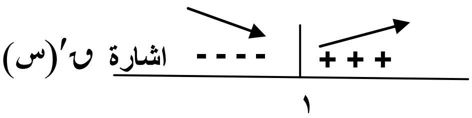
من اشارة ق َ (س)فإن

ق(س) متزايد في [٠، π]

ج) ق(س) = $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١}$

الحل: ق(س) = $\sqrt{(س-١)^٢}$ = |س - ١|،س ∈ ع

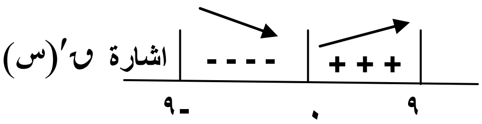
ق(س) = { س - ١ ، س ≥ ١ ؛ -س + ١ ، س < ١ } متصل على ح



ق َ (س) = { ١ ، س > ١ ؛ -١ ، س < ١ }

من اشارة ق َ (س) فإن ق(س) متناقص في]-∞،١] ومتزايد في [١،∞[

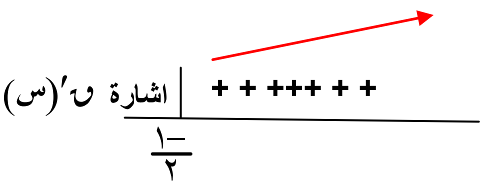
د) ق َ (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٩}$،س ∈]-٩،٩[



الحل: ق َ (س) = ٠ ← س = ٠

ق(س) متناقص في]-٩،٠] ومتزايد في [٠،٩[

السؤال الثاني:



الحل: ق َ (س) = ٢ - $\frac{١}{س+١}$

ق َ (س) = ٢ - $\frac{١}{س+١}$ = ٠

ومنها س = $\frac{-١}{٢}$

ومنها ق متزايد على الفترة]$\frac{-١}{٢}$،∞[وبالتالي متزايد على ح^+

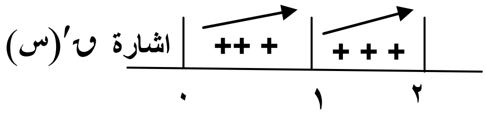
السؤال الثالث:

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، ٠ \le س < ١ \\ س^{٢} - ٢ & ، ١ \le س \le ٢ \end{cases}$$

لاحظ ان ق غير متصل عند س=١ لان

$\underset{س \leftarrow ١^{-}}{نهـــا} ق(س) = ١$ ، $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نهـــا} ق(س) = ١ - ٢ = -١$ ، **النهاية غير موجودة**

وبالتالي $ق'(١)$ **غير موجودة**



$$ق'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، ٠ < س < ١ \\ ٢س & ، ١ < س < ٢ \end{cases}$$

$ق'(س) \ne ٠$ **لجميع قيم س في المجال ،** $ق'(س)$ **موجبة دائما**

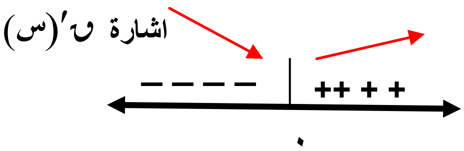
$ق(س)$ **متزايد في [٠،١] ، و متزايد في [١،٢]**

السؤال الرابع :

$ق'(س) = هـ(س)$ ، $هـ'(س) = -ق(س)$ ، $ك(س) = ق^{٢}(س) + هـ^{٢}(س) + س^{٢}$

الحل : $ك'(س) = ٢ق(س)ق'(س) + ٢هـ(س)هـ'(س) + ٢س$

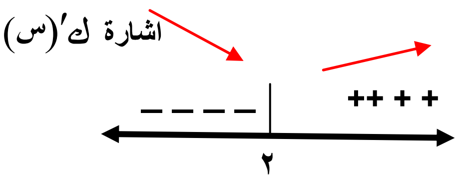
$= ٢ق(س) \times هـ(س) - ٢هـ(س) \times ق(س) + ٢س = ٠ + ٢س$



$ك'(س) = ٢س$

$ك(س)$ **متزايد في** $[٠، \infty[$ $ك(س)$ **متناقص في** $]-\infty، ٠]$

السؤال الخامس : $ك(س) = \sqrt[٣]{(س^{٢} - ٤س)}$



ك متصل على ح لانه كثير حدود

$ك'(س) = \sqrt[٣]{}'(س^{٢} - ٤س) \times (٢س - ٤)$

$ك'(س) = ٠ \Leftarrow (٢س - ٤) = ٠ \Leftarrow س = ٢$ **لان** $ق'(س) \ne ٠$ **كون ق متزايد**

$ك(س)$ **متزايد** $[٢، \infty[$ ، $ك(س)$ **متناقص عندما** $]-\infty، ٢]$

السؤال السادس :

الحل : ق(س)،هـ(س) كثيرا حدود في [٠،٤] ← متصلين في[٠،٤] وقابلين للاشتقاق في]٠،٤[

ق(س) متناقص في مجاله اذن ق′(س) < ٠، ∀ س ∈]٠،٤[

يقع منحنى ق(س) في الربع الرابع اذن ق(س) < ٠، ∀ س ∈ [٠،٤]

هـ(س) متزايد في مجاله اذن هـ′(س) > ٠، ∀ س ∈]٠،٤[

يقع منحنى هـ(س) في الربع الاول اذن هـ(س) > ٠، ∀ س ∈ [٠،٤]

لكن (ق(س)×هـ(س))′ = ق(س)×هـ′(س) + ق′(س)×هـ(س)

اشارة (ق(س)×هـ(س))′ = **سالب × موجب + موجب × سالب = سالب**

اذن ق(س)×هـ(س) متناقص في [٠،٤]

السؤال السابع :

ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$]

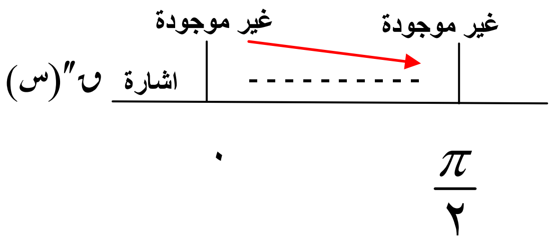
ق′(س) = جتاس − جاس ، س ∈]٠، $\frac{\pi}{٢}$[

ولمعرفة مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق′(س) نبحث في اشارة ق″(س)

ق″(س) = − جاس − جتاس = ٠ أي أن

ظاس = −١ ← س = $\frac{٣\pi}{٤}$ ∉]٠، $\frac{\pi}{٢}$[

ق′(س) **متناقص في**]٠، $\frac{\pi}{٢}$[



تمارين (٢-٣) القيم القصوى صفحة ٨٠

السؤال الاول :

أ) $ق(س) = \frac{١}{٣} س^{٣} - س^{٢} + \frac{١}{٣}$ ، س ∋ $[^{-}٢، ٣]$

الحل: $ق'(س) = س^{٢} - ٢س$ ، س ∋ $]^{-}٢، ٣[$

صفر $= س(س - ٢) \leftarrow س = ٠$ أو $س = ٢$

النقاط الحرجة هي

$(^{-}٢، ق(^{-}٢))$ ، $(٣، ق(٣))$ ، $(٠، ق(٠))$ ، $(٢، ق(٢))$

$\left(^{-}٢، \frac{^{-}١٩}{٣}\right)$ ، $(٣، \frac{١}{٣})$ ، $(٠، \frac{١}{٣})$ ، $(٢، ^{-}١)$

ب) $ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$، س ∋ $[^{-}٨، ٨]$

$ق'(س) = \frac{٢}{٣} س^{\frac{^{-}١}{٣}}$، س ≠ ٠ ← س ∋ $]^{-}٨، ٨[- \{٠\}$

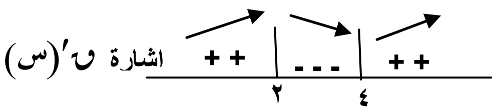
$ق'(س) = \frac{٢}{٣ \times \sqrt[٣]{س}}$، س ≠ ٠

النقط الحرجة هي (٠،٠) ، (−٨، ٤) ، (٨، ٤)

السؤال الثاني :

أ) $ق(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س$، س ∋ ح

الحل: $ق'(س) = ٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤$



صفر $= ٣(س^{٢} - ٦س + ٨) = ٣(س - ٤)(س - ٢)$

أي أن : س=٤ أو س=٢

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي :

ق(٢)= ٨−٩×٤+٢٤×٢=٨−٣٦+٤٨=٢٠ قيمة عظمى محلية

ق(٤)=٦٤−٩×١٦+٢٤×٤=٦٤−١٤٤+٩٦=١٦ قيمة صغرى محلية

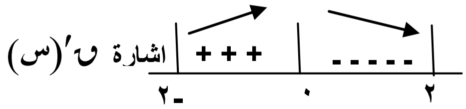
ب) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}$ المجال $٤ - \text{س}^{٢} \geq ٠ \leftarrow \text{س} \in [^{-}٢،٢]$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٢}\left(٤ - \text{س}^{٢}\right)^{\frac{-١}{٢}} \times {}^{-}٢\text{س} = \frac{^{-}\text{س}}{\sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}}$، س $\in\ ]^{-}٢،٢[$

$\text{ق}'(\text{س}) =$ صفر $\leftarrow$ س = صفر

$\text{ق}(^{-}٢) = \text{ق}(٢) =$ صفر قيمة صغرى محلية

$\text{ق}(٠) = ٢$ قيمة عظمى محلية



ج) $\text{ق}(\text{س}) = \left(\text{س}^{٢} - ٣\right)\text{هـ}^{\text{س}}$ ، س $\in$ ح

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \left(\text{س}^{٢} - ٣\right)\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ ، س $\in$ ح

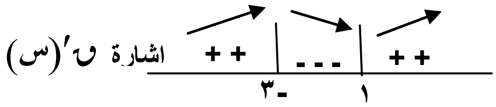
$٠ = \left(\text{س}^{٢} - ٣\right)\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow ٠ = \text{هـ}^{\text{س}}\left(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣\right)$

$\leftarrow ٠ = \text{هـ}^{\text{س}}(\text{س} + ٣)(\text{س} - ١) \leftarrow \text{س} = {}^{-}٣$ ، س $= ١$

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي

$\text{ق}(^{-}٣) = ٦\text{هـ}^{-٣}$ قيمة عظمى محلية

$\text{ق}(١) = {}^{-}٢\text{هـ}$ قيمة صغرى محلية

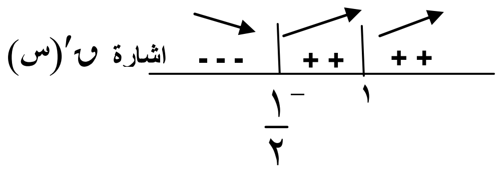


د) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س} - ١}$ ، س $\neq ١$

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \text{س} + ١$ ، س $\neq ١$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س} + ١$

صفر $= \text{ق}'(\text{س}) \leftarrow \text{س} = \frac{-١}{٢}$

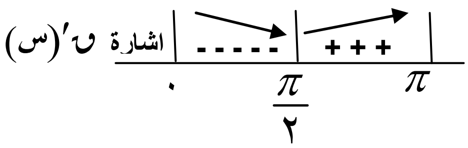


القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي

$\text{ق}(\frac{-١}{٢}) = \frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} + ١ = \frac{٣}{٤}$ قيمة صغرى محلية

هـ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}$ ، س $\in [٠،\pi]$

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}٢\text{س}$ ، س $\in [٠،\pi]$



$ق'(س) = -جا۲س\times۲ = {}^{-}۲جا۲س$ ، س $\in$]۰، π[

$ق'(س) = ۰ \leftarrow ۰ = -۲جا۲س \Leftarrow ۲س = ۰ \leftarrow س = ۰ \notin$]۰، π[

$۲س = \pi \leftarrow س = \frac{\pi}{۲}$ أو $۲س = ۲\pi \leftarrow س = \pi \notin$]۰، π[

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي :

ق(۰) = ۱ قيمة عظمى محلية

$ق(\pi) = ۱$ **قيمة عظمى محلية**

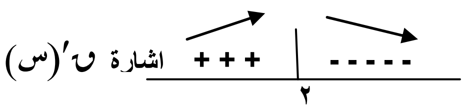
$ق(\frac{\pi}{۲}) = {}^{-}۱$ **قيمة صغرى محلية**

و) $ق(س) = هـ^{-(س-۲)^۲}$ ، س $\in$ ح

الحل: $ق'(س) = هـ^{-(س-۲)^۲} \times {}^{-}۲(س-۲)\times۱ = {}^{-}۲(س-۲)هـ^{-(س-۲)^۲}$

$ق'(س) = ۰ \leftarrow س = ۲$

ق(۲) = ۱ قيمة عظمى محلية



السؤال الثالث:

أ) $ق(س) = \begin{cases} س^۳ ، & ۰ \le س \le ۲ \\ س^۲ + ٤ ، & ۲ < س \le ۳ \end{cases}$ ، س $\in$ [۰، ۳]

الحل: $\lim_{س \to ۲^-} ق(س) = \lim_{س \to ۲^+} ق(س) = ق(۲) = ۸$

إذن ق متصل في [۰، ۳]

$ق'(س) = \begin{cases} ۳س^۲ ، & ۰ < س < ۲ \\ ۲س ، & ۲ < س < ۳ \end{cases}$

ق'(س) غير موجودة عند س= ۰ ، ۲، ۳

ق'(س) = ۰

عندما $۰ < س < ۲ \Leftarrow ۳س^۲ = ۰ \leftarrow س = ۰$ **ترفض**

عندما $۲ < س < ۳ \leftarrow ۲س = ۰ \leftarrow س = ۰$ **ترفض**

القيم القصوى المحلية ق(۰) = صفر ، ق(۲) = ۸ ، ق(۳) = ۱۳

ق(۰) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة) ، ق(۳)=۱۳ قيمة عظمى مطلقة (اكبر قيمة)

ب) ق(س) = هـ^س − هـ س ، س ∈ [٠،٣]

الحل: ق متصل (حاصل طرح متصلين)

ق′(س) = هـ^س − هـ ، س ∈]٠،٣[← ٠ = هـ^س − هـ ← س = ١

القيم القصوى المحلية ق(٠) = ١ ، ق(١) = ٠ ، ق(٣) = هـ^٣ − ٣هـ

ق(١) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة)

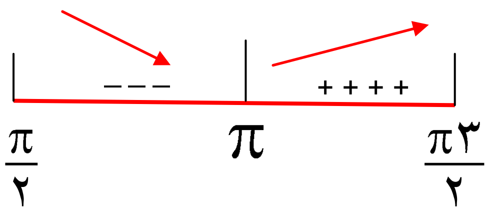
ق(٣)= هـ^٣ − ٣هـ قيمة عظمى مطلقة (اكبر قيمة) حسب نظرية القيم القصوى

ج) ق(س) = جتاس − $\frac{1}{3}$ جتا^٣ س ، س ∈ [$\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$] **، ق متصل (حاصل طرح متصلين)**

ق′(س) = − جاس + جتا^٢ س جاس = − جا^٣ س

ق′(س) = − جا^٣ س = ٠ ⇐ جاس = ٠ ⇐ س = π

ق($\frac{\pi}{2}$) = جتا($\frac{\pi}{2}$) − $\frac{1}{3}$ جتا^٣ ($\frac{\pi}{2}$) = ٠ **عظمى مطلقة**



ق($\frac{3\pi}{2}$) = جتا($\frac{3\pi}{2}$) − $\frac{1}{3}$ جتا^٣ ($\frac{3\pi}{2}$) = ٠ **عظمى مطلقة**

ق(π) = جتا(π) − $\frac{1}{3}$ جتا^٣ (π) = $\frac{-2}{3}$ **صغرى مطلقة**

السؤال الرابع :

ق(س) = أس^٣ + ب س^٢ + ٩س + ١ ، **ق(١) عظمى محلية ، ق(٣) صغرى محلية**

الحل: للاقتران نقط حرجة عند س=١ ، س=٣ ⇐ ق′(١) = ق′(٣) = ٠

ق′(س) = ٣أس^٢ + ٢ب س + ٩

ق′(١) = ٣أ + ٢ب + ٩ ⇐ ٣أ + ٢ب + ٩ = صفر ---------- ١

ق′(٣) = ٣أ × ٣^٢ + ٢ب × ٣ + ٩

٠ = ٢٧أ + ٦ب + ٩

٢

٠ = ٩أ + ٢ب + ٣ ---------- وبحل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على:

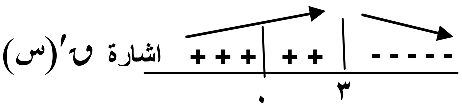
$^{-}$٦أ + ٦ = ٠ ← أ = ١ ⟸ ب = $^{-}$٦

السؤال الخامس:

الحل: ق(س) = ٤س^{٣} − س^{٤} − ٢٩ متصل على ح لانه كثير حدود

ق′(س) = ١٢س^{٢} − ٤س^{٣}

صفر = ٤س^{٢}(٣ − س) ← س = ٠ ، س = ٣



ق(٣) قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لانها وحيدة

ق(٣) = ٤×٢٧−٨١−٢٩ = ١٠٨−١١٠ = −٢

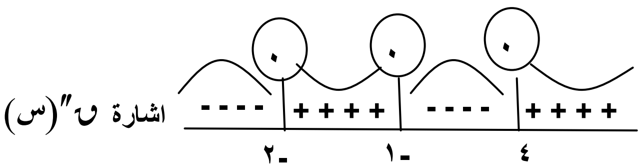
إذن ق(س) ≤ $^{-}$٢، ∀ س ∈ ح ⟸ ق(س) سالب دائماً

تمارين (٢-٤) التقعر ونقط الانعطاف صفحة ٨٧

السؤال الأول :

أ) ق″(س) = (س^{٢} − ٣س − ٤)(س + ٢)

٠ = (س + ١)(س − ٤)(س + ٢) ← س = −٢، −١ ، ٤



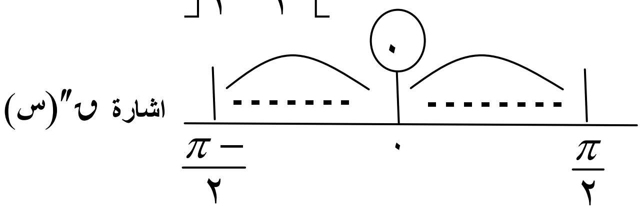
مجالات التقعر للاقتران ق(س) هي :

ق(س) مقعرة الى اعلى في [−٢، −١] كذلك في [٤،∞[،

ومقعرة الى اسفل في]−∞، −٢] كذلك في [−١، ٤]

ب) ق′(س) = جاس − س ، س ∈]$\frac{-\pi}{٢}$، $\frac{\pi}{٢}$[، ق″(س) = جتاس − ١ ، س ∈]$\frac{-\pi}{٢}$، $\frac{\pi}{٢}$[

٠ = جتاس − ١ ← جتاس = ١ ← س = ٠

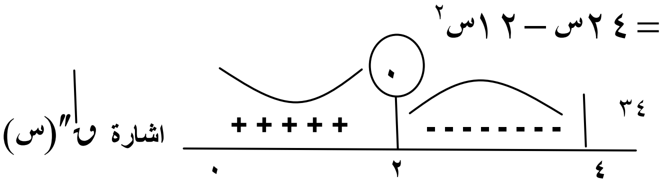


ق(س) مقعر الى اسفل في]$\frac{-\pi}{٢}$،٠] كذلك في [٠،$\frac{\pi}{٢}$[

ج) ق(س) = ٤س^{٣} − س^{٤} + س، س ∈ [٠،٤]

ق′(س) = ١٢س^{٢} − ٤س^{٣} + ١، س ∈]٠،٤[

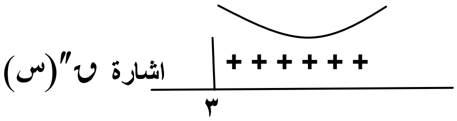
ق″(س) = ٢٤س − ١٢س^{٢}، س ∈]٠،٤[← ٠ = ٢٤س − ١٢س^{٢}



← س = ٢ ، س = ٠ ∉]٠،٤[

ق(س) مقعر الى اسفل في [٢،٤] و مقعر الى اعلى في [٠،٢]

د) ق(س) = (س − ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ ، مجال ق(س) هو س ≥ ٣



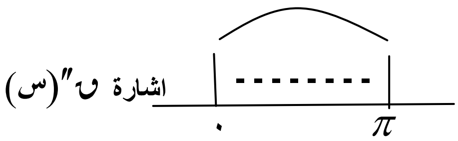
ق′(س) = $\frac{٣}{٢}$(س − ٣)$^{\frac{١}{٢}}$ ، س ∈]٣،∞[

ق″(س) = $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$(س − ٣)$^{\frac{-١}{٢}}$ = $\frac{٣}{٤}$(س − ٣)$^{\frac{-١}{٢}}$ ، س ∈]٣،∞[، ق″(س) **موجبة دائما**

و ق″(س) ≠ ٠ ، ∀ س ∈]٣،∞[ومنها ق(س) مقعر الى اعلى في]٣،∞[

هـ) ق(س) = جا$\frac{س}{٢}$ ، س ∈ [٠،π] ← ق′(س) = $\frac{١}{٢}$جتا$\frac{س}{٢}$ ، س ∈]٠،π[

ق″(س) = $\frac{-١}{٤}$جا$\frac{س}{٢}$ ، س ∈]٠،π[

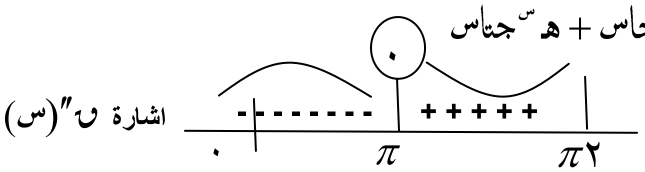


ق″(س) = ٠ ← ٠ = $\frac{-١}{٤}$ جا$\frac{س}{٢}$

← $\frac{س}{٢}$ = ٠ ← س = ٠ او ← $\frac{س}{٢}$ = π ← س = ٢π ترفض فيكون ق(س) مقعر الى اسفل في [٠،π]

و) ق(س) = هـ^{س}جتاس ، س ∈ [٠،٢π] ← ق′(س) = −هـ^{س}جاس + هـ^{س}جتاس ، س ∈]٠،٢π[

ق″(س) = −هـ^{س}جتاس + −هـ^{س}جاس − هـ^{س}جاس + هـ^{س}جتاس



= −٢هـ^{س}جاس ، س ∈]٠،٢π[

ق″(س) = ٠ ← ٠ = −٢هـ^{س}جاس ← س = π

ق(س) مقعر الى اسفل في [٠،π] و ق(س) مقعر الى اعلى في [π،٢π]

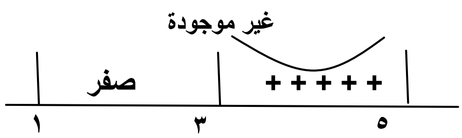
ز) ق(س) = { [$\frac{١}{٣}$س − ١] ، ١ < س ≤ ٣ ؛ س^{٣} ، ٣ < س ≤ ٥ } = { −١ ، ١ < س < ٣ ؛ ٠ ، س = ٣ ؛ س^{٣} ، ٣ < س ≤ ٥ }

$\displaystyle\lim_{\text{س}\to ٣^-}\text{ق(س)} = -١$ ، $\displaystyle\lim_{\text{س}\to ٣^+}\text{ق(س)} = ٢٧$ ، $\text{ق}(٣) = ٠$ ← ق(س) غير متصل عند س=٣

ومنها فان $\text{ق}'(٣)$ غير موجودة

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٠ & ، ١ < \text{س} < ٣ \\ ٣\text{س}^٢ & ، ٣ < \text{س} < ٥ \end{cases}$$

اشارة $\text{ق}''(\text{س})$



$$\text{ق}''(\text{س}) = \begin{cases} ٠ & ، ١ < \text{س} < ٣ \\ ٦\text{س} & ، ٣ < \text{س} < ٥ \end{cases}$$

$\text{ق}''(\text{س}) = ٦\text{س} = ٠ \leftarrow \text{س} = ٠ \notin]٣،٥[$

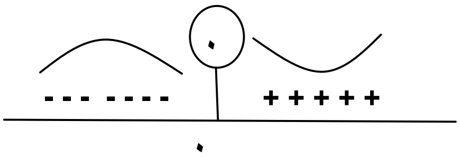
ق(س) اقتران ثابت في [١،٣] ، و مقعر الى اعلى في]٣،٥[

السؤال الثاني : أ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ + \text{س}$ متصل على ح لانه كثير حدود

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ + ١ \leftarrow \text{ق}''(\text{س}) = ٦\text{س}$

$\text{ق}''(\text{س}) = ٠ \leftarrow \text{س} = ٠$

اشارة $\text{ق}''(\text{س})$



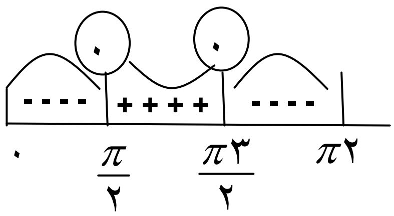
$(٠، \text{ق}(٠)) = (٠،٠)$ نقطة انعطاف لان الاقتران متصل عندها ويغير من مجال تقعره

ب) ق(س) =جتاس متصل في $[٠،٢\pi]$

$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جاس} \leftarrow \text{ق}''(\text{س}) = -\text{جتاس}$ ، س ∋ $]٠،٢\pi[$

$\text{ق}''(\text{س}) = ٠ \leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٢}$ ، $\text{س} = \frac{٣\pi}{٢}$

اشارة $\text{ق}''(\text{س})$

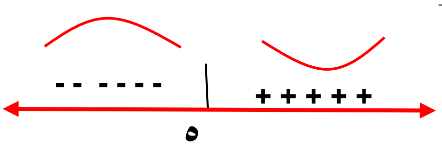


نقاط الانعطاف هي : $\left(\frac{\pi}{٢}، \text{ق}(\frac{\pi}{٢})\right) = \left(\frac{\pi}{٢}،٠\right)$ ، $\left(\frac{٣\pi}{٢}، \text{ق}(\frac{٣\pi}{٢})\right) = \left(\frac{٣\pi}{٢}،٠\right)$

لأن الاقتران متصل عندها ويغير من اتجاه تقعره .

ج) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{٥ - \text{س}}$ ، ← ، $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٣}(٥ - \text{س})^{\frac{-٢}{٣}}$

اشارة $\text{ق}''(\text{س})$



$$ق''(س) = \frac{١}{٣} \times \frac{-٢}{٣} (٥ - س)^{\frac{-٥}{٣}} = \frac{-٢}{٩} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{(٥ - س)^{٥}}}$$

$$ق''(س) \neq ٠ \quad \forall س \in ح$$

اذن يوجد نقطة انعطاف عندما س = ٥ لان ق متصل ويغير من مجال تقعره وهي (٥،٠)

السؤال الثالث :

أ) $ق(س) = س^{٣} + ٦س^{٢} \leftarrow ق'(س) = ٣س^{٢} + ١٢س \leftarrow ق''(س) = ٦س + ١٢$

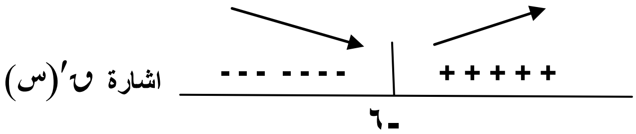
$ق'(س) = ٠ \leftarrow ٠ = ٣س(س + ٤) \leftarrow س = ٠ ، س = -٤$

$ق''(٠) = ١٢ > ٠ \leftarrow ق(٠) = ٠$ **قيمة صغرى محلية**

$ق''(-٤) = -١٢ < ٠ \leftarrow ق(-٤) = ٣٢$ **قيمة عظمى محلية**

ب) $ق(س) = |س + ٦| = \begin{cases} س + ٦ & ، س > -٦ \\ -س - ٦ & ، س \leq -٦ \end{cases}$ **متصل على ح**

$ق'(س) = \begin{cases} ١ & ، س > -٦ \\ -١ & ، س < -٦ \end{cases}$



$ق'(-٦)$ **غير موجودة اذن** $ق''(-٦)$ **غير موجودة**

فشل اختبار المشتقة الثانية ومنها فإن $ق(-٦) = ٠$ **قيمة صغرى محلية وهي صغرى مطلقة**

السؤال الرابع:

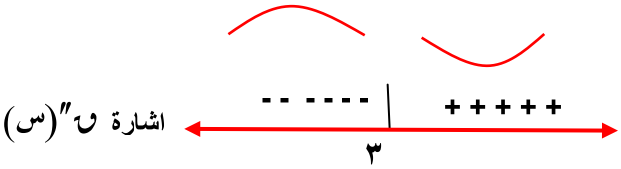
$ق(س) = أس^{٢} + س^{٣}$ **له عند س= -١ نقطة انعطاف** $\leftarrow ق''(-١) = ٠$

$ق'(س) = ٢أس + ٣س^{٢}$

$ق''(س) = ٢أ + ٦س \Leftarrow ق''(^{-}١) = ٢أ - ٦$

$٠ = ٢أ - ٦ \leftarrow أ = ٣$

السؤال الخامس:



ن′(٠) = ن′(٦) = ٠

أ) من اشارة ن″(س)

ن(س) مقعر إلى أسفل في]−∞،٣[ومقعر إلى اعلى في]٣،∞[

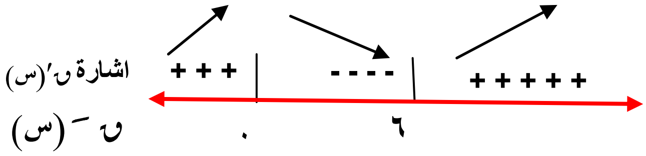
يوجد نقطة انعطاف عندما س=٣ لان ق متصل (المشتقة موجودة)

ويغير من مجال تقعره هي (٣،ق(٣)) .

ب) ن′(٠) = ٠ ، ن″(٠) < ٠ ⇐ ن(٠) **قيمة عظمى محلية**

ن′(٦) = ٠ ، ن″(٦) > ٠ ⇐ ن(٦) **قيمة صغرى محلية**

ج) ن(س) **متزايد في**]−∞،٠[



وأيضا في]٦،∞[ومتناقص في]٠،٦[

السؤال السادس:

المعطيات: ن(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء : أ،ب،جـ،ء ∈ ح

منحنى ق يمر بالنقطة (١، ٥) ← ق(١)=٥

(٢، ١) نقطة انعطاف ← ق(٢)=١ ، ن″(٢) = ٠

معادلة المماس عند (٢، ١) هي ٣س+ص=٧ ← ن′(٢) = −٣

الحل: ن(١) = أ + ب + جـ + ء ⇐ ٥ = أ + ب + جـ + ء --------- ١

ن(٢) = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + ء ⇐ ١ = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + ء --- ٢

ن′(س) = ٣أس^{٢} + ٢ب س + جـ

ن′(٢) = ١٢أ + ٤ب + جـ ⇐ −٣ = ١٢أ + ٤ب + جـ ------ ٣

ن″(س) = ٦أس + ٢ب

ن″(٢) = ١٢أ + ٢ب ⇐ ٠ = ٦أ + ب -------------- ٤

بحل نظام المعادلات نحصل على

أ = −١، ب = ٦، جـ = −١٥، ء = ١٥

إذن ن(س) = −س^{٣} + ٦س^{٢} − ١٥س + ١٥

السؤال السابع :

المعطيات: ق(س) = س^{٤} − ٤س^{٣} + ك(س)

(١، ٢) نقطة انعطاف افقي للاقتران ق(س) ⇐ ق(١) = ٢، ق$'$(١) = ٠، ق$''$(١) = ٠

ع(س) = ك^{٢} (س) **احسب** ع$''$(١)

الحل: ق(١) = ١^{٤} − ٤×١^{٣} + ك(س) ⇐ ٢ = ١ − ٤ + ك(١) ⇐ ك(١) = ٥

ق$'$(س) = ٤س^{٣} − ١٢س + ك$'$(س)

ق$'$(١) = ٤ − ١٢ + ك$'$(١) ⇐ ٠ = ٨$^{-}$ + ك$'$(١) ⇐ ك$'$(١) = ٨

ق$''$(س) = ١٢س^{٢} − ٢٤س + ك$''$(س)

ق$''$(١) = ١٢ − ٢٤ + ك$''$(س) ⇐ ٠ = ١٢$^{-}$ + ك$''$(١) ← ك$''$(١) = ١٢

ع(س) = ك^{٢} (س)

ع$'$(س) = ٢ك(س) × ك$'$(س)

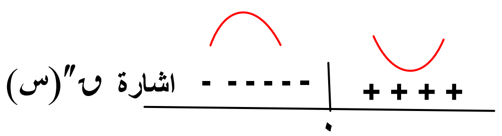
ع$''$(س) = ٢ك(س) × ك$''$(س) + ٢(ك$'$(س))^{٢}

ع$''$(١) = ٢ك(١) × ك$''$(١) + ٢(ك$'$(١))^{٢}

=٢×٥×١٢+٢(٨)^{٢}=١٢٠+١٢٨=٢٤٨

السؤال الثامن: **المعطيات:** ق(٠)=٠ ، ق$'$(١) = ٠، ق$'$(٢$^{-}$) = ٠

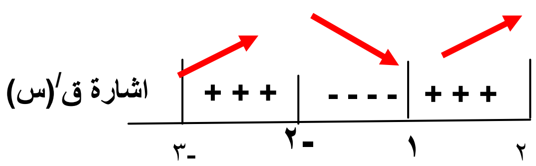
أ) قيم س التي يكون للاقتران عندها قيمة قصوى هي س=١ ،س=-٢ بحيث ق(١) قيمة صغرى محلية و ق(-٢) قيمة عظمى محلية (ظهر ذلك من خلال اختبار المشتقة الثانية) اما ق(-٣) قيمة صغرى محلية ، ق(٢) قيمة عظمى محلية (يظهر ذلك من خلال إشارة المشتقة الاولي لان اختبار المشتقة الثانية يفشل).



ب) للاقتران نقطة انعطاف عند س=٠ هي (٠،٠) ، ق متصل عندها ويغير من مجال تقعره

ج) ق(س) متزايد [−٣،−٢]

كذلك في [١،٢] ومتناقص في [٢$^{-}$،١]



تمارين (٢-٥) تطبيقات القيم القصوى صفحة ٩٣

السؤال الأول :

الحل : محيط المستطيل = الطولين + العرضين

٨٠=٢س+٢ص

٤٠=س+ص ومنها ص= ٤٠- س

مساحة المستطيل = الطول × العرض

م= س× ص

م= س(٤٠ – س) **٠<س<٤٠**

م= ٤٠س- س^{٢}

$\frac{دم}{دس} = ٤٠ - ٢س$

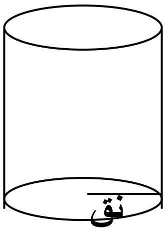
صفر = ٤٠- ٢س ومنها س= ٢٠

$\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}} = -٢ \Leftarrow \left.\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}}\right|_{س=٢٠} = -٢ < ٠$

إذن المساحة أكبر ما يمكن عندما س= ٢٠ م ومنها ص= ٢٠ م

ومنها مساحة اكبر حديقة ٤٠٠ متر مربع

السؤال الثاني :



الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$١٩٢\pi = نق^{٢}\pi \times ع \Leftarrow ع = \frac{١٩٢}{نق^{٢}}$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة (لأنها مفتوحة من أعلى)

$م = ٢ نق\pi \times ع + نق^{٢}\pi$

التكلفة ت =٢ نقπ ع + نق$^{٢}\pi$×٣ل ، بفرض أن اسم^{٢} من الجوانب يكلّف ل إذن اسم^{٢} من القاعدة يكلف ٣ ل

$ت = ٢\pi \times نقع + ٣\pi ل نق^{٢}$

$ت = ٢\pi \times نق \frac{١٩٢}{نق^{٢}} + ٣\pi ل نق^{٢}$

$ت = ٣٨٤\pi \times \frac{١}{نق} + ٣\pi ل \times نق^{٢}$ ، نق>٠.

$\frac{دت}{دنق} = ٣٨٤\pi \times \frac{-١}{نق^{٢}} + ٣\pi ل \times ٢ نق = \frac{-٣٨٤\pi ل}{نق^{٢}} + ٦\pi ل نق$

$$\frac{-384\,\pi\, ل}{نو^{2}}+6\,\pi\, ل\, نو=0$$ ومنها ينتج أن $$\frac{384\,\pi\, ل}{نو^{2}}=6\,\pi\, ل\, نو$$

$64 = نو^{3} \Leftarrow نو = 4$سم

$$\frac{د^{2}ت}{دنو^{2}} = -384\,\pi\, ل \times \frac{-2نو}{نو^{4}} + 6\pi ل = \frac{768\pi ل}{نو^{3}} + 6\pi ل$$

$$\left.\frac{د^{2}ت}{دنو^{2}}\right|_{نو=2} = 18\pi ل > 0$$ $\Leftarrow$ **التكلفة أقل ما يمكن عندما نق= ٤سم**

$$ع = \frac{192}{نو^{2}} = \frac{192}{16} = 12 \text{سم}$$

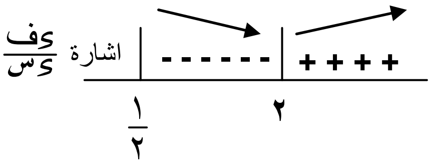
إذن ابعاد الاسطوانة الاقل تكلفة هي نصف قطر القاعدة=٤سم وارتفاعها ١٢سم

السؤال الثالث : $ص = ق(س) = \sqrt{2س - 1}$

$$ف^{2} = (س-3)^{2} + (ص-0)^{2} = (س-3)^{2} + ص^{2}$$

$$ف^{2} = (س-3)^{2} + 2س - 1 \text{ ، } س \geq \frac{1}{2}$$

$$2ف\frac{دف}{دس} = 2(س-3) + 2 \text{ ، } س > \frac{1}{2}$$



$$\frac{دف}{دس} = \frac{س-2}{ف}$$

$$\frac{دف}{دس} = 0 \leftarrow \frac{س-2}{ف} = 0 \leftarrow س-2 = 0 \leftarrow س = 2$$

المسافة اقل ما يمكن عندما $س = 2 \leftarrow ص = \sqrt{3} \leftarrow و = (2 ، \sqrt{3})$

السؤال الرابع :

$$ف = أجتا\frac{\pi}{4}ن + بجا\frac{\pi}{4}ن$$

السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(2) - ف(0)}{2-0}$

$$١٠ = \frac{\left(\text{أجتا}\frac{\pi}{٢} + \text{ب جا}\frac{\pi}{٢}\right) - \left(\text{أجتا}(٠) + \text{ب جا}(٠)\right)}{٢}$$

$$٢٠ = \text{ب} - \text{أ} \quad \text{-----------} \quad (١)$$

$$\text{ع} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \text{أ} \times {}^{-}\text{جا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} \times \frac{\pi}{٤} + \text{ب} \times \text{جتا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} \times \frac{\pi}{٤}$$

$$\text{ع} = \frac{{}^{-}\text{أ}\pi}{٤} \times {}^{-}\text{جا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} + \frac{\text{ب}\pi}{٤}\text{جتا}\frac{\pi}{٤}\text{ن}$$

سرعة الجسم اقل ما يمكن عند $\text{ن} = ١ \leftarrow \text{ع}'(١) = ٠$

$$\text{ع}'(\text{ن}) = \frac{{}^{-}\text{أ}\pi}{٤} \times \text{جتا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} \times \frac{\pi}{٤} + \frac{\text{ب}\pi}{٤} \times {}^{-}\text{جا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} \times \frac{\pi}{٤}$$

$$\text{ع}'(\text{ن}) = {}^{-}\text{أ}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢} \times \text{جتا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} + {}^{-}\text{ب}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\text{جا}\frac{\pi}{٤}\text{ن}$$

$$\text{ع}'(١) = {}^{-}\text{أ}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢} \times \text{جتا}\frac{\pi}{٤} + {}^{-}\text{ب}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\text{جا}\frac{\pi}{٤}$$

$$٠ = {}^{-}\text{أ}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \text{ب}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

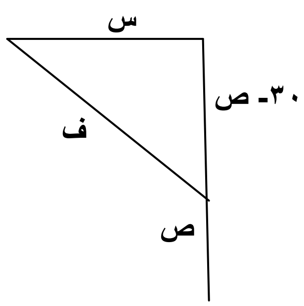
$$٠ = {}^{-}\text{أ} - \text{ب} \leftarrow \text{أ} = {}^{-}\text{ب} \quad \text{-----------} \quad (٢)$$

نعوض قيمة أ من ٢ في ١

$$٢٠ = \text{ب} - ({}^{-}\text{ب}) \leftarrow ٢٠ = ٢\text{ب} \leftarrow \text{ب} = ١٠$$

$$٢٠ = \text{ب} - \text{أ} \leftarrow ٢٠ = ١٠ - \text{أ} \leftarrow \text{أ} = {}^{-}١٠$$

السؤال الخامس:



$$\text{ف}^{٢} = (٣٠ - \text{ص})^{٢} + \text{س}^{٢}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ١٠ \leftarrow \text{س} = ١٠\text{ن} \quad ، \quad \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٢٠ \leftarrow \text{ص} = ٢٠\text{ن}$$

$$\text{ف}^{٢} = (٣٠ - ٢٠\text{ن})^{٢} + (١٠\text{ن})^{٢}$$

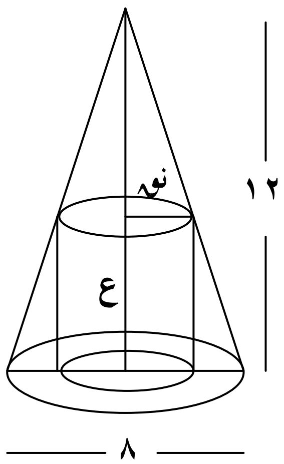
$$٢\text{ف}\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢(٣٠ - ٢٠\text{ن}) \times {}^{-}٢٠ + ٢(١٠\text{ن}) \times ١٠$$

ف $\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \text{⁻٦٠٠} + \text{٤٠٠ن} + \text{١٠٠ن}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{\text{⁻٦٠٠} + \text{٥٠٠ن}}{\text{ف}}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \text{٠} \Leftarrow \text{ن} = \frac{\text{٦٠٠}}{\text{٥٠٠}} = \frac{\text{٦}}{\text{٥}} = \text{١.٢}$ **ساعة = ساعة و ١٢ دقيقة**

المسافة بين الباخرتين اقل ما يمكن الساعة الواحدة و ١٢ دقيقة



السؤال السادس:

حجم الاسطوانة = $\text{نق}^{\text{٢}} \pi \times \text{ع}$

من تشابه المثلثات

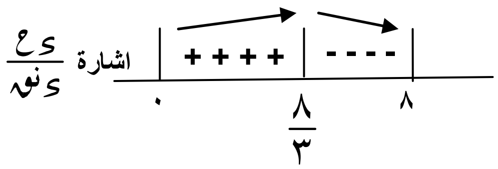
$\frac{\text{نق}}{\text{٤}} = \frac{\text{١٢} - \text{ع}}{\text{١٢}}$ **ومنها** $\text{نق} = \frac{\text{١٢} - \text{ع}}{\text{٣}}$

$\text{ع} = \text{١٢} - \text{٣نق}$

$\text{ع} = \pi\,\text{نق}^{\text{٢}}\left(\text{١٢} - \text{٣نق}\right)$ ، $\text{٠} < \text{نق} < \text{٤}$

$\text{ع} = \text{١٢}\pi\,\text{نق}^{\text{٢}} - \text{٣}\pi\,\text{نق}^{\text{٣}}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دنق}} = \text{٢٤}\pi\,\text{نق} - \text{٩}\pi\,\text{نق}^{\text{٢}}$

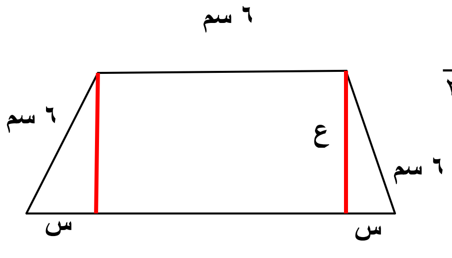


$\text{٠} = \text{٣}\pi\,\text{نق}\left(\text{٨} - \text{٣نق}\right)$ **ومنها** $\text{نق} = \text{٠}$ **ترفض أو** $\text{نق} = \frac{\text{٨}}{\text{٣}}$

إذن الحجم أكبر ما يمكن عندما $\text{نق} = \frac{\text{٨}}{\text{٣}}$ **فيكون أكبر حجم=** $\pi\left(\frac{\text{٦٤}}{\text{٩}}\right)\left(\text{١٢} - \text{٣} \times \frac{\text{٨}}{\text{٣}}\right)$

$= \pi\left(\frac{\text{٦٤}}{\text{٩}}\right)(\text{٤}) = \frac{\text{٢٥٦}\pi}{\text{٩}}$ سم$^{\text{٣}}$

السؤال السابع :

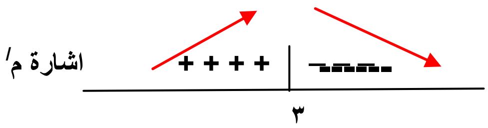


مساحة شبه المنحرف = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{٢س}+\text{٦}+\text{٦})\text{ع}$ ، $\text{ع} = \sqrt{\text{٣٦} - \text{س}^{\text{٢}}}$

$\text{م} = (\text{س}+\text{٦})\sqrt{\text{٣٦} - \text{س}^{\text{٢}}}$

$\text{م}' = \sqrt{\text{٣٦} - \text{س}^{\text{٢}}} + (\text{س}+\text{٦}) \times \frac{\text{-٢س}}{\text{٢}\sqrt{\text{٣٦} - \text{س}^{\text{٢}}}}$

$$م' = \frac{-٢س^{٢}-٦س+٣٦}{\sqrt{٣٦-س^{٢}}} = ٠$$



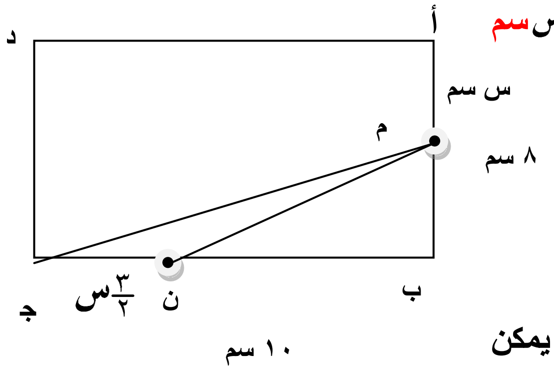
$$-٢س^{٢}-٦س+٣٦ = ٠$$

$$(س+٦)(س-٣) = ٠$$

$$س = -٦ ، ٣$$

عندما س= ٣ يوجد قيمة عظمى وتكون اكبر مساحة ممكنة = $٢٧\sqrt{٣}$ وحدة مساحة

السؤال الثامن : نفرض $م أ$ = س سم ، فيكون $م ب$ = ٨−س سم



$$م = \frac{١}{٢}\left(\frac{٣}{٢}س(٨-س)\right)$$

$$م = \frac{١}{٢}\left(١٢س - \frac{٣}{٢}س^{٢}\right)$$

$$م' = \frac{١}{٢}(١٢ - ٣س) = ٠$$ ومنها س=٤

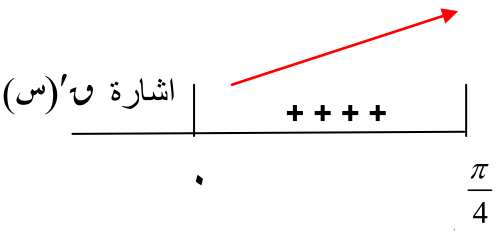
يوجد عندما س=٤ قيمة عظمى تجعل مساحة المثلث اكبر ما يمكن

تمارين عامة (الوحدة الثانية) صفحة ٩٤

السؤال الأول:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
رمز الإجابة	جـ	ب	ب	ب	د	جـ	ا	د	أ	جـ	د	جـ	جـ	أ

لسؤال الثاني :



$$ه'(س) = ق'(س) = جتاس - جاس = ٠ \leftarrow س = \frac{\pi}{٤}$$

نلاحظ ان $ه'(س) > ٠ \ \forall س \in]٠، \frac{\pi}{٤}[$

ومنها ق(س) متزايد على $\left[٠، \frac{\pi}{٤}\right]$

السؤال الثالث:

$$ق(س)=\frac{س+١}{س^{٢}+٣}\leftarrow ق'(س)=\frac{س^{٢}+٣-(س+١)\times٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}}$$

$$ق'(س)=\frac{س^{٢}+٣-(س+١)\times٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}}=\frac{٣-س^{٢}-٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}}$$

$$ق'(س)=٠\leftarrow(س-١)(-س-٣)=٠\leftarrow س=١،س=-٣$$

ق متزايد في الفترة [-٣،١] ومتناقص في]−∞،-٣] و [١،∞[

$ق(-٣)=\frac{-١}{٦}$ قيمة صغرى محلية ، $ق(١)=\frac{١}{٢}$ قيمة عظمى محلية

السؤال الرابع :

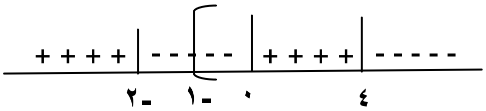
$ق(س)=س^{٢}-٣س-أ$ يحقق رول $[-١،أ]$ أوجد أ

ق يحقق رول ومنها ق متصل وقابل للاشتقاق على $[-١،أ]$ و $ق(-١)=ق(أ)$

$$ق(-١)=١+٣-أ=٤-أ$$

$$ق(أ)=أ^{٢}-٣أ-أ=أ^{٢}-٤أ$$

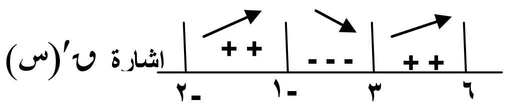
$$ق(-١)=ق(أ)\Leftarrow(٤-أ)=(أ^{٢}-٤أ)$$



$أ^{٢}-٣أ-٤=٠$ ومن أ=٤، أ=-١ **(تهمل)**

السؤال الخامس :

أ) $ق(س)=س^{٣}-٣س^{٢}-٩س+٥$ ، $[-٢،٦]$



$$ق'(س)=٣س^{٢}-٦س-٩$$

$$٠=س^{٢}-٢س-٣=(س-٣)(س+١)$$

النقط الحرجة عند س= -٢ ، -١ ، ٣، ٦

ق(-٢)= -٨ -٣×٤-٩×-٢+٥= -٨ -١٢+١٨+٥ = ٣

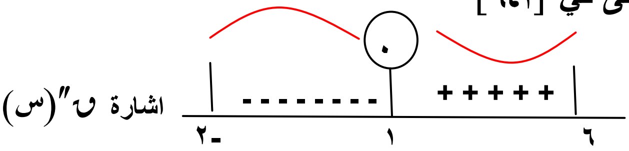
ق(-١) = -١-٣+٩+٥=١٠

ق(٣)= ٢٧-٣×٩-٩×٣+٥=٢٧-٢٧+٥=-٢٢ قيمة صغرى مطلقة

ق(٦)= ٦×٣٦-٣×٣٦-٩×٦+٥=١٠٨-٥٤+٥ =١١٣-٥٤=٥٩ قيمة عظمى مطلقة

ب) $ق''(س) = ٦س - ٦ = ٠ \leftarrow س = ١$

ق مقعر الى اسفل في $]^{-}٢،١[$ ومقعر الى اعلى في $[١،٦]$



ج) (١، -٦) نقطة انعطاف ،متصل ويغير من تقعره

ظل زاوية الانعطاف = $ق'(١) = {}^{-}١٢$

السؤال السادس:

أ) اشارة $ق''(س)$

منحنى ق(س) مقعر الى اعلى في $]^{-}\infty،^{-}٢[$ **كذلك في** $]١،\infty[$ **ومقعر الى اسفل في** $]^{-}٢،١[$

ب) للاقتران نقاط انعطاف عند س= -٢ ، س=١ لان ق متصل ويغير من مجال تقعره

السؤال السابع:

ق كثير حدود معرف على [٢،٦] يقع منحناه في الربع الاول ومنها ق> ٠ في [٢،٦]

ق متناقص على مجاله ومنها $ق' < ٠$ **في]٢،٦[**

هـ(س) = ١- س ومنها هـ < صفر في [٢،٦]

هـ' $= {}^{-}١ < ٠$ **في]٢،٦[بين أن ك = ق×هـ متناقص في]٢،٦[**

$$(ق \times هـ)'(س) = ق(س).هـ'(س) - هـ(س).ق'(س)$$

اشارة $(ق \times هـ)'(س) =$ **موجب×سالب – سالب ×سالب= سالب**

إذن ق×هـ متناقص في [٢،٦]

السؤال الثامن:

نق^{٢}+(ع-١٠)^{٢}=١٠٠ ومنها نق^{٢}=١٠٠- (ع^{٢}-٢٠ع+١٠٠) اذن نق^{٢}=٢٠ع – ع^{٢}

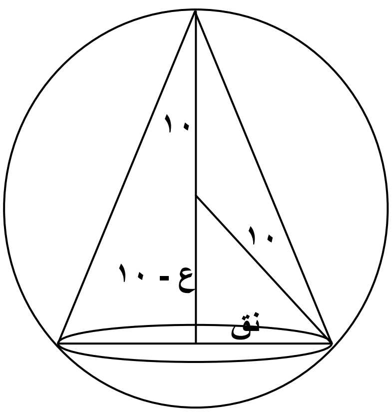
$$ح = \frac{\pi}{٣} نق^{٢} ع = \frac{\pi}{٣}\left(٢٠ع - ع^{٢}\right) \times ع$$

$$\leftarrow ح = \frac{\pi}{٣}\left(٢٠ع^{٢} - ع^{٣}\right)$$

$$\frac{دح}{دع} = \frac{\pi}{٣}\left(٤٠ع - ٣ع^{٢}\right) \leftarrow ٠ = \frac{\pi}{٣} ع(٤٠ - ٣ع)$$

$ع = ٠$ ترفض أو $ع = \frac{٤٠}{٣}$ سم

$$\frac{د^{٢}ح}{دع^{٢}} = \frac{\pi}{٣}(٤٠ - ٦ع)$$



$$\left.\frac{د^{2}ع}{دع^{2}}\right|_{ع=\frac{40}{3}} = \frac{\pi}{3}\left(40-6\times\frac{40}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\times {}^{-}40 < 0$$

إذن الحجم اكبر ما يمكن عندما $ع = \frac{40}{3}$ سم   نق $= \frac{20\sqrt{2}}{3}$

السؤال التاسع:

$ق(س) = \text{جتا}س - هـ(س) + 3س$ ، $س \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

اثبت أن (ق+هـ)(س) متزايد في $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$(ق+هـ)(س) = \text{جتا}س + 3س$

$(ق+هـ)'(س) = {}^{-}\text{جا}س + 3 > 0 \quad \forall\, س \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

لأن $\text{جا}س^{+} < 1 \Leftarrow {}^{-}\text{جا}س + 3 > {}^{-}1 + 3 = 2$

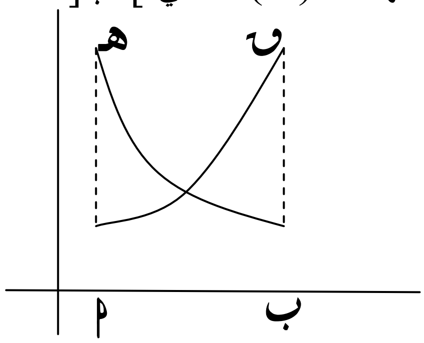
إذن ق+هـ متزايد في $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

السؤال العاشر:

بين أن $\frac{ق'(س)}{هـ(س)}$ اقتران متزايد على $[أ،ب]$

ق>٠ ، هـ >٠ يقعان في الربع الاول

ق متزايد في [أ،ب] ق'(س)>٠ في]أ،ب[، ق مقعر الى أعلى ومنها ق''(س)>٠ في]أ،ب[



هـ متناقص في [أ،ب] ومنها هـ'(س)<٠ في]أ،ب[

$$\left(\frac{ق'(س)}{هـ(س)}\right)' = \frac{هـ(س)\,ق''(س) - ق'(س)\,هـ'(س)}{هـ(س)^{2}}$$

اشارة $\left(\frac{ق'(س)}{هـ(س)}\right)' = \frac{(+\times+)-(+\times-)}{+} =$ موجب

إذن $\frac{ق'(س)}{هـ(س)}$ متزايد $[أ،ب]$

السؤال الحادي عشر :

ق(س) = أس^٣ + ب س^٢ +جـ س + ء

ق(٠) = ٣ ⇐ ء = ٣

ق′(س) = ٣أس^٢ + ٢ب س +جـ

ق′(٢) = ٠ ⇐ ٣أ×٤ + ٠ +جـ+ ٣ ⇐ ١٢أ+جـ= -٣

ق″(س) = ٦أس + ٢ب

ق″(٠) = ٢ب = ٠ ⇐ ب = ٠

ق(٠) = ٣ ⇐ ء = ٣

ق(٢) = ⁻١ ⇐ ٨أ+٤ب + ٢جـ + ء = ⁻١

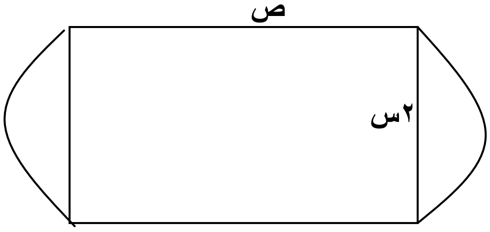
٨أ + ٢جـ = ⁻٤

ق′(٢) = ٠ ⇐ ٣أ×٤+جـ ⇐ ١٢أ+جـ = ٠

وبحل المعادلتين ينتج ان أ= ١/٤ ، جـ= -٣

ق(س) = ١/٤ س^٣ -٣س +٣

السؤال الثاني عشر :



محيط الدائرة = ٢نوπ

= ٢سπ

محيط الشكل = ٢ص + ٢سπ

٤٠٠ = ٢ص + ٢سπ

٢٠٠ = ص + سπ ⇐ ص = ٢٠٠ - πس

مساحة المستطيل = ص + ٢س

م = ص + ٢س = ٢س(٢٠٠ - πس)

م = ٤٠٠س - ٢πس^٢

دم/دس = ٤٠٠ - ٤πس ← دم/دس = ٠ ← س = ١٠٠/π م

د^٢م/دس^٢ |(س=١٠٠/π) = ⁻٤π < ٠ ← **المساحة اكبر ما يمكن عندما س** = ١٠٠/π

الابعاد التي تجعل مساحة المستطيل اكبر ما يمكن هي

طول المستطيل = ٢٠٠ - π × ١٠٠/π = ١٠٠م **و عرض المستطيل =** ٢٠٠/π م

السؤال الثالث عشر:

محيط المثلث الأول $=$ **س ومنه طول الضلع =** $\frac{س}{٣}$ ، **مساحة المثلث الأول** $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}س^{٢}$

محيط المثلث الثاني $= ١٨ -$ **س ومنه طول الضلع =** $\frac{١٨-س}{٣}$ ،

مساحة المثلث الأول $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}(١٨-س)^{٢}$

م= مجموع مساحتيهما $= \frac{\sqrt{٣}}{٣٦}س^{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٣٦}(١٨-س)^{٢}$

$م' = \frac{\sqrt{٣}}{١٨}س - \frac{\sqrt{٣}}{١٨}(١٨-س)$

م

$م' = ٠ \Leftarrow س = ٩$

$م'' = \frac{\sqrt{٣}}{٩} > ٠$ **س=٩ قيمة صغرى محلية**

محيط المثلث الأول =٩سم ومحيط المثلث الثاني=٩ سم وبالتالي طول ضلع كل من المثلثين =٣ سم

حلول الوحدة الثالثة / المصفوفات

تمارين (٣ – ١) صفحة ١٠٤

السؤال الأول:

أ) **لتكن مصفوفة الانتاج هي** $أ = \begin{bmatrix} ٨٠٠ & ٦٠٠ & ٧٥٠ \\ ٩٠٠ & ٤٥٠ & ٦٥٠ \end{bmatrix}$ **وهي من الرتبة** ٢×٣

ب) **مجموع مدخلات العمود الثاني يمثل انتاج فرع طولكرم**

السؤال الثاني:

١) **المصفوفة** $أ$ **من الرتبة** ٤×٣

٢) $أ_{٣١} + أ_{١٢} = -٤ + ٦ = ٢$

٣) **بما أن** $(أ_{٢٣})^{٣} = ٢٧$ **، فإن** $(-س)^{٣} = ٢٧$ **ومنه** $س = -٣$

السؤال الثالث:

بما أن $\begin{bmatrix} ٢ & س^{٢}+١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٥ & س-١ \end{bmatrix}$ **فإن :**

$س^{٢}+١ = ١٠$ **ومنها** $س = \pm ٣$ **، وكذلك** $س - ١ = ٢$ **، ومنه** $س = ٣$ **، أي** $س = ٣$ **فقط**

.

السؤال الرابع

نفرض المصفوفة ب مصفوفةً مربعةً من الرتبة ٢ فتكون مدخلاتها على

النحو $\text{أ}_{\text{ي}\text{ه}} = ٢^{\text{ي}-\text{ه}}$ أي أن $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

السؤال الخامس:

$\text{أ} = \begin{bmatrix} ^{-}٢ & ٥ & ١ \\ ٦ & ^{-}٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فتكون المصفوفة ب من الرتبة ٣×٢ومدخلاتها على

النحو $\text{أ}_{\text{ي}\text{ه}} = \text{ب}_{\text{ه}\text{ي}}$ لجميع قيم ي ، ه

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} -٢ & ٦ \\ ٥ & -٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$$

تدريبات صفحة ١٠٨:

التدريب الأول: أ)

$$\text{ب} + ٢\text{أ} = \begin{bmatrix} -٤ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -٥ & ١٦ \\ ٤ & ١٧ & ١٢ \end{bmatrix}$$

$$٣\text{أ} - ٢\text{ب} = ٣\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix} - ٢\begin{bmatrix} -٤ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & -١١ & ٣ \\ -١ & ٨ & -١٠ \end{bmatrix}$$

ب) $\text{جـ} + \text{د} = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix} = ٩\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = ٩\text{م}_{٢}$

التدريب الثاني:

$$٢\begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - ٣\text{س} = \text{س} + \text{م}_{٢}$$

ومنها $٢\begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - \text{م}_{٢} = ٤\text{س}$ أي أن $\begin{bmatrix} ٢ & -١٠ \\ ١٠ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = ٤\text{س}$

$$\text{س} = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ١ & -١٠ \\ ١٠ & ٣ \end{bmatrix}$$

التدريب الثالث:

نفرض ان $أ = \begin{bmatrix} و & هـ \\ ل & ع \end{bmatrix}$ فيكون

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢و & ٢هـ \\ ٢ل & ٢ع \end{bmatrix}$$

ومنها هـ $= -١$، و $= \frac{٥}{٢}$، ع $= \frac{-١}{٢}$، ل $= \frac{-٣}{٢}$ أي أن $أ = \begin{bmatrix} \frac{٥}{٢} & -١ \\ \frac{-٣}{٢} & \frac{-١}{٢} \end{bmatrix}$

التدريب الرابع: $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} ص + \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix} س$ أي أن $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ص \\ ٥ص \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣س \end{bmatrix}$

ومنها ص $= ٣$ ، س $= -٦$

التدريب الخامس:

$س + ٢ص = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $٣س - ص = \begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ -٥ & ٨ \end{bmatrix}$

$س + ٢ص = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١١ & -٢ \end{bmatrix}$

$٦س - ٢ص = \begin{bmatrix} -١٠ & ٦ \\ -١٠ & ١٦ \end{bmatrix}$ وبحل المعادلتين ينتج $٧س = \begin{bmatrix} -٧ & ٧ \\ -٢١ & ١٤ \end{bmatrix}$ أي أن

$س = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٤ & -٢ \end{bmatrix}$

تمارين (٣ – ٢) صفحة ١١٣

السؤال الأول:

أ) $ب_{٥×٤}$ ب) $ب_{٣×٥}$

السؤال الثاني: أ) أ . ب =

$$\begin{bmatrix} ٢٧ & ٢٤ & ٤٠ \\ ١١ & -١٢ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٦ & ٥ \\ ٧ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$$

ب) جـ . ب =

$$\begin{bmatrix} ٣٠^{-} & ٦ & ١١^{-} \\ ٢٩ & ١٨ & ٣٥ \\ ١٠ & ١٢ & ١٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢^{-} & ٦ & ٥ \\ ٧ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤^{-} & ١ \\ ٥ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

ج) أ^{٢} =

$$\begin{bmatrix} ٢٥ & ٦ \\ ٩^{-} & ١٠^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ٢^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ٢^{-} \end{bmatrix}$$

السؤال الثالث:

$$\begin{bmatrix} ٦٤ & ٢٠ \\ ٣٤^{-} & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤٠ + ص\ س + ١٨ & ٢٥ + ٤س + ٣ \\ ١٦^{-} + ٤ص + ٦^{-} & ٥ \end{bmatrix}$$

من تساوي مصفوفتين ينتج أن:

$٢٠ = ٢٥ + ٤س + ٣$ ، $٣٤^{-} = ١٦^{-} + ٤ص + ٦^{-}$

$٢٠ = ٢٨ + ٤س$ ، $٣٤^{-} = ٢٢^{-} + ٤ص$

$٨^{-} = ٤س$ ، $١٢^{-} = ٤ص$

$٢^{-} = س$ ، $٣^{-} = ص$

السؤال الرابع:

$$\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- & ٣ & ٢ \end{bmatrix} = س$$

$$٥ص = \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \end{bmatrix} ٥ = \begin{bmatrix} ٤٠ & ٣٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٣ & ١١ \end{bmatrix} = س$$

السؤال الخامس: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١^{-} \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، فبيّن أن: أ^{٢} − ب^{٢} ≠ (أ−ب)(أ+ب)

الحل:

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١^{-} \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١^{-} \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} = ^{٢}ب - ^{٢}أ$$

$$(١)\text{------} \begin{bmatrix} ١^{-} & ١ \\ ٩^{-} & ٣^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ١٨ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & ٠ \end{bmatrix} = ^{٢}ب - ^{٢}أ$$

$$\left(\begin{bmatrix}٢ & ١^- \\ ٤ & ١\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}١ & ٢ \\ ٣ & ٠\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}٢ & ١^- \\ ٤ & ١\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}١ & ٢ \\ ٣ & ٠\end{bmatrix}\right) = \text{(أ-ب)(أ+ب)}$$

$$\text{(٢)-----}\begin{bmatrix}٢ & ٢ \\ ١٠^- & ٢^-\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}٣ & ١ \\ ٧ & ١\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١^- & ٣ \\ ١^- & ١^-\end{bmatrix}\right) =$$

من (١)، (٢) ينتج أن:

أ^٢ − ب^٢ ≠ (أ-ب)(أ+ب)

السؤال السادس:

اذا كانت أ^٢ = ب ⇐ $\begin{bmatrix}٠ & ١ \\ ١ & ٥\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٠ & س^٢ \\ ١ & س+١\end{bmatrix}$

فإن س^٢ = ١ وبالتالي س = ±١

أو س + ١ = ٥ ومنها س = ٤

بالتعويض لا توجد أي قيمة لـ س تحقق أن: أ^٢ = ب

مجموعة الحل = ∅

السؤال السابع: أ = $\begin{bmatrix}٢ \\ ٣^-\end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix}٢ & ٣ \\ ٠ & ١\end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix}٠ & ١ \\ ١^- & \sqrt{٣}\end{bmatrix}$

أ) نفرض ء = $\begin{bmatrix}س \\ ص\end{bmatrix}$

أ + ء = ب.ء ⇐ $\begin{bmatrix}س \\ ص\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}٢ & ٣ \\ ٠ & ١\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}س \\ ص\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}٢ \\ ٣^-\end{bmatrix}$

ومنها $\begin{bmatrix}\text{٣س + ٢ص} \\ س\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{٢ + س} \\ \text{٣⁻ + ص}\end{bmatrix}$

ومن تساوي مصفوفتين:

٢ + س = ٣س + ٢ص ، ٣⁻ + ص = س

س + ص = ١ ، −س + ص = ٣

وبحل المعادلتين بالجمع ينتج أن:

٢ص = ٤ ⇐ ص = ٢

$\begin{bmatrix} ١^- \\ ٢ \end{bmatrix} = ء$ وبالتعويض س= –١ ومنها

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١^- & \sqrt{٣} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١^- & \sqrt{٣} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١^- & \sqrt{٣} \end{bmatrix} = {}^{٣}ج$$

$ج = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١^- & \sqrt{٣} \end{bmatrix} م = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١^- & \sqrt{٣} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} =$ ب)

تمارين (٣ – ٣) صفحة ١١٩

السؤال الأول :جد قيمة كل من المحددات الآتية :

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٦ \\ ٣ & ٤^- \end{vmatrix} ٢ + \begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & ٤^- \end{vmatrix} ٣^- + \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} ٤^- = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤^- \\ ١ & ٥ & ٦ \\ ٢ & ٣ & ٤^- \end{vmatrix}$$:أ)

$$٠ = ٧٦ + ٤٨^- + ٢٨^- =$$

$١٢٥ = (١)١٢٥ = \left|م_{٣}\right| {}^{٣}٥ = \left|٥م_{٣}\right|$ ح) $٣٢ = ١٦ + ١٦ = \begin{vmatrix} ٤^- & ٢ \\ ٨ & ٤ \end{vmatrix}$ ب)

السؤال الثاني : بما أن $\begin{vmatrix} ٣ & ١^- & ٢ \\ ٥ & س & ٤ \\ ٣ & ٦ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١^- & س \\ س & ١ \end{vmatrix}$

$$١ + {}^{٢}س = \begin{vmatrix} س & ٤ \\ ٦ & ١ \end{vmatrix} ٣ + \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} ١^- - \begin{vmatrix} ٥ & س \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} ٢$$

$$١ + {}^{٢}س = ٣س - ٧٢ + ٧ + ٦٠ - ٦س \Leftarrow$$

$$٠ = ١٨ - ٣س - {}^{٢}س$$

$$٠ = (٦ - س)(٣ + س)$$

$$٣^- ،٦ = س$$

السؤال الثالث

$$|٣\text{أ}| = ٩|\text{أ}| = ٥٤ \Rightarrow |\text{أ}| = ٦$$

$$|\text{أ}\cdot\text{ب}| = |\text{أ}|.|\text{ب}| = {}^{-}١٢$$

$$\Rightarrow ٦|\text{ب}| = {}^{-}١٢ \Rightarrow |\text{ب}| = {}^{-}٢$$

$$|٢\text{أ}| + |٥\text{ب}| = ٤|\text{أ}| + ٢٥|\text{ب}| = ٢٤ + {}^{-}٥٠ = {}^{-}٢٦$$

السؤال الرابع : إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س} & ٢ \\ ٢ & \text{س} \end{bmatrix}$ **، وكان** $|\text{أ}^{٣}| = ١٢٥$ **، فما قيمة/ قيم س؟**

الحل: $|\text{أ}^{٣}| = ١٢٥ \Rightarrow |\text{أ}|^{٣} = ١٢٥ \Rightarrow |\text{أ}| = ٥$

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{س} & ٢ \\ ٢ & \text{س} \end{vmatrix} = \text{س}^{٢} - ٤ = ٥$ أي أن $\text{س}^{٢} = ٩$ ومنها $\text{س} = \pm ٣$

السؤال الخامس : لمعرفة معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣،٢)، (٥، ٧).

نقوم بايجاد المحدد عن طريق مدخلات العمود الثالث:

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٧ & ١ \end{vmatrix} = ٠ \Rightarrow ١\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} + {}^{-}١\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} + ١\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

$$١١ - ٧\text{س} + ٥\text{ص} + ٢\text{س} - ٣\text{ص} = ٠$$

$$\Rightarrow -٥\text{س} + ٢\text{ص} + ١١ = ٠$$

أو

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٧ & ١ \end{vmatrix} = ٠ \Rightarrow \text{س}\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٧ & ١ \end{vmatrix} + {}^{-}\text{ص}\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} + ١\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\Rightarrow -٥\text{س} + ٢\text{ص} + ١١ = ٠$$

السؤال السادس :

أ) أ) $\begin{vmatrix} ٢ & {}^{-}٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & {}^{-}٤ \\ ١ & ١٠ \end{vmatrix}$ ضرب الصف الأول في (−٢) وإضافته للصف الثاني أي $-٢\,\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢}$

ب) $\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٥ & ١٥ \end{vmatrix} = ٠$ إخراج عامل مشترك من كل من الصفين الأول والثاني فتتساوى المدخلات المتناظرة في الصفين فتصبح قيمته صفرا.

ج) $\begin{vmatrix} ٧ & ٦ \\ ٩ & ١١ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٦ & ٧ \\ ١١ & ٩ \end{vmatrix}$ (تبديل عمود مكان عمود فإن قيمة المحدد تضرب بـ (-١))

السؤال السابع :

أ) $\begin{vmatrix} ب+جـ & أ & ١ \\ أ+ب & جـ & ١ \\ أ+جـ & ب & ١ \end{vmatrix} = ٠$

بجمع العمودين الأول والثاني

$ع_1 \xleftarrow{ع_2 + ع_1}$ $\begin{vmatrix} ب+جـ+أ & أ & ١ \\ أ+ب+جـ & جـ & ١ \\ أ+جـ+ب & ب & ١ \end{vmatrix}$ وبأخذ (أ + ب + جـ) عامل مشترك من $ع_1$ ينتج أن:

$\begin{vmatrix} ١ & أ & ١ \\ ١ & جـ & ١ \\ ١ & ب & ١ \end{vmatrix} = ٠$ لأن به $ع_1 = ع_3$

ب) $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & ١٠ \end{vmatrix} = -٢٠٠$

بما أن المصفوفة هي مصفوفة مثلثية علوية فإن محددها يساوي حاصل ضرب المدخلات على القطر الرئيسي = $٥ \times {}^{-}٤ \times ١٠ = {}^{-}٢٠٠$

تمارين(٣ – ٤) صفحة ١٢٥

السؤال الأول $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ^{-}٨ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$: $|أ| = ٢٤ + ٢٤ = ٤٨ \neq ٠$ لها نظير ضربي.

$ب = \begin{bmatrix} جاس & ٣ \\ ^{-}١ & ١ \end{bmatrix}$ $|ب| =$ جاس $+ ٣ \neq ٠$ لها نظير ضربي.

$جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ $|جـ| = ٩ - ٩ = ٠$ ليس لها نظير ضربي.

$د = \begin{bmatrix} ٢ & ^{-}١ & ٣ \\ ٦ & ^{-}٣ & ٩ \\ ٢ & ٧ & ^{-}١ \end{bmatrix}$

$|د| = ٢(٣ - ٦٣) + ١(^{-}٦ - ١٨) + ٣(٤٢ + ٦) = ^{-}١٢٠ - ٢٤ + ١٤٤ = ٠$

ليس لها نظير ضربي.

السؤال الثاني: $أ = \begin{bmatrix} ك & ك \\ ٤ & ٢ك \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} ك & ٤ \\ ١ & ك \end{bmatrix}$

بما أن أ مصفوفة منفردة اذن محددها يساوي صفرا.

$|أ| = \begin{vmatrix} ك & ك \\ ٤ & ٢ك \end{vmatrix} = ٢ك^{٢} - ٤ك = ٠$

$٢ك(ك - ٢) = ٠ \Leftarrow ك = ٠$ ، ٢

وبما أن ب مصفوفة منفردة اذن محددها يساوي صفرا. $|ب| = \begin{vmatrix} ك & ٤ \\ ١ & ك \end{vmatrix} = ٠$

$ك^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow ك = \pm ٢$

السؤال الثالث: $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ،

$|أ| = \begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٤ \times ٣ - ٢ \times ٥ = ٢$

$$أ^{-1} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٢} & \frac{-٥}{٢} \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$|أ^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{٣}{٢} & \frac{-٥}{٢} \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} = ٣ - \frac{٥}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$(أ^{-1})^{-1} = ٢\begin{bmatrix} ٢ & \frac{٥}{٢} \\ ١ & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = أ$$

السؤال الرابع : $أ = \begin{bmatrix} س & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $|أ^{-1}| = \frac{١}{٥}$

$$|أ| = \frac{١}{|أ^{-1}|} \Leftarrow |أ| = ٥$$

٣ س − ١٠ = ٥ ⇐ ٣ س = ١٥ ⇐ س = ٥

السؤال الخامس: $أ = \begin{bmatrix} س & ^{-}٣ \\ ١ & ص \end{bmatrix}$ ، $|أ^{-1}| = |أ|$

بما أن: $|أ| = \frac{١}{|أ^{-1}|} \Leftarrow |أ| \times |أ^{-1}| = ١$

لكن $|أ| = |أ^{-1}| \Leftarrow |أ|.|أ| = ١ \Leftarrow |أ|^{٢} = ١$

بما أن: $|أ| = س ص + ٣$ إذن $(س ص + ٣)^{٢} = ١$

إما $س ص + ٣ = ١ \Leftarrow س ص = ^{-}٢$

أو $س ص + ٣ = ^{-}١ \Leftarrow س ص = ^{-}٤$

السؤال السادس : $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، أ.جـ = ب .

$$|أ| = ١ \times ٢ - ٤ \times ٣ = ^{-}١٠ \neq ٠$$

الحل: $أ^{-1} = \frac{١}{^{-}١٠}\begin{bmatrix} ٢ & ^{-}٣ \\ ^{-}٤ & ١ \end{bmatrix}$

أ.جـ = ب ⇐ أ غير منفردة

$أ^{-1} . أ . جـ = أ^{-1} . ب$

$م_2 . جـ = أ^{-1} . ب$

$جـ = أ^{-1} . ب$

$جـ^{-1} = \left(أ^{-1} . ب\right)^{-1} = ب^{-1} . أ$

$$جـ^{-1} = ب^{-1} . أ = \begin{bmatrix} ٤^- & ٣ \\ ٣ & ٢^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٦^- \\ ٥^- & ٥ \end{bmatrix}$$

السؤال السابع : لإثبات أن : $\left(ك أ\right)^{-1} = \frac{١}{ك}\left(أ^{-1}\right)$.

نفرض أن: $أ = \begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix}$ ومنها $ك أ = \begin{bmatrix} ك س & ك ص \\ ك ع & ك ل \end{bmatrix}$

$\Leftarrow |ك أ| = ك^2 \left(س ل - ص ع\right) = ك^2 |أ|$

$$\left(ك أ\right)^{-1} = \frac{١}{ك^2 |أ|} \begin{bmatrix} ك ل & -ك ص \\ -ك ع & ك س \end{bmatrix} = \frac{١}{ك |أ|} \begin{bmatrix} ل & -ص \\ -ع & س \end{bmatrix}$$

$$= \frac{١}{ك} \left(\frac{١}{|أ|} \begin{bmatrix} ل & -ص \\ -ع & س \end{bmatrix} \right) = \frac{١}{ك}\left(أ^{-1}\right)$$

السؤال الثامن: بما أن $أ . ب = أ . جـ$ ، بما أن أ غير منفردة ، فإن $أ^{-1}$ موجودة

$$أ . ب = أ . جـ \Leftarrow أ^{-1} . أ . ب = أ^{-1} . أ . جـ$$

$$م . ب = م . جـ \Leftarrow ب = جـ$$

تمارين (٣ – ٥) صفحة ١٣١

السؤال الأول

أ) $س - ص = ٣$

$٢س + ص = ٦$

$$\begin{bmatrix} ١ & ١^- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

$|أ| = ١ \times ١ - ٢ \times {}^{-}١ = ٣ \neq ٠$

$أ^{-١} = \frac{١}{٣}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ {}^{-}٢ & ١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٣}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ {}^{-}٢ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix} = \frac{١}{٣}\begin{bmatrix} ٩ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \end{bmatrix}$

ومنها س= ٣، ص = ٠

ب) $س + ص = ٢$ ، $١٠س + ص = ١١$

$= \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١١ \end{bmatrix}$

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{vmatrix} = -٩$ **فتكون** $أ^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{١٠}{٩} & \frac{-١}{٩} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{-١}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{١٠}{٩} & \frac{-١}{٩} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{١٠}{٩} & \frac{-١}{٩} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ \\ ١١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix}$ **ومنه** $س = ١$ ، $ص = ١$

السؤال الثاني :

أ) $س - ص = ٥$

$س + ٢ص = ٢$

$أ = \begin{bmatrix} ١ & {}^{-}١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \Leftarrow |أ| = ٢ + ١ = ٣$ ، $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٥ & {}^{-}١ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠ + ٢ = ١٢$

$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ - ٥ = {}^{-}٣$

$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{١٢}{٣} = ٤$ ، $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{{}^{-}٣}{٣} = -١$

ب) $\text{س} + \text{ص} = {}^{-}٣$ ،

$٢\text{ص} + \text{س} = {}^{-}٢$

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ \\ -٢ \end{bmatrix}$$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١ \quad ، \quad |\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ -٢ & ٢ \end{vmatrix} = -٤ \quad ، \quad |\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = ١$$

$$\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-٤}{١} = -٤ \quad ، \quad \text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{١}{١} = ١$$

السؤال الثالث : $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{vmatrix}$ ، $|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix}$ ،

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = -١ \text{ ، } |\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} = -٤ \text{ ، } |\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & -٣ \end{vmatrix} = -١$$

$$\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-٤}{-١} = ٤ \quad ، \quad \text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-١}{-١} = ١$$

السؤال الرابع :

أ) $٣\text{س} - \text{ص} = ١$ ، $\text{س} + ٢\text{ص} = ٥$

المصفوفة الممتدة للنظام هي $\bar{\text{أ}} = \left[\begin{array}{cc|c} ٣ & {}^{-}١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right]$ **ونجري العمليات على النحو الآتي:**

$$\left[\begin{array}{cc|c} ٣ & {}^{-}١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{١}{٣}\text{ص}_١} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & {}^{-}\frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right] \xrightarrow{-\text{ص}_١ + \text{ص}_٢} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & {}^{-}\frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ٠ & \frac{٧}{٣} & \frac{١٤}{٣} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{٣}{٧}\text{ص}_٢} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & {}^{-}\frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ٠ & ١ & ٢ \end{array}\right]$$

ومنها تكون $\text{ص} = ٢$ ، **وبالتعويض العكسي** $\text{س} - \frac{١}{٣}(٢) = \frac{١}{٣} \Leftarrow \text{س} = ١$

ب) س − ص + ع = ٦ ، س + ٢ص + ع = ٣ ، ٢س + ص − ع = ٠

نكون المصفوفة الممتدة أً = $\left[\begin{array}{c|ccc} ٦ & ١ & ^{-}١ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ^{-}١ & ١ & ٢ \end{array}\right]$ ونجري العمليات الآتية:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٦ & ١ & ^{-}١ & ١ \\ ^{-}٣ & ٠ & ٣ & ٠ \\ ^{-}١٢ & ^{-}٣ & ٣ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow[\text{−٢ص١+ص٣}]{\text{−ص١+ص٢}} \left[\begin{array}{c|ccc} ٦ & ١ & ^{-}١ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ^{-}١ & ١ & ٢ \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٦ & ١ & -١ & ١ \\ -١ & ٠ & ١ & ٠ \\ -٩ & -٣ & ٠ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow{\text{−٣ص٢+ص٣}} \left[\begin{array}{c|ccc} ٦ & ١ & -١ & ١ \\ -١ & ٠ & ١ & ٠ \\ -١٢ & -٣ & ٣ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow{\frac{١}{٣}\text{ص٢}}$$

ومنها −٣ ع=−٩ ومنها ع= ٣

وبالتعويض العكسي: ص=−١

س+ ١+٣ =٦ ومنها س =٢

تمارين عامة(الوحدة الثالثة) صفحة ١٣٢

السؤال الأول (الموضوعي)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة	جـ	جـ	جـ	ء	أ	ب	ء	ب	ء	أ

السؤال الثاني:

بما أن $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ^{-}١ & ص \\ ^{-}٤ & س \end{vmatrix} = ٧$ ، فإن

$$\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow ٢س - ص = ٧$$

$$\begin{vmatrix} ^{-}١ & ص \\ ^{-}٤ & س \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow -س + ٤ص = ٧$$

وبحل المعادلتين معاً ينتج أن:

س=٥، ص=٣

السؤال الثالث : $أ = \begin{bmatrix} ^{-}٣ & ٥ \\ ^{-}٢ & ٤ \end{bmatrix}$

$$|أ| = {}^{-}١٢ + ١٠ = {}^{-}٢ \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{^{-}٢} \begin{bmatrix} ٤ & ^{-}٥ \\ ٢ & ^{-}٣ \end{bmatrix}$$

أ) $|أ| . أ^{-١} = {}^{-}٢ . \frac{١}{^{-}٢} \begin{bmatrix} ٤ & ^{-}٥ \\ ٢ & ^{-}٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ^{-}٥ \\ ٢ & ^{-}٣ \end{bmatrix}$

ب) $|٣أ| = ٩|أ| = ٩ \times {}^{-}٢ = {}^{-}١٨$

جـ) $(-٢أ)^{-١} = \frac{١}{^{-}٢} أ^{-١} = \frac{١}{^{-}٢} . \frac{١}{^{-}٢} \begin{bmatrix} ٤ & ^{-}٥ \\ ٢ & ^{-}٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{^{-}٥}{٤} \\ \frac{١}{٢} & \frac{^{-}٣}{٤} \end{bmatrix}$

السؤال الرابع : **لإيجاد قيم س التي تجعل** $\begin{vmatrix} ١ & س & ٢ \\ س & ٣ & س \\ ٤ & س & ٥ \end{vmatrix} = -٩.$

فإن : $\begin{vmatrix} ١ & س & ٢ \\ س & ٣ & س \\ ٤ & س & ٥ \end{vmatrix} = -٩ \Leftarrow ١\begin{vmatrix} ٣ & س \\ س & ٥ \end{vmatrix} + {}^{-}س\begin{vmatrix} س & س \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} س & ٣ \\ ٤ & س \end{vmatrix} = -٩$

$$\Leftarrow ١٥ - س^{٢} - س(س) + ٢(س^{٢} - ١٢) = -٩$$

$$\Leftarrow ١٥ - س^{٢} - س^{٢} + ٢س^{٢} - ٢٤ = -٩$$

إذن $-٩ = -٩$

وهذا يعني أن: س هي أي عدد حقيقي.

السؤال الخامس :

أ) لحل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ (باستخدام النظير الضربي)

فإن :

$$٠ \neq {}^{-}٢ = ٦ - ٤ = |أ|$$

$$\begin{bmatrix} ١ & {}^{-}٢ \\ \frac{١}{{}^{-}٢} & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{-}٢ & ٤ \\ ١ & {}^{-}٣ \end{bmatrix} \frac{١}{{}^{-}٢} = {}^{١-}أ$$

$$\begin{bmatrix} {}^{-}٥ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & {}^{-}٢ \\ \frac{١}{{}^{-}٢} & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{-}٢ & ٤ \\ ١ & {}^{-}٣ \end{bmatrix} \frac{١}{{}^{-}٢} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

ومنها س= −٥، ص = ٤

ب) لحل المعادلة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} ١١ & ٣- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & {}^{-}١ & ١ \\ ٤ & ٠ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ {}^{-}٢ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ص & س \end{bmatrix}$$

فإن:

$$\begin{bmatrix} ١١ & ٣- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & {}^{-}٣ & ٣ \\ {}^{-}٨ & ٠ & {}^{-}٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ص & س \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١١ & ٣- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ص٨ − س٩} & \text{س٣ −} & \text{ص٤ − س٣} \end{bmatrix}$$

−٣س = −٣ ⇐ س = ١

٣س − ٤ص = ٤ ⇐ ٣ − ٤ص = ٤ ⇐ ص = $\frac{{}^{-}١}{٤}$

السؤال السادس : $أ = \begin{bmatrix} ٣ & س \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ص & ٤ \\ ٤ & ^-٥ \end{bmatrix}$

بما أن: $أ.أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س ص + ١٢ & ٤س - ١٥ \\ ٥ص + ١٦ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص & ٤ \\ ٤ & ^-٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ & س \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$$

ومنها ٤س − ١٥ = ١ ⇐ س = ٤

٥ ص + ١٦ = ١ ⇐ ص = − ٣

السؤال السابع : $أ \times ب = و$ ،

نفرض أن : كلا من المصفوفتين لها نظير ضربي وليكن $أ^{-١}$ ، $ب^{-١}$

بما أن : $أ \times ب = و \Leftarrow أ^{-١}(أ.ب) = أ^{-١}.و = و$

أي أن $(أ^{-١}.أ).ب = م.ب = و$

كما أن $(أ.ب).ب^{-١} = و.ب^{-١} = و$ ونستنتج أن $أ = و$

وهذا يناقض الفرض بأن إحدى المصفوفتين على الأقل منفردة .

السؤال الثامن :

أ) $أ = \begin{bmatrix} ^-١ & ن \\ ١ & ك \end{bmatrix}$ ، $\Leftarrow |أ_س| = \begin{vmatrix} ^-١ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ ، $|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٥ & ن \\ ٣ & ك \end{vmatrix}$

ومنها $ن = ٦$ ، $ك = ٢ \Leftarrow |أ| = \begin{vmatrix} ^-١ & ٦ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٦ + ٢ = ٨$

ب) $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{٨}{٨} = ١$ ، $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{٨}{٨} = ١$

السؤال التاسع :

$$|\text{أ}^{-١}| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ - ٢ = ١ \Leftarrow \text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\text{أ}^{٢} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & -٨ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$|\text{أ}^{٢}| = ٣٣ - ٣٢ = ١ \Leftarrow (\text{أ}^{٢})^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٤ & ١١ \end{bmatrix}$$

$$(\text{أ}^{-١})^{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٤ & ١١ \end{bmatrix}$$

ألاحظ أن: $(\text{أ}^{٢})^{-١} = (\text{أ}^{-١})^{٢}$

السؤال العاشر : لحل المعادلتين بطريقة كريمر : ٣س+ ٢ ص= −٤ ، ٥ ص + س = ٣(نرتب أولا)

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} \Leftarrow |\text{أ}| = ١٥ - ٢ = ١٣$$

$$|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} -٤ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = -٢٠ - ٦ = -٢٦ \qquad \text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-٢٦}{١٣} = -٢$$

$$|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ + ٤ = ١٣ \text{ ، } \text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{١٣}{١٣} = ١$$

السؤال الحادي عشر : لحل النظام الآتي بطريقة جاوس :

$$\text{س} - \text{ص} + ٤\text{ع} = ٩ \text{ ، } ٢\text{س} + ٣\text{ص} + ٢\text{ع} = ٢ \text{ ، } ٣\text{ص} + \text{س} - \text{ع} = -٤$$

نكون المصفوفة ال ممتدة أ $= \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ٤ & ٩ \\ ٢ & ٣ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٣ & -١ & -٤ \end{array}\right]$ ونجري العمليات الآتية:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & ٤ & ١^{-} & ١ \\ ١٦^{-} & ٦^{-} & ٥ & ٠ \\ ١٣^{-} & ٥^{-} & ٤ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow[\text{−ص١+ص٣}]{\text{−٢ص١+ص٢}} \left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & ٤ & ١^{-} & ١ \\ ٢ & ٢ & ٣ & ٢ \\ ٤^{-} & ١^{-} & ٣ & ١ \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & ٤ & ١^{-} & ١ \\ \frac{١٦^{-}}{٥} & \frac{٦^{-}}{٥} & ١ & ٠ \\ ١٣^{-} & ٥^{-} & ٤ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow{\frac{١}{٥}\text{ص٢}}$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \frac{٢٩}{٥} & \frac{١٤}{٥} & ٠ & ١ \\ \frac{١٦^{-}}{٥} & \frac{٦^{-}}{٥} & ١ & ٠ \\ \frac{١^{-}}{٥} & \frac{١^{-}}{٥} & ٠ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow[\text{−٤ص٢+ص٣}]{\text{ص٢+ص١}}$$

ومنها $\frac{١^{-}}{٥}$ ع = $\frac{١^{-}}{٥}$ ومنها ع = ١

وبالتعويض العكسي: ص + $\frac{٦^{-}}{٥}$ ع = $\frac{١٦^{-}}{٥}$ ⇐ ص = −٢

س+ $\frac{١٤}{٥}$ ع = $\frac{٢٩}{٥}$ ⇐ س =٣

السؤال الثاني عشر : $\left|\begin{array}{ccc} ١١ & ٢ & س \\ ٩ & −٤ & ٠ \\ \frac{١}{٢}س & ٠ & ٠ \end{array}\right| = −٥٠$

حسب خصائص المحددات فإن محدد المصفوفة القطرية العلوية يساوي حاصل ضرب مدخلات

القطر الرئيسي أي أن $س \times −٤ \times \frac{١}{٢}س = −٥٠$ ومنها $س^{٢} = ٢٥$ أي أن $س = \pm ٥$

اجابات الفصل الثاني

الفرع العلمي والصناعي

حلول الوحدة الرابعة

تمارين ومسائل (٤−١) صفحة ١٤٢

السؤال الاول

أ) $\text{م(س)} = \frac{١}{٣}(٢ + \text{س}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$ ، $\text{ن(س)} = \text{س}\sqrt{٢ + \text{س}^{٢}}$

$\text{م}'\text{(س)} = \frac{١}{٢}(٢ + \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}}(٢\text{س}) = \text{س}\sqrt{٢ + \text{س}^{٢}} = \text{ن(س)}$

أي أن م(س) اقتران أصلي للاقتران ن(س)

ب) $\text{م(س)} = \text{قا}^{٣}\text{س}$ ، $\text{ن(س)} = ٣\text{قا}^{٢}\text{س ظاس}$

$\text{م}'\text{(س)} = ٣\text{قا}^{٢}\text{س قاس ظاس} = ٣\text{قا}^{٣}\text{س ظاس} \neq \text{ن(س)}$

أي أن م(س) ليس اقترانا أصليا للاقتران ن(س)

ج) $\text{م(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٣} + \text{هـ}^{٢\text{س}}\right)$ ، $\text{ن(س)} = \dfrac{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{س}^{٣} + \text{هـ}^{٢\text{س}}}$

$\text{م}'\text{(س)} = \dfrac{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{س}^{٣} + \text{هـ}^{٢\text{س}}} = \text{ن(س)}$

أي أن م(س) اقتران أصلي للاقتران ن(س)

السؤال الثاني:

بما أن م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين فإن م(٣) − هـ(٣) = جـ

ومنها م(٣) − هـ(٣) = ٣ − ٤ = −١ = جـ

$\text{هـ(س)} = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٦ - {}^{-}١ = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٧$

هـ(١) = ١ − ٤ + ٧ = ٤

السؤال الثالث:

$(٣\text{م} - \text{هـ})'(٤) = ٣\text{م}'(٤) - \text{هـ}'(٤) = ٣ \times ٧ - ٧ = ١٤$

لأن $\text{م}'(٤) = \text{هـ}'(٤) = \text{ن}(٤) = ٧$ حيث ن(س) متصل عند س = ٤

السؤال الرابع:

بما أن $م(س)$ **هو احد الاقترانات الأصلية للاقتران المتصل** $ن(س)$ **فإن** $م^{\prime}(س) = ن(س)$

$م^{\prime}(س) = ٢(قا^{٢}س - قاس ظاس)$

$$= ٢(قا^{٢}س - قاس ظاس) = ٢(\frac{١}{جتا^{٢}س} - \frac{جاس}{جتا^{٢}س}) = ٢(\frac{١-جاس}{جتا^{٢}س})$$

$$= ٢(\frac{١-جاس}{جتا^{٢}س}) = ٢(\frac{١-جاس}{١-جا^{٢}س}) = ٢(\frac{١-جاس}{(١+جاس)(١-جاس)}) = \frac{٢}{(١+جاس)} = ن(س) \text{ ومـ}$$

نها يكون $أ = ٢$

السؤال الخامس:

$\int ق(س)\,ءس = أس^{٣} + جـس$ **وباشتقاق الطرفين ينتج** $ق(س) = ٣أس^{٢} + جـ$

بما أن $ق(-١) = ٤$ **فإن** $٣أ + جـ = ٤$ **..........(١)**

كذلك $ق^{\prime}(س) = ٦أس$ ، **وبما أن** $ق^{\prime}(٢) = ٢٤$ **فإن** $١٢أ = ٢٤$ **.......(٢)**

وبحل المعادلتين ينتج أن $أ = ٢$ ، $جـ = -٢$

تمارين ومسائل (٤-٢) صفحة ١٤٦

السؤال الأول

أ) $\int ٨\,ءس = ٨س + جـ$

ب) $\int (٧س^{٢} - ٤س + \frac{٣}{س^{٤}})\,ءس = \int (٧س^{٢} - ٤س + ٣س^{-٤})\,ءس$

$$= \frac{٧}{٣}س^{٣} - ٢س^{٢} + \frac{-١}{س^{٣}} + جـ$$

ج) $\int (٣ + س)\sqrt{س}\,ءس = \int (٣س^{\frac{١}{٢}} + س^{\frac{٣}{٢}})\,ءس = ٢س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

د) $\int (٥س + قاس ظاس)\,ءس = \frac{٥}{٢}س^{٢} + قاس + جـ$

هـ) $\int \frac{س - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١}\,ءس = \int \frac{(\sqrt[٣]{س} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{١}{٣}} + ١)}{\sqrt[٣]{س} - ١}\,ءس$

$$= \frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}} + \frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + س + جـ$$

و) $\int \frac{\text{٢س}^{٣} + \text{٥س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \int (\text{٢س} + ٥ - \text{س}^{-٢})\,\text{ءس} = \text{س}^{٢} + \text{٥س} + \frac{١}{\text{س}} + \text{جـ}$

ز) $\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$

حـ) $\int (\text{٥هـ}^{\text{س}} + \frac{٢}{\text{س}})\,\text{ءس} = \int (\text{٥هـ}^{\text{س}} + \frac{٢}{\text{س}})\,\text{ءس} = \text{٥هـ}^{\text{س}} + \text{٢لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

السؤال الثاني:

بتكامل الطرفين $\int (\text{ق}'(\text{س}) + \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{ءس} = \int \text{جتاس}\,\text{ءس}$

ومنها $\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}^{\text{س}} = \text{جاس} + \text{جـ}$ **أي أن** $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

وبما أن $\text{ق}(٠) = -١$ **فإن** $\text{جـ} = ٠$ **ومنها** $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس} - \text{هـ}^{\text{س}}$

السؤال الثالث:

$\int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{جاس} - \text{جتاس} + ٢$ **وباشتقاق الطرفين ينتج أن:**

$\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس} + \text{جاس}$ **ومنها** $\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جاس} + \text{جتاس}$

$\text{ق}(\frac{\pi}{٢}) - \text{ق}'(\frac{\pi}{٢}) = (\text{جتا}\frac{\pi}{٢} + \text{جا}\frac{\pi}{٢}) - (-\text{جا}\frac{\pi}{٢} + \text{جتا}\frac{\pi}{٢}) = ٢$ **وهو المطلوب.**

السؤال الرابع:

بما أن $\int (\text{ق}'(\text{س}) + \text{س}^{٢})\,\text{ءس} = \text{٢س}^{٣} + \text{جـس}^{٢} + ٢$ **فإن**

$\text{ق}(\text{س}) + \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \text{جـ}_{٢} = \text{٢س}^{٣} + \text{جـس}^{٢} + ٢$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٥}{٣}\text{س}^{٣} + \text{جـس}^{٢} + ٢ - \text{جـ}_{٢}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{٥س}^{٢} + \text{٢جـس}$

$\text{ق}'(١) = ٥ + \text{٢جـ} = ٤$ **ومنها** $\text{جـ} = \frac{-١}{٢}$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٥}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢ - \text{جـ}_{٢}$

لكن $\text{ق}(٢) = \frac{٤٠}{٣} - ٢ + ٢ - \text{جـ}_{٢} = ٦$ **ومنها** $\text{جـ}_{٢} = \frac{٢٢}{٣}$

فيكون $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٥}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \frac{١٦}{٣}$ ، $\text{ق}(-١) = \frac{-٥}{٣} - \frac{١}{٢} - \frac{١٦}{٣} = \frac{-١٥}{٢}$

تمارين ومسائل (٤-٣) صفحة ١٥١

السؤال الأول:

ميل المماس = ق′(س) = س(٣س − ٢) = ٣س^{٢} − ٢س

∫ق′(س)ءس = ∫(٣س^{٢} − ٢س)ءس ومنها

ق(س) = س^{٣} − س^{٢} + جـ ، لكن ق(٢) = ٥ فيكون ٥ = ٨ − ٤ + جـ ومنها جـ = ١

فيصبح ق(س) = س^{٣} − س^{٢} + ١

السؤال الثاني:

بما أن س + ص = ٤ هو مماس لمنحنى ق(س) عندما س = ١ فإن ق′(١) = −١ (ميل المماس)

أي أن أ − ٣ = −١ ومنها أ = ٢ فيصبح هـ′(س) = ٢س − ٣س^{٢}

∫هـ′(س) = ∫(٢س − ٣س^{٢})ءس ومنها هـ(س) = س^{٢} − س^{٣} + جـ

لكن نقطة التماس هي (١،٣) ومنها هـ(س) = س^{٢} − س^{٣} + ٣

السؤال الثالث:

ميل المماس = ق′(س) = ٢√أ س

∫ق′(س)ءس = ∫٢√أ س ءس ومنها ق(س) = √أ س^{٢} + جـ

وبما أن ق(٠) = ٠ فإن جـ = ٠ ، كما أن ق(١) = ٢ فإن ٢ = √أ أي أن أ = ٤

فيصبح ق(س) = ٢س^{٢}

السؤال الرابع:

ق′(س) = ∫ق″(س)ءس = ∫جتاس ءس = جاس + جـ

وبما أن ق′(π) = ٢ فإن جـ = ٢ وتصبح ق′(س) = جاس + ٢

كما أن ق(س) = ∫ق′(س)ءس = ∫(جاس + ٢)ءس = −جتاس + ٢س + ء

لكن ق(π) = ١ فيكون ق(π) = ١ + ٢π + ء = ١ ومنها ء = −٢π فيكون

ق(س) = −جتاس + ٢س − ٢π

السؤال الخامس:

ت $= \frac{دع}{دن} =$ ن ومنها $\int$ دع $= \int$ ن دن

أي أن ع $= \frac{١}{٢}$ن^{٢}+جـ وبما أن سرعته الابتدائية مقدارها ٣ م/ ث، فإن جـ = ٣

فيكون ع $= \frac{١}{٢}$ن^{٢} + ٣، ويكون ع(٥) $= \frac{٢٥}{٢} + ٣ = \frac{٣١}{٢}$م/ث

كما أن ع $= \frac{دف}{دن} = \frac{١}{٢}$ن^{٢} + ٣ ومنها دف $= (\frac{١}{٢}$ن^{٢} + ٣)دن وبتكامل الطرفين ينتج:

ف $= \frac{١}{٦}$ن^{٣} + ٣ن + ى وبما أن ف(٠) = ٠ فيكون ف $= \frac{١}{٦}$ن^{٣} + ٣ن

ف(٥) $= \frac{١٢٥}{٦} + ١٥ = \frac{٢١٥}{٦}$مترا

السؤال السادس:

نفرض حجم الوعاء ع فيكون $\frac{دع}{دن} =$ ٢ن + ٥٠ ومنها $\int$ دع $= \int$(٢ن + ٥٠)دن وينتج

أن ع = ن^{٢} + ٥٠ن+جـ

وبما أنه فارغ فإن ع(٠) = ٠ فيكون ع = ن^{٢} + ٥٠ن ولمعرفة الزمن اللازم لملء الوعاء

يكون ١٤٠٠ = ن^{٢} + ٥٠ن وبحل المعادلة ينتج أن ن = ٢٠ ثانية .

أي أن الوعاء يمتلئ بعد ٢٠ ثانية .

السؤال السابع:

ميل المماس = ق$'$(س) $= \left(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right)$ ومنها

$\int$ ق$'$(س)دس $= \int \left(س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}\right)$دس

وينتج أن ق(س) $= \frac{٢}{٣}$س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٢س$^{\frac{١}{٢}}$+جـ وبما أنه يمر بالنقطة (١، $\frac{٢}{٣}$) فإن :

$\frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$ + ٢+جـ، أي أن جـ = −٢ فيكون ق(س) $= \frac{٢}{٣}$س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٢س$^{\frac{١}{٢}}$ − ٢

السؤال الثامن:

نفرض ف : ازاحة الجسم عن قمة البرج فيكون $ع = \frac{ءف}{ءن} = -١٠ن + ٤٠$ **ومنها**

$\int ءف = \int (-١٠ن + ٤٠) ءن$

أي أن $ف = -٥ن^{٢} + ٤٠ن + جـ$ **، لكن** $ف(٠) = ٠$

فيكون $ف = -٥ن^{٢} + ٤٠ن$ **وعندما** $ف = -٤٥$ **فإن الجسم يصل الأرض ومنها**

$ف = -٥ن^{٢} + ٤٠ن = -٤٥$ **أي أن** $٥ن^{٢} - ٤٠ن - ٤٥ = ٠$ **ومنها** $ن = ٩$ **ثانية**

السؤال التاسع: $(س ص + س) ءص = ءس$

ومنها يكون $س(ص + ١) ءص = ءس$

أي أن $(ص + ١) ءص = \frac{١}{س} ءس$ **ومنها** $\int (ص + ١) ءص = \int \frac{١}{س} ءس$

فينتج $\frac{١}{٢} ص^{٢} + ص = لـو_{هـ} |س| + جـ$

لكن عندما $س = ١$ ، $ص = ٢$ **فإن** $جـ = ٤$

فيكون $\frac{١}{٢} ص^{٢} + ص = لـو_{هـ} |س| + ٤$ **ونجد ص بإكمال المربع في ص**

تمارين (٤-٤ أ) صفحة ١٥٦

السؤال الاول:

أ) $\int \frac{٤}{(س + ٢)^{٥}} ءس = \int ٤(س + ٢)^{-٥} ءس = -(س + ٢)^{-٤} + جـ$

ب) $\int (١ - س) جا(س^{٢} - ٢س) ءس$

نفرض $ص = (س^{٢} - ٢س)$ **فيكون** $ءص = (٢س - ٢) ءس$ **ومنها** $ءس = \frac{ءص}{(٢س - ٢)}$

$\int (١ - س) جا(س^{٢} - ٢س) ءس = \int (١ - س) جاص \frac{ءص}{٢(س - ١)}$

$= \frac{-١}{٢} \int جاص ءص = \frac{١}{٢} جتاص + جـ = \frac{١}{٢} جتا(س^{٢} - ٢س) + جـ$

ج) $\int \frac{لـو_{هـ} س}{س} ءس$

نفرض $ص = لـو_{هـ} س$ **ومنها** $ءص = \frac{١}{س} ءس$ ، **أي أن** $س ءص = ءس$

$\int \frac{لـو_{هـ} س}{س} ءس = \int \frac{ص}{س} س ءص = \frac{ص^{٢}}{٢} + جـ = \frac{(لـو_{هـ} س)^{٢}}{٢} + جـ$

د) $\int (\text{س}^{٢} + ٢)\sqrt{\text{س}+١}\ \text{ءس}$

نفرض ص = س + ١ **فيكون** ءص = ءس **ويكون**

$\int (\text{س}^{٢} + ٢)\sqrt{\text{س}+١}\ \text{ءس} = \int (\text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} + ٣)\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\ \text{ءص} = \int (\text{ص}^{\frac{٥}{٢}} - ٢\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + ٣\text{ص}^{\frac{١}{٢}})\ \text{ءص}$

$= \frac{٢}{٧}\text{ص}^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٤}{٥}\text{ص}^{\frac{٥}{٢}} + ٢\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \frac{٢}{٧}(\text{س}+١)^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٤}{٥}(\text{س}+١)^{\frac{٥}{٢}} + ٢(\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

هـ) $\int (\text{س}+٢)^{٢}(\text{س}-١)^{٦}\ \text{ءس}$

نفرض ص = س − ١ **فيكون** ءص = ءس

$\int (\text{س}+٢)^{٢}(\text{س}-١)^{٦}\ \text{ءس} = \int (\text{ص}+٣)^{٢}\text{ص}^{٦}\ \text{ءص}$

$= \int (\text{ص}^{٨} + ٦\text{ص}^{٧} + ٩\text{ص}^{٦})\ \text{ءص} = \frac{\text{ص}^{٩}}{٩} + \frac{٦\text{ص}^{٨}}{٨} + \frac{٩\text{ص}^{٧}}{٧} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{س}-١)^{٩}}{٩} + \frac{٦(\text{س}-١)^{٨}}{٨} + \frac{٩(\text{س}-١)^{٧}}{٧} + \text{جـ}$

و) $\int \text{جتا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس} = \int (\text{جتا}^{٢}\text{س})^{٢}\ \text{ءس}$

$= \int (\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س})^{٢}\ \text{ءس} = \int (\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٤}\text{جتا}^{٢}٢\text{س})\ \text{ءس} =$

$= \int (\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٤}\text{جتا}^{٢}٢\text{س})\ \text{ءس} = \int (\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨}\text{جتا}٤\text{س})\ \text{ءس}$

$\int (\frac{٣}{٨} + \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٨}\text{جتا}٤\text{س})\ \text{ءس} = \frac{٣}{٨}\text{س} + \frac{١}{٤}\text{جا}٢\text{س} + \frac{١}{٣٢}\text{جا}٤\text{س} + \text{جـ}$

ز) $\int \frac{١}{١+\text{جاس}}\ \text{ءس} = \int \frac{١-\text{جاس}}{(١+\text{جاس})(١-\text{جاس})}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{١-\text{جاس}}{(١-\text{جا}^{٢}\text{س})}\ \text{ءس} = \int \frac{١-\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \int (\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{قاس ظاس})\ \text{ءس}$

$= \text{ظاس} - \text{قاس} + \text{جـ}$

ح) $\int \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{٢\text{س}}}\ \text{ءس} = \int \frac{(\text{هـ}^{\text{س}})^{٢}}{\text{هـ}^{\text{س}} + (\text{هـ}^{\text{س}})^{٢}}\ \text{ءس} =$

$\int \frac{(\text{هـ}^{\text{س}})^{٢}}{\text{هـ}^{\text{س}}(١+\text{هـ}^{\text{س}})}\ \text{ءس} = \int \frac{(\text{هـ}^{\text{س}})}{(١+\text{هـ}^{\text{س}})}\ \text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(١+\text{هـ}^{\text{س}}) + \text{جـ}$

السؤال الثاني:

أ) $\int \sqrt{\frac{\text{س}+1}{\text{س}^5}}\,\text{ءس} = \int \frac{1}{\text{س}^2}\sqrt{1+\frac{1}{\text{س}}}\,\text{ءس}$

نفرض $\text{ص} = 1 + \frac{1}{\text{س}}$ **فيكون** $-\text{س}^2\,\text{ءص} = \text{ءس}$

ومنها $\int \frac{1}{\text{س}^2}\sqrt{1+\frac{1}{\text{س}}}\,\text{ءس} = \int \frac{1}{\text{س}^2}\,\text{ص}^{\frac{1}{2}}(-\text{س}^2)\,\text{ءص}$

$= -\int \text{ص}^{\frac{1}{2}}\,\text{ءص} = -\frac{2}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}} + \text{جـ} = -\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$

ب) $\int \frac{1}{\text{س}^2}\,\text{جا}\frac{1}{\text{س}}\,\text{ءس}$

نفرض $\text{ص} = \frac{1}{\text{س}}$ ، **فيكون** $-\text{س}^2\,\text{ءص} = \text{ءس}$

$\int \frac{1}{\text{س}^2}\,\text{جا}\frac{1}{\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{1}{\text{س}^2}\,\text{جاص} \times -\text{س}^2\,\text{ءص} = -\int \text{جاص ءص} = \text{جتاص} + \text{جـ} = \text{جتا}\frac{1}{\text{س}} + \text{جـ}$

ج) $\int (\text{جاس} + \text{قتاس})^2\,\text{ءس} = \int (\text{جا}^2\text{س} + 2 + \text{قتا}^2\text{س})\,\text{ءس} = \int \text{جا}^2\text{س}\,\text{ءس} + 2\text{س} - \text{ظتاس} + \text{جـ}$

لكن $\int \text{جا}^2\text{س}\,\text{ءس} = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا}2\text{س}\right)\text{ءس} = \frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س}$

$\int (\text{جاس} + \text{قتاس})^2\,\text{ءس} = \frac{5}{2}\text{س} - \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س} - \text{ظتاس} + \text{جـ}$

د) $\int \frac{(\text{س}+2)^5}{\text{س}^7}\,\text{ءس} = \int \frac{(\text{س}+2)^5}{\text{س}^5 \times \text{س}^2}\,\text{ءس} = \int \frac{\left(\frac{\text{س}+2}{\text{س}}\right)^5}{\text{س}^2}\,\text{ءس} = \int \frac{\left(1+\frac{2}{\text{س}}\right)^5}{\text{س}^2}\,\text{ءس}$

نفرض $\text{ص} = 1 + \frac{2}{\text{س}}$ **ومنها يكون** $-\text{س}^2\,\text{ءص} = 2\text{ءس}$

أي أن $\int \frac{(\text{س}+2)^5}{\text{س}^7}\,\text{ءس} = \int \frac{\left(1+\frac{2}{\text{س}}\right)^5}{\text{س}^2}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{ص}^5}{\text{س}^2} \times \frac{-\text{س}^2}{2}\,\text{ءص}$

$= \frac{-1}{2}\int \text{ص}^5\,\text{ءص} = \frac{-1}{12}\text{ص}^6 + \text{جـ} = \frac{-1}{12}\left(1+\frac{2}{\text{س}}\right)^6 + \text{جـ}$

هـ) $\int \text{س}^2(\text{س}^7 + \text{س}^3)^{\frac{1}{3}}\,\text{ءس} = \int \text{س}^2(\text{س}^3(\text{س}^4+1))^{\frac{1}{3}}\,\text{ءس} = \int \text{س}^3(\text{س}^4+1)^{\frac{1}{3}}\,\text{ءس}$

نفرض $\text{ص} = 1 + \text{س}^4$ **فيكون** $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{4\text{س}^3}$

ومنها $\int \text{س}^2(\text{س}^7 + \text{س}^3)^{\frac{1}{3}}\,\text{ءس} = \int \text{س}^3(\text{س}^4+1)^{\frac{1}{3}}\,\text{ءس} = \frac{1}{4}\int \text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\text{ءص} = \frac{3}{16}(\text{س}^4+1)^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$

و) $\int \text{ظا}^{٣}\text{س}\,\text{ءس} = \int \text{ظاس ظا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} = \int \text{ظاس}(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)\,\text{ءس} = \int \text{ظاس قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} - \int \text{ظاس}\,\text{ءس}$

نفرض ص = ظاس **ومنها** $\text{ءس} = \dfrac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ **فيكون**

$\int \text{ظا}^{٣}\text{س}\,\text{ءس} = \int \text{ظاس قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} - \int \text{ظاس}\,\text{ءس} = \int \text{ص}\,\text{ءص} - \int \text{ظاس}\,\text{ءس} = \dfrac{\text{ص}^{٢}}{٢} + \text{لـو}_{هـ}|\text{جتاس}| + \text{جـ}$

$= \dfrac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢} + \text{لـو}_{هـ}|\text{جتاس}| + \text{جـ}$

تمارين (٤ – ٤ ب) صفحة ١٦٠

السؤال الاول:

أ) $\int \text{س لـو}_{هـ}\text{س}\,\text{ءس}$

نفرض أن: $\text{ن} = \text{لـو}_{هـ}\text{س}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{س}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ءن} = \dfrac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{٢}$

$\int \text{س لـو}_{هـ}\text{س}\,\text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{٢}\text{لـو}_{هـ}\text{س} - \int \dfrac{١}{\text{س}} \times \dfrac{\text{س}^{٢}}{٢}\,\text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{٢}\text{لـو}_{هـ}\text{س} - \dfrac{\text{س}^{٢}}{٤} + \text{جـ}$

ب) $\int \text{س قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}$

نفرض أن: $\text{ن} = \text{س}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ءن} = \text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \text{ظاس}$

$\int \text{س قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} = \text{س ظاس} - \int \text{ظاس}\,\text{ءس} = \text{س ظاس} + \text{لـو}_{هـ}|\text{جتاس}| + \text{جـ}$

ج) $\int \text{لـو}_{هـ}(\text{س}+٢)^{٣}\,\text{ءس} = \int ٣\,\text{لـو}_{هـ}(\text{س}+٢)\,\text{ءس}$

نفرض أن: $\text{ن} = ٣\,\text{لـو}_{هـ}(\text{س}+٢)$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{ءس}$

$\therefore \text{ءن} = \dfrac{٣}{\text{س}+٢}\,\text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \text{س}$

$\int \text{لـو}_{هـ}(\text{س}+٢)^{٣}\,\text{ءس} = ٣\text{س}\,\text{لـو}_{هـ}(\text{س}+٢) - \int \dfrac{٣\text{س}}{\text{س}+٢}\,\text{ءس}$

$$= \text{٣س لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢) - \int \left(\frac{\text{٣س}+٦}{\text{س}+٢} - \frac{٦}{\text{س}+٢} \right) \text{ءس}$$

$$= \text{٣س لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢) - ٣\int \frac{\text{س}+٢}{\text{س}+٢}\,\text{ءس} + \int \frac{٦}{\text{س}+٢}\,\text{ءس}$$

$$= \text{٣س لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢| - \text{٣س} + \text{٦لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢| + \text{جـ}$$

د) $\int \text{س جا٢س ءس}$

نفرض أن: $\text{ق} = \text{س}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{جا٢س ءس}$

$\therefore \text{ءق} = \text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = -\frac{١}{٢}\text{جتا٢س}$

$$\int \text{س جا٢س ءس} = -\frac{١}{٢}\text{س جتا٢س} + \frac{١}{٢}\int \text{جتا٢س ءس} = -\frac{١}{٢}\text{س جتا٢س} + \frac{١}{٤}\text{جا٢س} + \text{جـ}$$

هـ) $\int \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٢} \times \text{س هـ}^{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس}$

نكامل بالتعويض بفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١$ **ومنها** $\frac{\text{ءص}}{\text{٢س}} = \text{ءس}$

$$\int \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٢} \times \text{س هـ}^{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٢} \times \text{س هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{٢س}}$$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{ص}-١) \times \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$ **وهنا نكامل بالأجزاء**

نفرض أن: $\text{ق} = \frac{١}{٢}(\text{ص}-١)$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$

$\therefore \text{ءق} = \frac{١}{٢}\text{ءص}$ $\qquad$ $\text{ع} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$$\int \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس} = \frac{١}{٢}(\text{ص}-١)\text{هـ}^{\text{ص}} - \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١} - \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١} + \text{جـ}$$

و) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}+١}\,\text{ءس}$

نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}+١}$ **ومنها** $\text{٢ص ءص} = \text{ءس}$

$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}+١}\,\text{ءس} = \int \text{٢ص جاص ءص}$ **ثم نكامل بالأجزاء**

نفرض أن: $\text{ق} = \text{٢ص}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{جاص ءص}$

$\therefore \text{ءق} = \text{٢ءص}$ $\qquad$ $\text{ع} = -\text{جتاص}$

$$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}+1}\,\text{ءس} = \int 2\text{ص}\,\text{جاص}\,\text{ءص} = -2\text{ص}\,\text{جتاص} + 2\,\text{جاص} + \text{جـ}$$
$$= -2\sqrt{\text{س}+1}\;\text{جتا}\sqrt{\text{س}+1} + 2\,\text{جا}\sqrt{\text{س}+1} + \text{جـ}$$

ز) $\int \frac{2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2}\,\text{ءس} = \int 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,(\text{س}+1)^{-2}\,\text{ءس}$

نفرض أن: $\text{ن} = 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ $\qquad$ $\text{ءع} = (\text{س}+1)^{-2}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ءن} = (2\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}})\,\text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \frac{-1}{\text{س}+1}$

$$\int \frac{2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2}\,\text{ءس} = \int 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}(\text{س}+1)^{-2}\,\text{ءس} = \frac{-2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \int \frac{(2\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}})}{\text{س}+1}\,\text{ءس}$$
$$= \frac{-2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \int \frac{(2\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}})}{\text{س}+1}\,\text{ءس}$$
$$= \frac{-2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \int \frac{2\text{هـ}^{\text{س}}(1+\text{س})}{\text{س}+1}\,\text{ءس} = \frac{-2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + 2\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$$

ح) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{ءس} = \int \frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,\text{ءس}$

نفرض أن: $\text{ن} = \frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{جا}2\text{س}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ءن} = \frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = -\frac{1}{2}\text{جتا}2\text{س}$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{ءس} = \int \frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,\text{ءس} = -\frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س} + \int \frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س}\,\text{ءس}$$

ثم نكامل بالأجزاء مرة أخرى للمقدار $\int \frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س}\,\text{ءس}$

نفرض أن: $\text{ن} = \frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{جتا}2\text{س}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ءن} = \frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{ءس} = \int \frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,\text{ءس} = -\frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{8}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س} - \int \frac{1}{8}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,\text{ءس}$$

ومنها $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,\text{ءس} = -\frac{2}{5}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{5}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س} + \text{جـ}$

ط) $\int \text{هـ}^{\text{س}}(\text{قتاس} - \text{قتاس}\,\text{ظتاس})\,\text{ءس} = \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{قتاس}\,\text{ءس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{قتاس}\,\text{ظتاس}\,\text{ءس}$

نفرض أن: $\text{ن} = \text{قتاس}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ءن} = -\text{قتاس}\,\text{ظتاس}\,\text{ءس}$

$$\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}} \int \text{هـ}^{\text{س}} (\text{قتاس} - \text{قتاس ظتاس})\, \text{ءس} = \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{قتاس ءس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{قتاس ظتاس ءس}$$

$$= \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{قتاس} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{قتاس ظتاس ءس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{قتاس ظتاس ءس}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}} (\text{قتاس} - \text{قتاس ظتاس})\, \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{قتاس} + \text{جـ}$$

ي) $\int \frac{١}{\text{س}^{٣}}\, \text{جتا}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) \text{ءس}$

نفرض $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ **ومنها** $-\text{س}^{٢}\, \text{ءص} = \text{ءس}$

$$\int \frac{١}{\text{س}^{٣}}\, \text{جتا}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) \text{ءس} = -\int \text{ص جتاص ءص}$$

ثم نكامل الناتج بالأجزاء فيكون الجواب $\int \frac{١}{\text{س}^{٣}}\, \text{جتا}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) \text{ءس} = -\frac{١}{\text{س}}\, \text{جا}\frac{١}{\text{س}} - \text{جتا}\frac{١}{\text{س}} + \text{جـ}$

السؤال الثاني:

نفرض أن: $\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{س}^{\text{ن}}\, \text{ءس}$

$\therefore \text{ءق} = \frac{١}{\text{س}}\, \text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}$

$$\int \text{س}^{\text{ن}}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س} - \int \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} \times \frac{١}{\text{س}}\, \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س} - \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{(\text{ن}+١)^{٢}} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س} - \frac{١}{\text{ن}+١}\right) + \text{جـ}$$

تمارين (٤ − ٤ ج) صفحة ١٦٥

السؤال الأول:

أ) $\int \frac{\text{س}+٢}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}\, \text{ءس} = \int \frac{\text{س}+٢}{(\text{س}-٣)(\text{س}+١)}\, \text{ءس}$

$\frac{\text{س}+٢}{(\text{س}-٣)(\text{س}+١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٣} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+١}$ **ومنها يكون** $\text{س} + ٢ = \text{أ}(\text{س}+١) + \text{ب}(\text{س}-٣)$

وتكون $\text{أ} = \frac{٥}{٤}$، $\text{ب} = \frac{-١}{٤}$ **ومنها**

$$\int \frac{\text{س}+٢}{(\text{س}-٣)(\text{س}+١)}\, \text{ءس} = \int \frac{\frac{٥}{٤}}{\text{س}-٣}\, \text{ءس} + \int \frac{\frac{-١}{٤}}{\text{س}+١}\, \text{ءس} = \frac{٥}{٤}\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}-٣| + \frac{-١}{٤}\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}+١| + \text{جـ}$$

ب) $\int \frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦}\,دس$. بما أن درجة البسط تساوي درجة المقام،

فنجري القسمة المطولة $س^{٢}+٢ \,\overline{)\, س^{٢}+س-٦}$ وينتج أن

$$\frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦} = ١ + \frac{-س+٨}{(س+٣)(س-٢)}$$

ومنها $\frac{-س+٨}{(س+٣)(س-٢)} = \frac{أ}{س+٣} + \frac{ب}{س-٢}$ ، وبعد الحل ينتج أن $أ = \frac{-١١}{٥}$ ، $ب = \frac{٦}{٥}$

ويكون $\int \frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦}\,دس = س + \frac{-١١}{٥}لـو_{هـ}|س+٣| + \frac{٦}{٥}لـو_{هـ}|س-٢| + جـ$

ج) $\int \frac{\sqrt{س}}{س-\sqrt{س}-٢}\,دس$ نفرض $ص = \sqrt{س}$ ومنها $٢ص\,دص = دس$

$\int \frac{\sqrt{س}}{س-\sqrt{س}-٢}\,دس = \int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-ص-٢}\,دص$ وبإجراء القسمة المطولة ينتج أن:

$$\frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-ص-٢} = ٢ + \frac{٢ص+٤}{ص^{٢}-ص-٢} = ٢ + \frac{أ}{ص-٢} + \frac{ب}{ص+١}$$

$$\int \frac{\sqrt{س}}{س-\sqrt{س}-٢}\,دس = ٢\sqrt{س} + \frac{٨}{٣}لـو_{هـ}(\sqrt{س}-٢) - \frac{٢}{٣}لـو_{هـ}(\sqrt{س}+١) + جـ$$

د) $\int \frac{س+٢}{(س^{٢}-س)(س+١)}\,دس$

$\frac{س+٢}{(س^{٢}-س)(س+١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١} + \frac{جـ}{س+١}$ وينتج أن $أ = -٢$ ، $ب = \frac{٣}{٢}$ ، $جـ = \frac{١}{٢}$

$$\int \frac{س+٢}{(س^{٢}-س)(س+١)}\,دس = -٢لـو_{هـ}|س| + \frac{٣}{٢}لـو_{هـ}|س-١| + \frac{١}{٢}لـو_{هـ}|س+١| + جـ$$

هـ) $\int قتاس\,دس = \int \frac{قتاس(قتاس+ظتاس)}{قتاس+ظتاس}\,دس$

$$= \int \frac{قتا^{٢}س+قتاس\,ظتاس}{قتاس+ظتاس}\,دس = -لـو_{هـ}|قتاس+ظتاس| + جـ$$

و) $\int \frac{1}{س - س(لو_{هـ}س)^{2}} \, ءس$

الحل: نفرض $ص = لو_{هـ}س$ **ومنها** $سءص = ءس$

$$\int \frac{س}{س - سص^{2}} \, ءص = \int \frac{1}{1 - ص^{2}} \, ءص = \int \frac{-1}{ص^{2} - 1} \, ءص$$

$$\frac{-1}{ص^{2} - 1} = \frac{أ}{ص - 1} + \frac{ب}{ص + 1}$$ **ومنها**

$$\int \frac{1}{س - س(لو_{هـ}س)^{2}} \, ءس = \frac{-1}{2} لو_{هـ}|لو_{هـ}س - 1| + \frac{1}{2} لو_{هـ}|1 + لو_{هـ}س| + جـ$$

ز) $\int \frac{-س + 7}{س^{2} + س - 2} \, ءس$

$$\frac{-س + 7}{(س - 1)(س + 2)} = \frac{أ}{س - 1} + \frac{ب}{س + 2}$$ **ومنها** $أ = 2$، $ب = -3$

وينتج أن $\int \frac{-س + 7}{س^{2} + س - 2} \, ءس = 2لو_{هـ}|س - 1| - 3لو_{هـ}|س + 2| + جـ$

ح) $\int \frac{جاس}{16 - جتا^{2}س} \, ءس$ **نفرض** $ص = جتاس$ **ومنها** $\frac{ءص}{-جاس} = ءس$

$$\int \frac{جاس}{16 - جتا^{2}س} \, ءس = \int \frac{جاس}{16 - ص^{2}} \cdot \frac{ءص}{-جاس} = \int \frac{ءص}{ص^{2} - 16}$$

$$\frac{1}{ص^{2} - 16} = \frac{أ}{ص - 4} + \frac{ب}{ص + 4}$$ **ومنها** $أ = \frac{1}{8}$ ، $ب = \frac{-1}{8}$

$$\int \frac{جاس}{16 - جتا^{2}س} \, ءس = \frac{1}{8} لو_{هـ}|ص - 4| - \frac{1}{8} لو_{هـ}|ص + 4| + جـ$$

أي أن $\int \frac{جاس}{16 - جتا^{2}س} \, ءس = \frac{1}{8} لو_{هـ}|جتاس - 4| - \frac{1}{8} لو_{هـ}|جتاس + 4| + جـ$

ط) $\int \frac{قتا^{2}س}{2 - قتا^{2}س} \, ءس = \int \frac{قتا^{2}س}{1 - ظتا^{2}س} \, ءس$ ، **نفرض** $ص = ظتاس$ **ومنها** $\frac{ءص}{-قتا^{2}س} = ءس$

$\int \frac{قتا^{2}س}{2 - قتا^{2}س} \, ءس = \int \frac{قتا^{2}س}{1 - ص^{2}} \cdot \frac{ءص}{-قتا^{2}س} = \int \frac{1}{ص^{2} - 1} \, ءص$ **ثم نكامل بالكسور الجزئية**

$\frac{1}{ص^2 - 1} = \frac{أ}{ص - 1} + \frac{ب}{ص + 1}$ وينتج أن $أ = \frac{1}{2}$ ، $ب = \frac{-1}{2}$ فيكون

$$\int \frac{قتا^2 س}{2 - قتا^2 س} دس = \int \frac{\frac{1}{2}}{ص - 1} دس - \int \frac{\frac{1}{2}}{ص + 1} دس = \frac{1}{2} لـو_{هـ} |ظتاس - 1| - \frac{1}{2} لـو_{هـ} |ظتاس + 1| + جـ$$

ي) $\int \frac{س^2}{س^6 + س^3} دس = \int \frac{س^2}{س^3 (س^3 + 1)} دس = \int \frac{1}{س (س^3 + 1)} دس$

نفرض $ص = س^3 + 1$ ومنها $\frac{دص}{3 س^2} = دس$ فيكون $\int \frac{س^2}{س^6 + س^3} دس = \int \frac{دص}{3ص(ص - 1)}$

وينتج أن $\int \frac{س^2}{س^6 + س^3} دس = \frac{1}{3} (لـو_{هـ} |س^3| - لـو_{هـ} |س^3 + 1|) + جـ$

السؤال الثاني:

بما أن $\sqrt{س} دص = 6دس - دص$ فإن $\frac{1}{6} دص = \frac{1}{(\sqrt{س} + 1)} دس$ ومنها

$\int \frac{1}{6} دص = \int \frac{1}{(\sqrt{س} + 1)} دس$ أي أن $\frac{1}{6} ص = \int \frac{1}{(\sqrt{س} + 1)} دس$ ونفرض $ع = \sqrt{س} + 1$

فينتج أن $(2ع - 2) دع = دس$ أي أن $\frac{1}{6} ص = \int \frac{(2ع - 2) دع}{ع} = 2ع - 2 لـو_{هـ} |ع| + جـ$

وينتج أن $\frac{1}{6} ص = 2(\sqrt{س} + 1) - 2 لـو_{هـ} |\sqrt{س} + 1| + جـ$

وعندما $ص = 2$ ، $س = 0$ فإن $\frac{1}{3} = 2(1) + جـ$ ومنها $\frac{-5}{3} = + جـ$

$$\frac{1}{6} ص = 2(\sqrt{س} + 1) - 2 لـو_{هـ} |\sqrt{س} + 1| - \frac{5}{3}$$

تمارين عامة(الوحدة الرابعة): صفحة ١٦٦

السؤال الأول: الموضوعي

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥
الاجابة	ج	د	ج	ب	ب

السؤال الثاني:

يكون م(س) اقترانا أصليا للاقتران ق(س) اذا كان م′(س) = ق(س)

وبما أن م′(س) = $\frac{-٢س}{٢\sqrt{١-س^٢}} = \frac{-س}{\sqrt{١-س^٢}}$ = ق(س)

السؤال الثالث:

$\int$ ق″(س)ءس = $\int$(س^٢ + ٣جاس)ءس = ق′(س) +جـ ومنها

ق′(س) = $\frac{س^٣}{٣}$ − ٣جتاس +جـ ، وبما أن ق′(٠) = ٣فتكون جـ = ٦

أي أن ق′(س) = $\frac{س^٣}{٣}$ − ٣جتاس + ٦

كما أن ق(س) = $\int$ق′(س)ءس = $\frac{س^٤}{١٢}$ − ٣جاس + ٦س + ء

وبما أن ق(٠) = ٢ فإن ء =٢ومنها ق(س) = $\frac{س^٤}{١٢}$ − ٣جاس + ٦س + ٢

السؤال الرابع

ف(ن) = $\int$ ع ءن = $\int$(٤ن+لـوهـ (ن + ١) ءن

ف(ن) = ٢ن^٢ + نلـوهـ (ن + ١) − ن+لـوهـ (ن + ١)+جـ

وبما أن ف(١) = ٨ ، فإن جـ = ٧−لـوهـ ٤ فيكون

ف(ن) = ٢ن^٢ + نلـوهـ (ن + ١) − ن+لـوهـ (ن + ١) + ٧−لـوهـ ٤

ف(٣) = ٢٢+٣لـوهـ ٤ مترا

السؤال الخامس:

بما أن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣س^٢ - ٢}{(٢س^٣ - ٤س)^٤}$ فإن $\int$ءص = $\int \frac{٣س^٢ - ٢}{(٢س^٣ - ٤س)^٤}$ءس

نفرض $ع = ٢س^{٣} - ٤س$ **فيكون** $\frac{ءع}{٢(٣س^{٢}-٢)} = ءس$ **ومنها يكون**

$$ص = \int \frac{٣س^{٢}-٢}{(ع)^{٤}} \cdot \frac{ءع}{٢(٣س^{٢}-٢)} = \frac{١}{٢}\int ع^{-٤} ءع = \frac{-١}{٦ع^{٣}} + جـ$$

أي أن $ص = \frac{-١}{٦(٢س^{٣}-٤س)^{٣}} + جـ$

وعندما ص=١ ، س =١ يكون $ص = \frac{-١}{٦(٢س^{٣}-٤س)^{٣}} + \frac{٤٧}{٤٨}$

السؤال السادس:

١) $\int س\sqrt{س^{٢}-٣}\,ءس$

نفرض $ص = س^{٢} - ٣$ **فيكون** $\frac{ءص}{٢س} = ءس$ **فيكون** $\int س ص^{\frac{١}{٢}} \frac{ءص}{٢س} = \frac{١}{٣}(س^{٢}-٣)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

٢) $\int \frac{١}{س^{١٠}+س} ءس = \int \frac{١}{س(س^{٩}+١)} ءس$ **نفرض** $ص = س^{٩} + ١$ **فيكون** $\frac{ءص}{٩س^{٨}} = ءس$

أي أن $\int \frac{١}{س^{١٠}+س} ءس = \int \frac{١}{س(س^{٩}+١)} ءس = \frac{١}{٩}\int \frac{١}{ص(ص-١)} ءص$

وبالكسور الجزئية ينتج أن: $\int \frac{١}{س^{١٠}+س} ءس = \frac{١}{٩}(لـو_{هـ}|س^{٩}| - لـو_{هـ}|س^{٩}+١|) + جـ$

٣) $\int قا^{٢}\sqrt{س}\,ءس$ **نفرض** $ص = \sqrt{س}$ **فيكون** $٢ص ءص = ءس$ **أي أن**

$\int قا^{٢}\sqrt{س}\,ءس = \int ٢ص قا^{٢}ص\,ءص$ **ثم** **نكامل بالأجزاء**

نفرض أن: $ق = ٢ص$ $\quad ءع = قا^{٢}ص\,ءص$

$\therefore ءق = ٢ءص$ $\quad ع = ظاص$

$$\int قا^{٢}\sqrt{س}\,ءس = \int ٢ص قا^{٢}ص\,ءص = ٢ص ظاص - ٢\int ظاص\,ءص$$

$$= ٢\sqrt{س}\,ظا\sqrt{س} + ٢لـو_{هـ}|جتا\sqrt{س}| + جـ$$

$$\int قا(٣س+١)ظا(٣س+١)\,ءس = \frac{١}{٣}قا(٣س+١) + جـ$$

٥) $\int (س^{٢}+١)جتاس\,ءس$ **نكامل بالأجزاء مرتين فينتج أن :**

$$\int (س^{٢}+١)جتاس\,ءس = (س^{٢}+١)جاس + ٢س جتاس - ٢جاس + جـ$$

٦) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١)\,\text{ءس}$

نفرض أن: $\text{ن} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١)$ $\qquad \text{ءع} = \text{ءس}$

$\therefore \text{ءن} = \dfrac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}-١}\,\text{ءس} \qquad \text{ع} = \text{س}$

$$\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١)\,\text{ءس} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١) - \int \dfrac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}-١}\,\text{ءس}$$

ثم نقسم ونكامل بالكسور الجزئية وينتج أن: $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١)\,\text{ءس}$

$$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١) - ٢\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| + \text{جـ}$$

٧) $\int \dfrac{\text{س}^{٢}+١}{\text{س}^{٣}+\text{س}}\,\text{ءس} = \int \dfrac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

٨) $\int \dfrac{\text{قا}^{٤}\text{س}}{١-\text{ظا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$ نفرض $\text{ص} = \text{ظاس}$ فيكون $\dfrac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \text{ءس}$

$\int \dfrac{\text{قا}^{٤}\text{س}}{١-\text{ظا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \dfrac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{١-\text{ص}^{٢}}\,\text{ءص} = \int \dfrac{١+\text{ص}^{٢}}{١-\text{ص}^{٢}}\,\text{ءص}$ ثم نقسم ونكامل بالكسور الجزئية

وينتج $\int \dfrac{\text{قا}^{٤}\text{س}}{١-\text{ظا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} = -\text{ظاس} - \text{لو}_{\text{هـ}}|١-\text{ظاس}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|١+\text{ظاس}| + \text{جـ}$

٩) $\int (\text{جتا}^{٤}\text{س} - \text{جا}^{٤}\text{س})\,\text{ءس} = \int (\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س})(\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int \text{جتا}٢\text{س}\,\text{ءس} = \dfrac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س} + \text{جـ}$

١٠) $\int (\text{قتاس}+\text{ظتاس})^{٨}\,\text{قتاس}\,\text{ءس} = \int (\text{قتاس}+\text{ظتاس})^{٧}(\text{قتاس}+\text{ظتاس})\,\text{قتاس}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{قتاس}+\text{ظتاس})^{٧}(\text{قتا}^{٢}\text{س}+\text{ظتاس}\,\text{قتاس})\,\text{ءس} = -\dfrac{١}{٨}(\text{قتاس}+\text{ظتاس})^{٨} + \text{جـ}$

١١) $\int (\text{س}^{٨} - ٦\text{س})^{٦}\,\text{ءس} = \int \left(\text{س}(\text{س}^{٧}-٦)\right)^{٦}\text{ءس} = \int \text{س}^{٦}(\text{س}^{٧}-٦)^{٦}\,\text{ءس}$

$= \dfrac{١}{٧}\int ٧\text{س}^{٦}(\text{س}^{٧}-٦)^{٦}\,\text{ءس} = \dfrac{١}{٤٩}(\text{س}^{٧}-٦)^{٧} + \text{جـ}$

السؤال السابع:

بما أن $\text{ع} = \text{أ}\sqrt{\text{ف}}$ فإن $\dfrac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \text{أ}\sqrt{\text{ف}}$ ومنها $\dfrac{\text{ءف}}{\sqrt{\text{ف}}} = \text{أ}\,\text{ءن}$

$\text{ف}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءف} = \text{أ}\,\text{ءن}$ ويكون $٢\text{ف}^{\frac{١}{٢}} = \text{أن} + \text{جـ}$

لكن $\text{ف}(٢) = ٩$ ومنها $٢\text{أ} + \text{جـ} = ٦$ ، كذلك $\text{ف}(٤) = ١٦$ فيكون $٤\text{أ} + \text{جـ} = ٨$

وبحل المعادلتين ينتج أن $\text{أ} = ١$

السؤال الثامن:

بما أن $\text{س}^{٢}\,\text{ءص} - \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس} = ٠$ فإن $\int \text{ءص} = \int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

ومنها $\text{ص} = \int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$ فنكامل بالتعويض بوضع $\text{ع} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}$

فينتج أن $\text{ص} = \int \text{ع}\,\text{هـ}^{-\text{ع}}\,\text{ءع}$ وبعد اجراء التكامل بالأجزاء ينتج أن

$\text{ص} = \frac{-\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}} + \text{جـ}$ وعندما ص=٠ ، س = هـ فإن:

$$\text{ص} = \frac{-\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}} + \frac{٢}{\text{هـ}}$$

السؤال التاسع:

نكامل الطرفين بالنسبة ل س

$$\int \text{س}\,\text{ﮬ}'(\text{س})\,\text{ءس} + \int \text{ﮬ}(\text{س})\,\text{ءس} = \int \text{جتاس}\,\text{ءس}$$

وبتكامل الجزء الأول $\int \text{س}\,\text{ﮬ}'(\text{س})\,\text{ءس}$ بالأجزاء ينتج أن

$$\text{س}\,\text{ﮬ}(\text{س}) - \int \text{ﮬ}(\text{س})\,\text{ءس} + \int \text{ﮬ}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{جاس} + \text{جـ}$$

أي أن $\text{س}\,\text{ﮬ}(\text{س}) = \text{جاس} + \text{جـ}$ وبما أن $\text{ﮬ}(\pi) = ٠$ فإن $\text{جـ} = ٠$

$$\text{ﮬ}(\text{س}) = \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$$

حل آخر: بما أن $\text{س}\,\text{ﮬ}'(\text{س}) + ١ \times \text{ﮬ}(\text{س}) = \text{جتاس}$ فإن $(\text{س}\,\text{ﮬ}(\text{س}))' = \text{جتاس}$ ومنه

$$\int (\text{س}\,\text{ﮬ}(\text{س}))'\,\text{ءس} = \int \text{جتاس}\,\text{ءس}$$

أي أن $\text{س}\,\text{ﮬ}(\text{س}) = \text{جاس} + \text{جـ}$ وبما أن $\text{ﮬ}(\pi) = ٠$ فإن $\text{جـ} = ٠$ ومنها يكون $\text{ﮬ}(\text{س}) = \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$

حلول الوحدة الخامسة

تمارين (٥-١) صفحة ١٧٦

السؤال الأول: أ) $\text{س}_{٢} = -١ + \frac{٢--١}{٦} \times ٢ = ٠$

ب) الفترة الجزئية الرابعة $= [\frac{١}{٢}، ١]$

السؤال الثاني: $\text{س}_٤ = \text{جـ} + \frac{٧-\text{جـ}}{١٠} \times ٤ = ٤$ ومنها $\text{جـ} = ٢$

السؤال الثالث: $\sigma_٤ = \{١،٢،٣،٤،٥\}$ لأن طول الفترة الجزئية يساوي ١ ، فتكون

$$\text{م}(\sigma_٤،\text{ق}) = ١ \times \sum_{ر=١}^{ر=٤} \text{ق}(\text{س}_ر^*) = ١ \times (\text{ق}(٢) + \text{ق}(٣) + \text{ق}(٤) + \text{ق}(٥))$$

$$\text{م}(\sigma_٤،\text{ق}) = ١ \times (٢ + -٣ + -١٠ + -١٩) = -٣٠$$

السؤال الرابع: $\text{ق}(\text{س}) = ٢ + \text{هـ}^{\text{س}}$ ، طول الفترة الجزئية $= ١$

فتكون $\sigma_٣ = \{-١،٠،١،٢\}$

$$\text{م}(\sigma_٣،\text{ق}) = ١ \times \sum_{ر=١}^{ر=٣} \text{ق}(\text{س}_ر^*) = ١ \times (\text{ق}(-١) + \text{ق}(٠) + \text{ق}(١)) = = ٧ + \text{هـ} + \frac{١}{\text{هـ}}$$

السؤال الخامس: $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أس}}{\text{س}+٢}$ ، $\sigma_٥ = \{-١،٠،٢،٣،٦،٨\}$

الفترات الجزئية هي : $[-١،٠]،[٠،٢]،[٢،٣]،[٣،٦][٦،٨]$

$$\text{م}(\sigma_٥،\text{ق}) = ١ \times -\text{أ} + ٢ \times ٠ + ١ \times \frac{٢\text{أ}}{٤} + ٣ \times \frac{٣\text{أ}}{٥} + ٢ \times \frac{٦\text{أ}}{٨}$$

ومنها يكون $\text{٥و٦} = \frac{٢٨\text{أ}}{١٠}$ **ومنها** $\text{أ} = ٢$

السؤال السادس: $\text{س}_٢ = \text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{٨} \times ٢ = ٢$ ومنها $٣\text{أ} + \text{ب} = ٨$

، $\text{س}_٤ = \text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{١٢} \times ٤ = ٤$ ومنها $٢\text{أ} + \text{ب} = ١٢$ وبحل المعادلتين ينتج أن :

$\text{أ} = -٤$ ، $\text{ب} = ٢٠$

السؤال السابع : $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس}$ ، $\sigma_٤ = \left\{٠، \frac{\pi}{٦}، \frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٣}، \frac{\pi}{٢}\right\}$

$$\text{م}(\sigma_٤،\text{ق}) = \frac{\pi}{٦} \times \text{جا}٠ + \frac{\pi}{١٢} \times \text{جا}\frac{\pi}{٦} + \frac{\pi}{١٢} \times \text{جا}\frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٦} \times \text{جا}\frac{\pi}{٣}$$

$$= \frac{\pi}{٦}\times ٠ + \frac{\pi}{١٢}\times\frac{١}{٢} + \frac{\pi}{١٢}\times\frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\pi}{٦}\times\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\pi}{٢٤}\left(١+\sqrt{٢}+٢\sqrt{٣}\right)$$

السؤال الثامن : طول الفترة الجزئية $= \frac{١}{\text{ن}}$

$$\text{ل} = \text{م}(\sigma_{\text{ن}}\text{، د}) = \frac{١}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{د}(\text{س}_{\text{ر}}) \quad \text{،} \quad \text{ك} = \text{م}(\sigma_{\text{ن}}\text{، د}) = \frac{١}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{د}(\text{س}_{\text{ر}-١})$$

$$\text{ل} - \text{ك} = \frac{١}{\text{ن}}\left(\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{د}(\text{س}_{\text{ر}}) - \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{د}(\text{س}_{\text{ر}-١})\right)$$

$$\text{ل} = \frac{١}{\text{ن}}\left(\text{د}(\text{س}_{١}) + \text{د}(\text{س}_{٢}) + \text{د}(\text{س}_{٣}) + \dots + \text{د}(\text{س}_{\text{ن}})\right)$$

$$\text{ك} = \frac{١}{\text{ن}}\left(\text{د}(\text{س}_{٠}) + \text{د}(\text{س}_{١}) + \text{د}(\text{س}_{٢}) + \dots \text{د}(\text{س}_{\text{ن}-١})\right)$$

وبالطرح ينتج أن $\text{ل} - \text{ك} = \frac{١}{\text{ن}}\left(\text{د}(\text{س}_{\text{ن}}) - \text{د}(\text{س}_{٠})\right) = \frac{١}{\text{ن}}\left(\text{د}(١) - \text{د}(٠)\right)$

تمارين (٥-٢) صفحة ١٨١

السؤال الأول: $\text{م}(\sigma_{\text{ن}}\text{، د}) = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{د}(\text{س}^*_{\text{ر}})$ ، $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} = -١ + \frac{٤}{\text{ن}}\text{ر}$

ويكون $\text{د}(\text{س}_{\text{ر}}) = \text{د}(-١ + \frac{٤}{\text{ن}}\text{ر}) = ٧ - \frac{٢٠}{\text{ن}}\text{ر}$

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}}\text{، د}) = \frac{٤}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ر}=\text{ن}}\left(٧ - \frac{٢٠}{\text{ن}}\text{ر}\right) = \frac{٤}{\text{ن}}\left(٧\text{ن} - \frac{٢٠}{\text{ن}}\cdot\frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢}\right) = -١٢ - \frac{٤٠}{\text{ن}}$$

السؤال الثاني: $\text{م}(\sigma_{\text{ن}}\text{، د}) = \frac{١}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{د}(\text{س}^*_{\text{ر}}) = \frac{١}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}}\left(\text{أ}\,\text{هـ}(\text{س}^*_{\text{ر}}) + \text{ب}\right)$

$$= \frac{١}{\text{ن}}\left(\text{أ}\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{هـ}(\text{س}^*_{\text{ر}}) + \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ب}\right) = \text{أ}\left(\frac{١}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{هـ}(\text{س}^*_{\text{ر}})\right) + \text{ب}$$

$$= \text{أ}\,\text{م}(\sigma_{\text{ن}}\text{، هـ}) + \text{ب}$$

السؤال الثالث: $\int_{١}^{ب} ٢س\,دس = \lim_{ن\to\infty} \frac{ب-١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*) = \lim_{ن\to\infty} \frac{ب-١}{ن}\sum ٢(١+\frac{ب-١}{ن}ر)$

$$= \lim_{ن\to\infty} \frac{ب-١}{ن}\sum ٢+٢(\frac{ب-١}{ن})ر = \lim_{ن\to\infty} \frac{ب-١}{ن}(٢+٢\frac{ب-١}{ن}(\frac{ن(ن+١)}{٢}))$$

بالاختصار والتبسيط ينتج ان $\int_{١}^{ب} ٢س\,دس = ٢(ب-١)+(ب-١)^{٢} = \lim_{ن\to\infty}(٣٥+\frac{٢}{ن}) = ٣٥$

وبحل المعادلة ينتج القيمة المطلوبة ب=٦

السؤال الرابع: نستخدم تعريف التكامل المحدود (ريمان)وينتج ان

أ) $\int_{-١}^{٤} \frac{١}{٢}س\,دس$ ، $م(\sigma_ن،ق) = \frac{٥}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*)$

$$= \frac{٥}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} ق(-١+\frac{٥}{ن}ر) = \frac{٥}{ن}\sum_{ر=١}^{ن}\frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢}$$

وينتج أن $\int_{-١}^{٤} \frac{١}{٢}س\,دس = \lim_{ن\to\infty} م(\sigma_ن،ق) = \lim_{ن\to\infty}\frac{٥}{٢} = \frac{٥}{٢}$

ب) $م(\sigma_ن،ق) = \frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*) = \frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} ق(١+\frac{١}{ن}ر)$

$$= \frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن}(٤-٦(١+\frac{١}{ن}ر)) = \frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن}(-٢-\frac{٦}{ن}ر)$$

$$= \frac{١}{ن}(-٢ن-\frac{٦}{ن}(\frac{ن(ن+١)}{٢})) = -٥-\frac{٣}{ن}$$

$$\int_{١}^{٢}(٤-٦س)\,دس = \lim_{ن\to\infty} م(\sigma_ن،ق) = -٥$$

السؤال الخامس: لاحظ ان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س} - ١}{\text{جتا س} - ١} = \frac{(\text{جتا س} - ١)(\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جتا س} + ١)}{\text{جتا س} - ١}$ ،

نفرض $\text{هـ}(\text{س}) = \text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جتا س} + ١$ معرفا على الفترة $[\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$ ، فيكون $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$

$\forall \text{س} \in [\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}] - \{٠\}$

بما ان هـ(س) متصلا على مجاله فهو قابل للتكامل ايضا

حسب النظرية فان ق(س) قابل للتكامل على الفترة $[\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$

تمارين (٥ــ٣) صفحة ١٨٦

السؤال الأول: أ) $\int_{٠}^{٤} (٣ + \sqrt{\text{س}})^{٢} \, \text{ءس} = \int_{٠}^{٤} (٩ + ٦\sqrt{\text{س}} + \text{س}) \, \text{ءس} =$

$$= \int_{٠}^{٤} (٩ + ٦\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{س}) \, \text{ءس} = ٩\text{س} + ٤\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} \Big|_{٠}^{٤} = ٧٦$$

ب) $\int_{١}^{٢} \text{س}(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣} \, \text{ءس}$ ، بفرض $(\text{س}^{٢} - ٣) = \text{ص}$ واجراء التكامل بالتعويض ينتج

$$\int_{١}^{٢} \text{س}(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣} \, \text{ءس} = \frac{١}{٢} \int_{-٢}^{١} (\text{ص})^{٣} \, \text{ءص} = \frac{١^{٤} - (-٢)^{٤}}{٨} = \frac{-١٥}{٨}$$

ج) $\int_{١}^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \, \text{ءس}$

بالأجزاء $\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{ءه} = \text{ءس}$

$\text{ءق} = \frac{١}{\text{س}} \text{ءس}$ ، $\text{هـ} = \text{س}$

$$\int_{١}^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \, \text{ءس} = \text{س} \, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س} \Big|_{١}^{\text{هـ}} = \text{هـ} - ٠ - (\text{هـ} - ١) = ١$$

د) $\int_{0}^{2} ١٢٠ س^2(س-١)^3 ء س$ بفرض $س-١=ص$ ، $ءس=ءص$

$$\int_{0}^{2} ١٢٠ س^2(س-١)^3 ء س = \int_{-1}^{1} ١٢٠(ص+١)^2(ص)^3 ء ص$$

$$= \int_{-1}^{1} ١٢٠(ص^2+٢ص+١)ص^3 ء ص = \int_{-1}^{1} ١٢٠\ (ص^5+٢ص^4+ص^3)ءص$$

$$= ١٢٠(\tfrac{1^6}{6}+٢\times\tfrac{1^5}{5}+\tfrac{1^4}{4}) - ١٢٠(\tfrac{(-1)^6}{6}+٢\times\tfrac{(-1)^5}{5}+\tfrac{(-1)^4}{4}) = ١٢٠\times\tfrac{4}{5} = ٩٦$$

السؤال الثاني : $ن(س) = \frac{س}{س+١}$ ، **في الفترة** [٠، ٤]

$$ت(س) = \int_{0}^{س} ن(ص)ءص = \int_{0}^{س} \frac{ص}{ص+١}ءص$$

$$= \int_{0}^{س} \frac{ص+١-١}{ص+١}ءص = \int_{0}^{س} ١ءص - \int_{0}^{س} \frac{١}{ص+١}ءص$$

$$= (ص - لـو_{هـ}|ص+١|)\Big|_{0}^{س} = س - لـو_{هـ}|س+١|$$

السؤال الثالث: بما أن $ت(-٢)=٠$ فإن $٢(-٢)^2+أ=٠$ ومنها $أ=-٨$

كما أن ت(س) متصل دائما على مجاله

$ت(٣^-)=ت(٣^+)$ ومنها $١٠=٣ب+١$ ، ومنها تكون $ب=٣$

السؤال الرابع : $ت(س) = \int_{\frac{1}{2}}^{س} ن(ص)ءص = س+جاπس+جـ$

لمعرفة قيمة الثابت جـ ، فإن $ت(\frac{1}{2})=٠$ ومنها $\frac{1}{2}+١+جـ=٠ \Leftarrow جـ=\frac{-3}{2}$

$\text{ت}'(\text{س}) = \text{ن}(\text{س}) = ١ + \pi \,\text{جتا}\, \pi \text{س}$

لإيجاد $\text{ن}(٢)$ **نعوض بدل س (١) فينتج ان** $\text{ن}(٢) = ١ + \pi\,\text{جتا}\,٢\pi = ١ + \pi$

السؤال الخامس: $\text{ت}'(\text{س}) = (\text{أ} + \text{هـ}^{\text{س}})$

$\text{ت}'(٢) = (\text{أ} + \text{هـ}^{٢}) = -١$ ومنها $\text{أ} = -١ - \text{هـ}^{٢}$

السؤال السادس : $\int_{٠}^{١} (\text{س}^{٢} - ٢\text{س})(\text{س} - ١)^{٥}\, \text{ءس}$

نفرض $\text{ص} = \text{س} - ١$ ، **فيكون** $\text{ءص} = \text{ءس}$ ، **وعندما س=٠ فإن ص=-١ ، وعندما س=١ فإن ص=٠**

أي أن $\int_{-١}^{٠} (\text{ص}+١)(\text{ص}-١)(\text{ص})^{٥}\, \text{ءص} = \int_{-١}^{٠} (\text{ص}^{٢} - ١)(\text{ص})^{٥}\, \text{ءص}$

$= \int_{-١}^{٠} (\text{ص}^{٧} - \text{ص}^{٥})\, \text{ءص} = \left[\frac{\text{ص}^{٨}}{٨} - \frac{\text{ص}^{٦}}{٦}\right]_{-١}^{٠} = \frac{١}{٢٤}$

تمارين (٥-٤) صفحة ١٩٣

السؤال الاول: أ) $\int_{٠}^{\pi} \text{جا}^{٢}\text{س}\, \text{ءس} = \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}\,٢\text{س})\, \text{ءس} = \frac{\pi}{٢} - \frac{\text{جا}\,٢\pi}{٢} - ٠ = \frac{\pi}{٢}$

ب) $\int_{٠}^{٢} (١ + \text{هـ}^{\text{س}})^{٢}\, \text{ءس} = \int_{٠}^{٢} (١ + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{٢\text{س}})\, \text{ءس} = (\text{س} + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}})\Big|_{٠}^{٢}$

$= (٢ + ٢\text{هـ}^{٢} + \frac{\text{هـ}^{٢\times٢}}{٢}) - (٠ + ٢\text{هـ}^{٠} + \frac{\text{هـ}^{٢\times٠}}{٢}) = \frac{\text{هـ}^{٤}}{٢} + ٢\text{هـ}^{٢} - \frac{١}{٢}$

جـ) $\int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٣}} (\text{س} + ١)(\text{س}^{٢} + ٤)\, \text{ءس} = \int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٣}} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤)\, \text{ءس}$

$= (\frac{\text{س}^{٤}}{٤} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س})\Big|_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٣}} = ١٠\sqrt{٣}$

د) $\int_{-٢}^{١} \frac{س^{٣}-٢٧}{س^{٢}+٣س+٩}\,ءس = \int_{-٢}^{١} \frac{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)}{س^{٢}+٣س+٩}\,ءس$

$= \int_{-٢}^{١} (س-٣)\,ءس = \left(\frac{س^{٢}}{٢}-٣س\right)\Big|_{-٢}^{١} = \frac{-٢١}{٢}$

السؤال الثاني: أ) نفرض $ق(س) = س^{٢}+٢-(٢س-١) = س^{٢}-٢س+٣$

لاحظ ان $ق(س) \geq ٠$ **دائما لان المميز سالب ومنها** $(س^{٢}+٢)-(٢س-١) \geq ٠$

$(س^{٢}+٢) \geq (٢س-١)\ \ \forall س \in [١،٢]$ أي ان $\int_{١}^{٢}(س^{٢}+٢)\,ءس \geq \int_{١}^{٢}(٢س-١)\,ءس$

ب) لا حظ ان $س^{٢}+٢ \geq ٠$ **،** $\forall س \in ح$ **، و حسب خاصية المقارنة**

$\int_{٢}^{٣}(س^{٢}+٢س)\,ءس \geq ٠$

السؤال الثالث: أ) $\int_{٥}^{٧} س^{٣}\,ءس + \int_{١}^{٥} س^{٣}\,ءس = \int_{١}^{٧} س^{٣}\,ءس$

ب) $\int_{١}^{٢} \sqrt{س+٢}\,ءس - \int_{٤}^{٢} \sqrt{س+٢}\,ءس$

$= \int_{١}^{٢} \sqrt{س+٢}\,ءس + \int_{٢}^{٤} \sqrt{س+٢}\,ءس = \int_{١}^{٤} \sqrt{س+٢}\,ءس$

ج) $\int_{١}^{٣} س^{٢}\,ءس - \int_{٣}^{١} ٤\,ءس + \int_{٣}^{٥}(س^{٢}+٤)\,ءس =$

$= \int_{١}^{٣} س^{٢}\,ءس + \int_{١}^{٣} ٤\,ءس + \int_{٣}^{٥}(س^{٢}+٤)\,ءس = \int_{١}^{٣}(س^{٢}+٤)\,ءس + \int_{٣}^{٥}(س^{٢}+٤)\,ءس$

$= \int_{١}^{٥}(س^{٢}+٤)\,ءس$

د) $\int_{٢}^{٥} (س - ١)\,ءس + \int_{٧}^{٥} \frac{١ - س^{٢}}{س + ١}\,ءس = \int_{٢}^{٥} (س - ١)\,ءس + \int_{٧}^{٥} \frac{(١ - س)(١ + س)}{س + ١}\,ءس$

$= \int_{٢}^{٥} (س - ١)\,ءس + \int_{٧}^{٥} (١ - س)\,ءس = \int_{٢}^{٥} (س - ١)\,ءس + \int_{٥}^{٧} (س - ١)\,ءس$

$= \int_{٢}^{٧} (س - ١)\,ءس$

السؤال الرابع: $\int_{١}^{٥} ق(س)\,ءس = ٧$

أ) $\int_{١}^{٥} (٢ق(س) - ٣س + ١)\,ءس = ٢\int_{١}^{٥} ق(س)\,ءس - ٣\int_{١}^{٥} س\,ءس + \int_{١}^{٥} ءس$

$= ٢ \times ٧ - ٣(١٢) + ٤ = -١٨$

ب) $\int_{١}^{٥} ٢أق(س)\,ءس = ٢أ\int_{١}^{٥} ق(س)\,ءس = ٢أ \times ٧ = ١$ **ومنها** $أ = \frac{١}{١٤}$

السؤال الخامس: $\forall س \in [\frac{\pi}{٦}، \frac{\pi}{٤}]$ ، جتاس $\leq$ جاس

$-$جتاس $\geq$ $-$جاس

$١ -$ جتاس $\geq$ $١ -$ جاس

ومنها $\frac{٢}{١ - جتاس} \leq \frac{٢}{١ - جاس}$

$\frac{-٢}{١ - جتاس} \geq \frac{-٢}{١ - جاس}$

$\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{-٢}{١ - جتاس}\,ءس \geq \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{-٢}{١ - جاس}\,ءس$

السؤال السادس: $\int_{1}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 8$

أ) $\int_{1}^{5} (3\text{ق}(\text{س}) - 2)\,\text{دس} = 3\int_{1}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{1}^{5} 2\,\text{دس}$

$3 \times 8 - 2 \times 4 = 16$

ب) $\int_{3}^{7} (4\text{ق}(\text{س}-2) - 2\text{س})\,\text{دس}$

بفرض ص = س − ٢ وتبديل حدود التكامل يصبح $\int_{3}^{7} \text{ق}(\text{س}-2)\,\text{دس} = \int_{1}^{5} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

$$\int_{3}^{7} (4\text{ق}(\text{س}-2) - 2\text{س})\,\text{دس} = 4\int_{1}^{5} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} - \int_{3}^{7} 2\text{س}\,\text{دس} = 4 \times 8 - 40 = -8$$

السؤال السابع:

$$\int_{2}^{7} 3\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 9 \text{ ، } \int_{2}^{4} 5\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 10$$

$$\int_{4}^{7} 2\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 2\int_{4}^{7} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 2\left(\int_{4}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{2}^{7} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}\right)$$

$$2\left(-\int_{2}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{2}^{7} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}\right)$$

$$2(-2+3) = 2$$

السؤال الثامن: $\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 18$

$$\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{1}^{2} (\text{أس}+1)\,\text{دس} + \int_{2}^{3} 3\text{س}^{2}\,\text{دس} = 18$$

$$\text{أ}\left(\frac{4-1}{2}\right) + 1 + (27 - 8) = 18$$

$$\frac{3\text{أ}}{2} = -2 \Leftarrow \text{أ} = -\frac{4}{3}$$

السؤال التاسع: $\int_{-1}^{2} 3ع^2 \, دع = ع^3 \Big|_{-1}^{2} = 9$ فيكون

$$\int_{1}^{ب} (4س - \int_{-1}^{2} 3ع^2 \, دع) \, دس = \int_{1}^{ب} (4س - 9) \, دس = 12$$

ومنها $2ب^2 - 9ب - 5 = 0$ أي أن $(2ب + 1)(ب - 5) = 0$

$ب = -\frac{1}{2}$ ، $ب = 5$

السؤال العاشر: $ن(س) = |س - 2| = \begin{cases} 2 - س ، & 0 \leq س \leq 2 \\ س - 2 ، & 2 \leq س \leq 5 \end{cases}$

1) عندما $0 \leq س \leq 2$ ، فإن $ت(س) = \int_{0}^{س} ن(ص) \, دص = \int_{0}^{س} (2 - ص) \, دص = 2س - \frac{س^2}{2}$

2) عندما $2 \leq س \leq 5$ فإن $ت(س) = \int_{0}^{س} ن(ص) \, دص = \int_{0}^{2} (2 - س) \, دس + \int_{2}^{س} ن(ص) \, دص$

$= ت(2) + \int_{2}^{س} (ص - 2) \, دص = 2 + (\frac{س^2}{2} - 2س + 2)$ ومنها

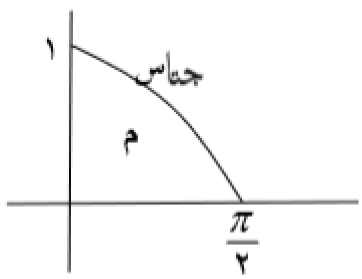
$$ت(س) = \begin{cases} 2س - \frac{س^2}{2} ، & 0 \leq س < 2 \\ \frac{س^2}{2} - 2س + 4 ، & 2 \leq س \leq 5 \end{cases}$$

تمارين (5-4أ) صفحة 200

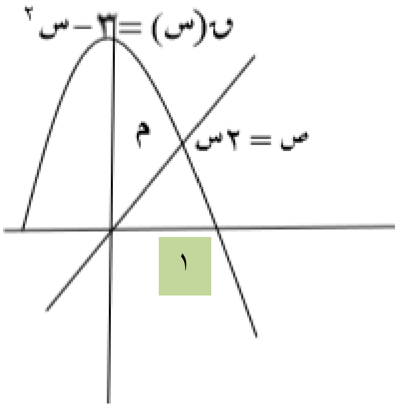
السؤال الاول :

$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |ن(س)| \, دس = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتاس \, دس$

$= جا\frac{\pi}{2} - جا(0) = 1$ وحدة مساحة



السؤال الثاني: معادلة المستقيم



المار بالنقطتين أ(٠،٠) ، ب(١، ٢) هي

$$\frac{ص-٠}{س-٠}=\frac{٢-٠}{١-٠} \Leftarrow ص=٢س$$

نجد نقاط تقاطع ق(س) والمستقيم $ص=٢س \Leftarrow هـ(س)=٢س$

$$٣-س^{٢}=٢س$$

$$\Leftarrow ٠=س^{٢}+٢س-٣=(س+٣)(س-١)$$

$\Leftarrow$ **س=١ أو س= -٣ ترفض**

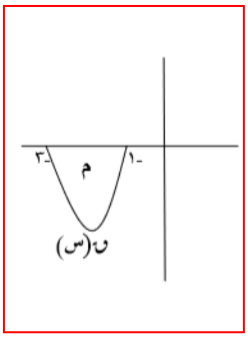
$$م=\int_{٠}^{١}\left|ق(س)-هـ(س)\right|ءس=\int_{٠}^{١}\left(٣-س^{٢}-٢س\right)ءس$$

$$=٣(١-٠)-\frac{١-٠}{٣}-٢\times\frac{١-٠}{٢}=\frac{٥}{٣}$$ **وحدة مساحة**

السؤال الثالث:

$$ق(س)=\left(س^{٢}-٩\right)\left(س^{٢}-١\right)\Leftarrow ٠=(س-٣)(س+٣)(س-١)(س+١)$$

ومنها س=٣ أو س=١ ترفض لأن المساحة في الربع الثالث ، س=-٣ ، س=-١



$$م=\int_{-٣}^{-١}\left|ق(س)\right|ءس=\int_{-٣}^{-١}-\left(س^{٢}-٩\right)\left(س^{٢}-١\right)ءس$$

$$=\int_{-٣}^{-١}-\left(س^{٤}-١٠س^{٢}+٩\right)ءس=$$

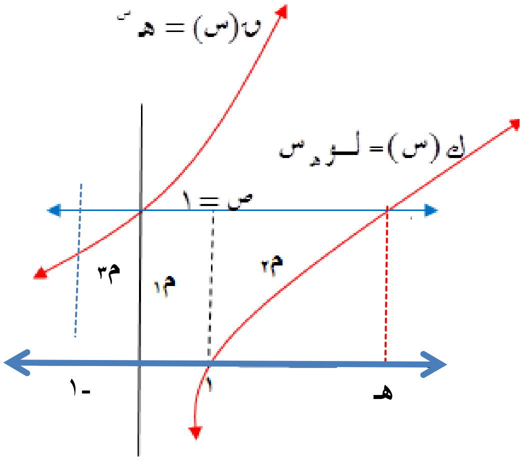
$$=-\left(\frac{(-١)^{٥}-(-٣)^{٥}}{٥}-١٠\times\frac{(-١)^{٣}-(-٣)^{٣}}{٣}+٩\times(-١+٣)\right)=\frac{٣٠٤}{١٥}$$ **وحدة مساحة**

السؤال الرابع :

نجد نقاط التقاطع بين

أولا : ق، ص $\Leftarrow$ هـ^{س} $=$ ١ $\Leftarrow$ س $=$ ٠

ثانيا : ك ، ص $\Leftarrow$ لو$_{هـ}$ س $=$ ١ $\Leftarrow$ س $=$ هـ



م = م١ + م٢ + م٣

م١ $=$ $\int_{٠}^{١}$ ١ ءس $=$ ١(١ $-$ ٠) $=$ ١ **وحدة مساحة**

م٢ $=$ $\int_{١}^{هـ}$ (١ $-$ لو$_{هـ}$ س) ءس $=$ $\int_{١}^{هـ}$ ١ ءس $-$ $\int_{١}^{هـ}$ لو$_{هـ}$ س ءس

$=$ ١(هـ $-$ ١) $-$ $\left($ س لو$_{هـ}$ س $\Big|_{١}^{هـ}$ $-$ $\int_{١}^{هـ}$ س $\times \frac{١}{س}$ ءس $\right)$

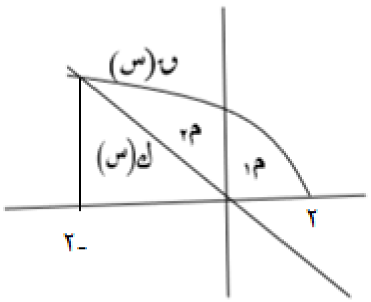
$=$ هـ $-$ ١ $-$ (هـ $-$ ٠ $-$ ١(هـ $-$ ١)) $=$ هـ $-$ ٢ **وحدة مساحة**

م٣ = $\int_{-١}^{٠}$ هـ^{س} ءس $=$ هـ^{س} $\Big|_{-١}^{٠}$ $=$ $\left(١ - \frac{١}{هـ}\right)$

م = م١ + م٢ + م٣ $=$ ١ $+$ هـ $-$ ٢ $+$ ١ $-$ $\frac{١}{هـ}$ $=$ هـ $-$ $\frac{١}{هـ}$ **وحدة مساحة**

السؤال الخامس:

نجد نقاط التقاطع بين ق(س) ، ك(س) $\Leftarrow$ س^{٢} $=$ ٢ $-$ س



$\leftarrow$ س $=$ $^{-}$٢ أو س= ١ **ترفض**

م = م١ + م٢

م١ $=$ $\int_{٠}^{٢}$ ق(س) ءس $=$ $\int_{٠}^{٢}$ $\sqrt{٢ - س}$ ءس

$=$ $\left. \frac{(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times {}^{-}١} \right|_{٠}^{٢}$ $=$ $\frac{^{-}٢}{٣}$ $\times$ $\left(\sqrt{٢ - س}\right)^{٣} \Big|_{٠}^{٢}$

$=$ $\frac{^{-}٢}{٣}$ $\left({}^{-}٢\sqrt{٢}\right)$ $=$ $\frac{٤\sqrt{٢}}{٣}$ **وحدة مساحة**

م٢ $= \int_{٢^-}^{٠} |ق(س) - ك(س)|\, دس = \int_{٢^-}^{٠} \left(\sqrt{٢ - س} - (س^-) \right) دس$

$= \left. \frac{(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times ١^-} \right|_{٢^-}^{٠} + \left. \frac{س^٢}{٢} \right|_{٢^-}^{٠} = \frac{٢^-}{٣}\left(٢\sqrt{٢} - ٨\right) + \frac{٠ - ٤}{٢} = \frac{١٠}{٣} - \frac{٤\sqrt{٢}}{٣}$ **وحدة مساحة**

م= $\frac{٤\sqrt{٢}}{٣} + \frac{١٠}{٣} - \frac{٤\sqrt{٢}}{٣} = \frac{١٠}{٣}$ **وحدة مساحة**

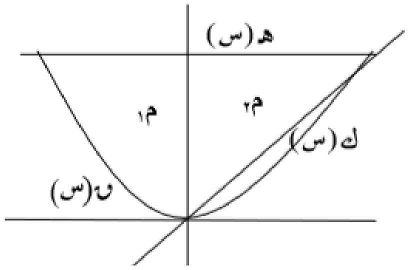
السؤال السادس:

$ق(س) = هـ(س) \leftarrow س = ٢\pm$

$ق(س) = ك(س) \leftarrow س^٢ = ٢س \leftarrow س = ٠$ أو س=٢

$هـ(س) = ك(س) \leftarrow س = ٢$

م = م١ + م٢



م١ $= \int_{٢^-}^{٠} \left(هـ(س) - ق(س) \right) دس = \int_{٢^-}^{٠} \left(٤ - س^٢ \right) دس$

$= ٤(٠ + ٢) + \frac{٠ - (٢^-)}{٣} = ٨ - \frac{٨}{٣} = \frac{١٦}{٣}$ **وحدة مساحة**

م٢ $= \int_{٠}^{٢} \left(هـ(س) - ك(س) \right) دس$

$= \int_{٠}^{٢} (٤ - ٢س)\, دس = ٤(٢ - ٠) - ٢ \times \frac{٤ - ٠}{٢} = ٤$ **وحدة مساحة**

م= $\frac{١٦}{٣} + ٤ = \frac{٢٨}{٣}$ **وحدة مساحة**

تمارين (٥-٤ب) صفحة ٢٠٥

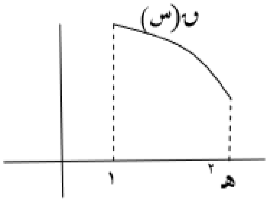
السؤال الأول: $ق(س) = ٤$ **ومحوري السينات والصادات والمستقيم س=٥ حول السينات**

الحل : $ح = \pi \int_{٠}^{٥} ق^٢(س)\, دس = \pi \int_{٠}^{٥} ١٦\, دس$

$= ١٦\pi(٥ - ٠) = ٨٠\pi$ **وحدة حجم**

السؤال الثاني:

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٤}{\sqrt{\text{س}}}$ ومحور السينات والمستقيمين $\text{س} = ١، \text{س} = \text{هـ}^{٢}$ حول السينات

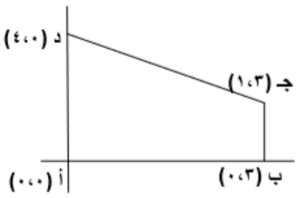


الحل : $\text{ح} = \pi \int_{١}^{\text{هـ}^{٢}} \text{ن}^{٢}(\text{س})\, \text{ءس} = \pi \int_{١}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{١٦}{\text{س}}\, \text{ءس}$

$= ١٦\pi \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\, \text{هـ}^{٢} - \text{لـو}_{\text{هـ}}\, ١\right) = ١٦\pi(٢-٠) = ٣٢\pi$ **وحدة حجم**

السؤال الثالث:

معادلة المستقيم جـ د هي



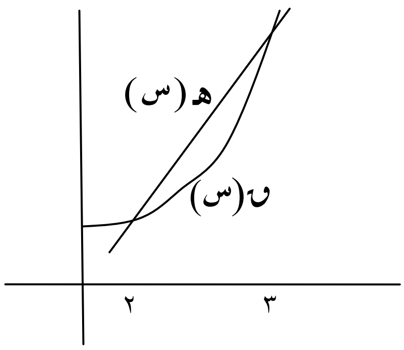
$\frac{\text{ص}-٤}{\text{س}-٠} = \frac{١-٤}{٣-٠} \leftarrow \frac{\text{ص}-٤}{\text{س}-٠} = {}^{-}١ \leftarrow \text{ص} = {}^{-}\text{س} + ٤$

$\text{ح} = \pi \int_{٠}^{٣} \left({}^{-}\text{س}+٤\right)^{٢} \text{ءس} = \left. \frac{\pi\left({}^{-}\text{س}+٤\right)^{٣}}{٣ \times {}^{-}١} \right|_{٠}^{٣}$

$\frac{{}^{-}\pi}{٣}\left(١^{٣} - ٤^{٣}\right) = \frac{٦٣\pi}{٣} = ٢١\pi$ **وحدة حجم**

السؤال الرابع :

$\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٦$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٥\text{س}$ **حول السينات**



الحل : نجد نقاط التقاطع بين $\text{ن}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(\text{س})$

$\text{س}^{٢} + ٦ = ٥\text{س} \leftarrow \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦ = ٠$

$\Leftarrow (\text{س}-٢)(\text{س}-٣) = ٠ \leftarrow \text{س} = ٢ ، \text{س} = ٣$

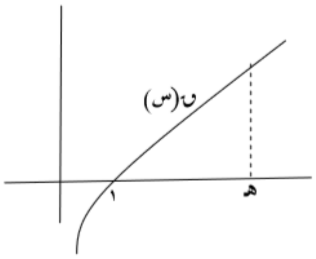
$= \pi \int_{٢}^{٣} \left(\text{هـ}^{٢}(\text{س}) - \text{ن}^{٢}(\text{س})\right) \text{ءس}$

$= \pi \int_{٢}^{٣} \left(٢٥\text{س}^{٢} - \left(\text{س}^{٤} + ١٢\text{س}^{٢} + ٣٦\right)\right) \text{ءس} = \pi \int_{٢}^{٣} \left(١٣\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤} - ٣٦\right) \text{ءس}$

$= \pi\left(١٣ \times \frac{٣^{٣} - ٢^{٣}}{٣} - \frac{٣^{٥} - ٢^{٥}}{٥} - ٣٦(٣-٢)\right) = \frac{٦٢\pi}{١٥}$ **وحدة حجم**

السؤال الخامس:

ق(س)=لـوهـ س ومحور السينات ، س = ١، س = هـ



$$\text{ع} = \pi \int_{١}^{\text{هـ}} \text{ق}^{٢}(\text{س})\,\text{ءس} = \pi \int_{١}^{\text{هـ}} (\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^{٢}\,\text{ءس}$$ **بالتعويض**

نفرض أن

$$\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \Leftarrow \text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}$$

$$\text{ءص} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} \Leftarrow \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = \text{ءس}$$

عندما س=١ ⇐ ص = ٠ ، س=هـ ⇐ ص = ١

$$\text{ع} = \pi \int_{٠}^{١} \text{ص}^{٢} \times \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءس}$$ **تكامل بالأجزاء**

نفرض أن $\text{ق}(\text{س}) = \text{ص}^{٢} \Leftarrow \text{ءق} = ٢\text{ص}\,\text{ءص}$

ونفرض أن $\text{ءو} = \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} \Leftarrow \text{و} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$$\text{ع} = \pi\left(\text{ص}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\Big|_{٠}^{١} - \int_{٠}^{١} ٢\text{ص} \times \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}\right) = \pi\left(\text{هـ} - ٠ - \int_{٠}^{١} ٢\text{ص} \times \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}\right)$$

نجد $\int_{٠}^{١} ٢\text{ص} \times \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$ **بالأجزاء**

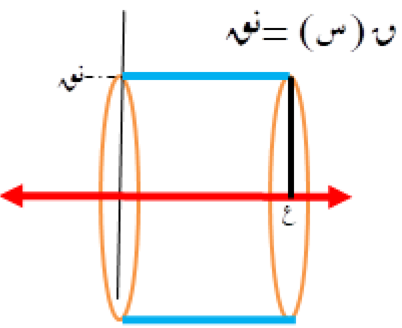
نفرض أن $\text{ق} = ٢\text{ص} \Leftarrow \text{ءق} = ٢\,\text{ءص}$ ، $\text{ءو} = \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} \Leftarrow \text{و} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$$\int_{٠}^{١} ٢\text{ص} \times \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = ٢\text{ص} \times \text{هـ}^{\text{ص}}\Big|_{٠}^{١} - \int_{٠}^{١} ٢\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = ٢\text{هـ} - ٠ - ٢(\text{هـ} - ١) = ٢$$

$$\text{ع} = \pi(\text{هـ} - ٢)$$ **وحدة حجم**

السؤال السادس :

الحل: نجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين ق(س) = نق ومحوري الاحداثيات والمستقيم س = ع دورة كاملة حول محور السينات



$$\text{ع} = \pi \int_{٠}^{\text{ع}} \text{ق}^{٢}(\text{س})\,\text{ءس} = \pi \int_{٠}^{\text{ع}} \text{نق}^{٢}\,\text{ءس}$$

$$= \pi\,\text{نق}^{٢}(\text{ع} - ٠) = \pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع}$$ **وحدة حجم**

السؤال السابع:

$ق(س) = \frac{٤}{\sqrt{س^٢ - ١}}$ **ومحور السينات والمستقيمين**

س=٢ ، س=٣ دورة كاملة حول محور السينات

الحل : $ح = \pi \int_{٢}^{٣} ق^٢(س) ءس = \pi \int_{٢}^{٣} \frac{١٦}{س^٢ - ١} ءس$

$= \pi \int_{٢}^{٣} \frac{١٦}{(س - ١)(س + ١)} ءس$ **تكامل بالكسور الجزئية**

$\frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س + ١} = \frac{١٦}{(س - ١)(س + ١)}$

$\leftarrow أ(س + ١) + ب(س - ١) = ١٦$

عندما $س = ١ \Leftarrow ٢أ = ١٦ \Leftarrow أ = ٨$ ، $س = ^-١ \Leftarrow ^-٢ب = ١٦ \Leftarrow ب = ^-٨$

$ح = \pi \left(\int_{٢}^{٣} \frac{٨}{س - ١} ءس + \int_{٢}^{٣} \frac{^-٨}{س + ١} ءس \right)$

$ح = \pi \left(٨(لـو_هـ(٣ - ١) - لـو_هـ(٢ - ١)) - ٨(لـو_هـ(٣ + ١) - لـو_هـ(٢ + ١)) \right)$

$= ٨\pi لـو_هـ ٣ - ٨\pi لـو_هـ ٢ = ٨\pi(لـو_هـ \frac{٣}{٢})$ **وحدة حجم**

تمارين عامة (الوحدة الخامسة) صفحة ٢٠٦

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الاجابة	ب	أ	ج	أ	د	ج	ب	ب	ج	ج

السؤال الثاني :

$\sigma_{١٢}$ ، $س_٣ = ٧$ ، $[أ، ب]$ جد أ، ب

$س_ر = أ + \frac{ب - أ}{ن} ر$

$س_٦ = أ + \frac{ب - أ}{١٢} \times ٦ \leftarrow ١٢ = أ + \frac{ب - أ}{٢} \leftarrow ٢٤ = أ + ب$ **-----(١)**

$س_٣ = أ + \frac{ب - أ}{١٢} \times ٣ \leftarrow ٧ = أ + \frac{ب - أ}{٤} \leftarrow ٢٨ = ٣أ + ب$ **-----(٢)**

$$٢٨ = ٣أ + ب$$
$$٢٤ = أ + ب$$

$$٤ = ٢أ \leftarrow أ = ٢ \Leftarrow ٢٤ = ٢ + ب \leftarrow ب = ٢٢$$

السؤال الثالث:

$$هـ(س) = ٣ق(س) + س$$

$$م(\sigma_{٤}، ق(س)) = ٦ ،\ س \in [٢، ١٠]$$

$$م(\sigma_{٤}، ق(س)) = \frac{١٠-٢}{٤}\sum_{ر=١}^{٤} ق(س^{*}_{ر}) \Leftarrow ٦ = ٢\sum_{ر=١}^{٤} ق(س_{ر}) \Leftarrow \sum_{ر=١}^{٤} ق(س_{ر}) = ٣$$

$$م(\sigma_{٤}، هـ(س)) = \frac{١٠-٢}{٤}\sum_{ر=١}^{٤} هـ(س^{*}_{ر}) = ٢\sum_{ر=١}^{٤}\left(٣ق(س^{*}_{ر}) + س^{*}_{ر}\right)$$

$$= ٦\sum_{ر=١}^{٤} ق(س_{ر}) + ٢\sum_{ر=١}^{٤} س_{ر} = ٦ \times ٣ + ٢\sum_{ر=١}^{٤}(٢ + ٢ر)$$

$$= ١٨ + ٢\left(٢ \times ٤ + ٢ \times \frac{٤ \times (٤+١)}{٢}\right) = ١٨ + ٥٦ = ٧٤$$

السؤال الرابع:

$$ق(س) = ٣س،[١،٥]، س^{*}_{ر} = س_{ر}$$

$$م(\sigma_{ن}، ق(س)) = \frac{ب-أ}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} ق(س^{*}_{ر})$$

$$= \frac{٥-١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} ٣س_{ر} = \frac{٤}{ن} \times ٣\sum_{ر=١}^{ن}\left(١ + \frac{٤}{ن}ر\right) = \frac{١٢}{ن}\left(ن + \frac{٤}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢}\right)$$

$$= \frac{١٢}{ن}(ن + ٢ن + ٢) = \frac{١٢}{ن}(٣ن + ٢) = ٣٦ + \frac{٢٤}{ن}$$

$$\int_{١}^{٥} ٣س\, دس = \lim_{ق(س) \to \infty} م(\sigma_{ن}، ق(س)) = \lim_{ق(س) \to \infty}\left(٣٦ + \frac{٢٤}{ن}\right) = ٣٦$$

السؤال الخامس :

نفرض أن $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}$ ، $\text{س} \in [{}^{-}٢،٢]$

نجد القيم القصوى

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{{}^{-}\text{س}}{\sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠$ ومنها تكون قيم س الحرجة هي : س=-٢، ٢، ٠

$\text{ق}({}^{-}٢) = \sqrt{٤ - \left({}^{-}٢\right)^{٢}} = ٠$ ، $\text{ق}(٠) = \sqrt{٤ - (٠)^{٢}} = ٢$ ، $\text{ق}(٢) = \sqrt{٤ - (٢)^{٢}} = ٠$

اذن

$$٠ \le \text{ق}(\text{س}) \le ٢ \leftarrow \int_{{}^{-}٢}^{٢} (٠)\,\text{ءس} \le \int_{{}^{-}٢}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \le \int_{{}^{-}٢}^{٢} ٢\,\text{ءس} \leftarrow ٠ \le \int_{{}^{-}٢}^{٢} \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}\,\text{ءس} \le ٨$$

حل آخر: يمكن حل السؤال باستخدام المتباينات

$-٢ \le \text{س} \le ٢$ ومنها $٠ \le \text{س}^{٢} \le ٤$

$-٤ \le -\text{س}^{٢} \le ٠$ وبإضافة ٤ ينتج أن $٠ \le ٤ - \text{س}^{٢} \le ٤$

فيكون $٠ \le \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}} \le ٢$ ومنها $\int_{-٢}^{٢} ٠\,\text{ءس} \le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}\,\text{ءس} \le \int_{-٢}^{٢} ٢\,\text{ءس}$

وينتج أن $٠ \le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}\,\text{ءس} \le ٨$

السؤال السادس :

$$\int_{٠}^{\text{س}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{س}^{٢} - \sqrt{\text{س}} \leftarrow \text{ت}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - \sqrt{\text{س}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{ت}'(\text{س}) = ٢\text{س} - \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} \leftarrow \text{ق}(٤) = ٨ - \frac{١}{٤} = ٧\frac{٣}{٤}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٢ - \frac{١}{٢} \times \frac{{}^{-}١}{٢}\,\text{س}^{\frac{{}^{-}٣}{٢}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٢ + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}} \leftarrow \text{ق}'(٤) = ٢ + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٨} = \frac{٦٥}{٣٢}$$

السؤال السابع:

ت(٢)=٠ ومنها ٨+٤جـ=٠ إذن جـ =-٢

ت(س) متصل عند س=٣

أ) $\underset{\text{س}\to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ت}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ت}(\text{س})$

$٣\text{أ} - \text{ب} = ١٨ + ٢ \times {}^{-}٢ \times ٣ \leftarrow ٣\text{أ} - \text{ب} = ٦$ **------(١)**

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{ت}'(\text{س}) = \begin{cases} ٤\text{س} + {}^{-}٤ \text{،} & ٢ < \text{س} \le ٣ \\ \text{أ} \text{،} & ٣ < \text{س} \le ٥ \end{cases}$$

$\text{ت}'(٣)^{+} = \text{ت}'(٣)^{-} \leftarrow \text{أ} = ٨$ **نعوض قيمة أ في معادلة (١) فنحصل على ما يلي :**

$٣ \times ٨ - \text{ب} = ٦ \leftarrow \text{ب} = ١٨$

ب) $\int_{٢}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{ت}(٤) - \text{ت}(٢) = (٨ \times ٤ - ١٨) - (٠) = ١٤$

السؤال الثامن :

أ) $\int_{١}^{٢} ٥٦(\text{س} - ٢)^{٢}(\text{س} - ١)^{٥}\,\text{دس}$ ، **نفرض ان** $\text{ص} = \text{س} - ١ \leftarrow \text{س} = \text{ص} + ١$

$\text{دص} = \text{دس}$ ، $\text{س} = ١ \leftarrow \text{ص} = ٠$ ، $\text{س} = ٢ \leftarrow \text{ص} = ١$

$$\int_{١}^{٢} ٥٦(\text{س} - ٢)^{٢}(\text{س} - ١)^{٥}\,\text{دس} = \int_{٠}^{١} ٥٦(\text{ص} + ١ - ٢)^{٢}(\text{ص})^{٥}\,\text{دص}$$

$$= \int_{٠}^{١} ٥٦(\text{ص} - ١)^{٢}(\text{ص})^{٥}\,\text{دص} = \int_{٠}^{١} ٥٦(\text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} + ١)\text{ص}^{٥}\,\text{دص}$$

$$= \int_{٠}^{١} \left(٥٦\text{ص}^{٧} - ١١٢\text{ص}^{٦} + ٥٦\text{ص}^{٥}\right)\text{دص} = ٧\text{ص}^{٨} - ١٦\text{ص}^{٧} + \frac{٢٨}{٣}\text{ص}^{٦} \Big|_{٠}^{١} = \frac{١}{٣}$$

ب) $\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} =$ **نفرض ان** $\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \leftarrow \text{دق} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$ ، $\text{دو} = \text{دس}$

$$\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\Big|_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} - \int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{١}{\text{س}} \times \text{س}\,\text{دس} = ٢\text{هـ}^{٢} - \text{هـ} - \text{هـ}^{٢} + \text{هـ} = \text{هـ}^{٢}$$

ج) $$\int_{3}^{5} \frac{\text{س}+5}{\text{س}^2-\text{س}}\,\text{ءس} = \int_{3}^{5} \frac{\text{س}+5}{\text{س}(\text{س}-1)}\,\text{ءس}$$

$$\frac{\text{س}+5}{\text{س}(\text{س}-1)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-1} \leftarrow \text{س}+5 = \text{أ}(\text{س}-1) + \text{ب س}$$

عندما $\text{س} = 0 \leftarrow 5 = -\text{أ} \leftarrow \text{أ} = -5$ ، $\text{س} = 1 \leftarrow 1+5 = \text{ب} \leftarrow \text{ب} = 6$

$$\int_{3}^{5} \frac{\text{س}+5}{\text{س}^2-\text{س}}\,\text{ءس} = \int_{3}^{5} \frac{\text{س}+5}{\text{س}(\text{س}-1)}\,\text{ءس} = \int_{3}^{5} \frac{\text{أ}}{\text{س}}\,\text{ءس} + \int_{3}^{5} \frac{\text{ب}}{\text{س}-1}\,\text{ءس}$$

$$= -\int_{3}^{5} \frac{5}{\text{س}}\,\text{ءس} + \int_{3}^{5} \frac{6}{\text{س}-1}\,\text{ءس} = -5(\text{لو}_{\text{هـ}}5 - \text{لو}_{\text{هـ}}3) + 6(\text{لو}_{\text{هـ}}4 - \text{لو}_{\text{هـ}}2)$$

$$= 5\,\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{3}{5} + 6\,\text{لو}_{\text{هـ}}2$$

د) $$\int_{0}^{2} \sqrt{\text{س}^4+\text{س}^2}\,\text{ءس} = \int_{0}^{2} |\text{س}|\sqrt{\text{س}^2+1}\,\text{ءس} = \int_{0}^{2} \text{س}\sqrt{\text{س}^2+1}\,\text{ءس}$$ **تكامل بالتعويض**

نفرض ان $\text{ص} = \text{س}^2+1 \leftarrow \text{ءص} = 2\text{س ءس} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{2\text{س}}$

عندما $\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 1$ ، **عندما** $\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = 5$ ،

$$\int_{0}^{2} \sqrt{\text{س}^4+\text{س}^2}\,\text{ءس} = \int_{0}^{2} \text{س}\sqrt{\text{س}^2+1}\,\text{ءس} = \int_{1}^{5} \text{س}\sqrt{\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{2\text{س}}$$

$$= \int_{1}^{5} \frac{1}{2}\sqrt{\text{ص}}\,\text{ءص} = \frac{1}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{5} = \frac{1}{3}\left((\sqrt{5})^3 - 1\right)$$

هـ) $$\int_{1}^{2} \frac{1}{\text{س}^2\sqrt{\text{س}^2+1}}\,\text{ءس} = \int_{1}^{2} \frac{1}{\text{س}^3 \times \sqrt{1+\frac{1}{\text{س}^2}}}\,\text{ءس}$$ **تكامل بالتعويض**

نفرض ان $\text{ص} = 1 + \frac{1}{\text{س}^2} \leftarrow \text{ءص} = \frac{-2}{\text{س}^4}\,\text{س ءس} \leftarrow \frac{-\text{س}^3}{2}\,\text{ءص} = \text{ءس}$

$$\int \frac{1}{س^{٢}\sqrt{س^{٢}+١}}\,دس = \int \frac{1}{س^{٣} \times \sqrt{١+\frac{١}{س^{٢}}}}\,دس = \frac{-١}{٢}\int \frac{١}{\sqrt{ص}}\,دص =$$

$$= \frac{-١}{٢}\int ص^{\frac{-١}{٢}}\,دص = -\sqrt{ص}$$

$$\therefore \int_{١}^{٢} \frac{1}{س^{٢}\sqrt{س^{٢}+١}}\,دس = -\sqrt{١+\frac{١}{س^{٢}}}\,\Big|_{١}^{٢} = \frac{-\sqrt{٥}+٢\sqrt{٢}}{٢}$$

السؤال التاسع :

$$\int_{٧}^{٣} ن(س-٢)\,دس = \int_{٥}^{١} ن(س)\,دس$$ **وذلك بفرض ان** $ص = س - ٢ \leftarrow دص = دس$

عندما $س = ٧ \leftarrow ص = ٥$ ، **وعندما** $س = ٣ \leftarrow ص = ١$

$$\int_{٣}^{-١} هـ(س+٢)\,دس = \int_{٥}^{١} هـ(س)\,دس$$ **وذلك بفرض ان** $ص = س + ٢ \leftarrow دص = دس$

عندما $س = ٣ \leftarrow ص = ٥$ ، **وعندما** $س = -١ \leftarrow ص = ١$

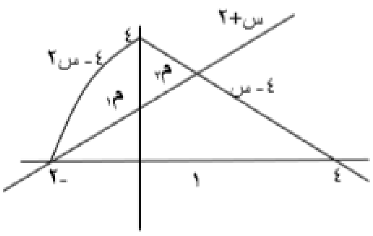
$$ن(س) \le هـ(س) ،\ س \in [١،٥] \leftarrow \int_{١}^{٥} ن(س)\,دس \le \int_{١}^{٥} هـ(س)\,دس$$

$$\leftarrow -\int_{١}^{٥} ن(س)\,دس \ge -\int_{١}^{٥} هـ(س)\,دس \leftarrow \int_{٥}^{١} ن(س)\,دس \ge \int_{٥}^{١} هـ(س)\,دس$$

$$\leftarrow \int_{٧}^{٣} ن(س-٢)\,دس \ge \int_{٣}^{-١} هـ(س+٢)\,دس$$ **وهو المطلوب**

السؤال العاشر :

١) نجد نقاط تقاطع ق(س) ، هـ(س) عندما



$\text{س} \le ٠ \leftarrow \text{س} + ٢ = ٤ - \text{س}^٢ \leftarrow \text{س}^٢ + \text{س} - ٢ = ٠$

$(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١) = ٠ \leftarrow \text{س} = -٢$ ، $\text{س} = ١$ ترفض

$\leftarrow \text{م}_١ = \int_{-٢}^{٠} (٤ - \text{س} - \text{س}^٢ - ٢)\, \text{ءس} = \int_{-٢}^{٠} (٢ - \text{س} - \text{س}^٢)\, \text{ءس}$

$= ٢(٠ + ٢) - \frac{٠ - (-٢)^٣}{٣} - \frac{٠ - (-٢)^٢}{٢} = \frac{١٠}{٣}$ وحدة مساحة

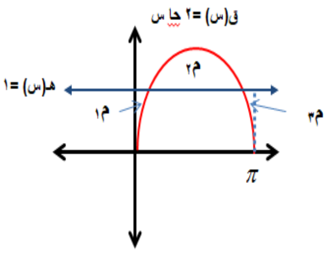
عندما $\text{س} > ٠ \leftarrow \text{س} + ٢ = ٤ - \text{س} \leftarrow ٢\text{س} = ٢ \leftarrow \text{س} = ١$

$\leftarrow \text{م}_٢ = \int_{٠}^{١} (٤ - \text{س} - \text{س} - ٢)\, \text{ءس} = \int_{٠}^{١} (٢ - ٢\text{س})\, \text{ءس}$

$= ٢(١ - ٠) - ٢ \times \frac{١ - ٠}{٢} = ٢ - ١ = ١$ وحدة مساحة

$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ = \frac{١٠}{٣} + ١ = \frac{١٣}{٣}$ وحدة مساحة

٢) $\text{ق(س)} = ٢\text{جاس}$ ، $\text{هـ(س)} = ١$ ، $\text{س} \in [٠، \pi]$



$\text{ق(س)} = \text{هـ(س)} \leftarrow ٢\text{جاس} = ١ \leftarrow \text{جاس} = \frac{١}{٢}$

$\text{س} = \frac{\pi}{٦}$ ، $\text{س} = \frac{٥\pi}{٦}$

$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ + \text{م}_٣$

$\text{م}_١ = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} (١ - ٢\text{جاس})\, \text{ءس} = \text{س} + ٢\text{جتاس} \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} = \frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢$ وحدة مساحة

$$م_٢ = \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{٥\pi}{٦}} (٢جاس - ١)ءس = -٢جتاس - س \Big|_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{٥\pi}{٦}} = ٢\sqrt{٣} - \frac{٢\pi}{٣}$$ وحدة مساحة

$$م_٣ = \int_{\frac{٥\pi}{٦}}^{\pi} (١ - ٢جاس)ءس = س + ٢جتاس \Big|_{\frac{٥\pi}{٦}}^{\pi} = \frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢$$ وحدة مساحة

$$م = ٢(\frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢) + ٢\sqrt{٣} - \frac{٢\pi}{٣} = ٤\sqrt{٣} - \frac{\pi}{٣} - ٤$$ وحدة مساحة

السؤال الحادي عشر :

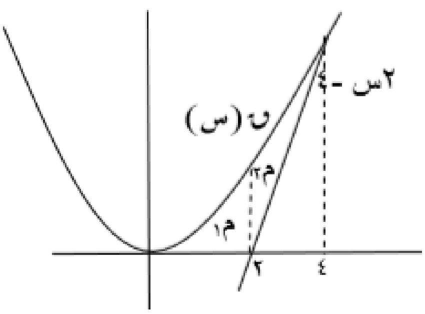
$$\int_{١}^{٣} (جا^٢س + هـ^س)ءس = أ \text{ ، } \int_{١}^{٣} جتا^٢س ءس = ب$$

$$أ + ب = \int_{١}^{٣} (جا^٢س + هـ^س)ءس + \int_{١}^{٣} جتا^٢س ءس$$

$$= \int_{١}^{٣} (جا^٢س + جتا^٢س + هـ^س)ءس$$

$$= \int_{١}^{٣} (١ + هـ^س)ءس = ١(٣ - ١) + هـ^٣ - هـ^١ = ٢ + هـ^٣ - هـ$$

السؤال الثاني عشر :



$ق(س) = \frac{١}{٤}س^٢$ **والمماس المرسوم له عند (٤ ، ٤)**

ومحور السينات

$ق'(س) = \frac{١}{٢}س$ ← **ميل المماس =** $ق'(٤) = ٢$

معادلة المماس هي ص-٤=٢(س-٤)

ص=٢س-٤

م = م١ + م٢

$$م_١ = \int_{٠}^{٢} ق(س)ءس = \int_{٠}^{٢} \frac{١}{٤}س^٢ ءس$$

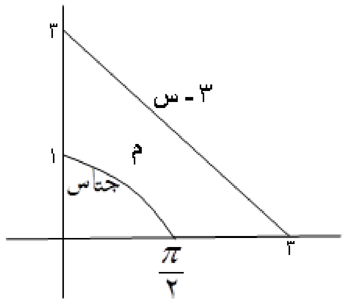
$$= \frac{١}{٤}\left(\frac{٢^{٣}-٠^{٣}}{٣}\right)=\frac{٢}{٣}\ \text{وحدة مساحة}$$

$$\text{م}_{٢} = \int_{٢}^{٤}\left(\text{ق}(\text{س})-\text{ص}\right)\text{ءس} = \int_{٢}^{٤}\left(\frac{١}{٤}\text{س}^{٢}-٢\text{س}+٤\right)\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٤}\times\frac{٤^{٣}-٢^{٣}}{٣}-٢\times\frac{٤^{٢}-٢^{٢}}{٢}+٤(٤-٢)=\frac{٢}{٣}\ \text{وحدة مساحة}$$

$$\text{م} = \frac{٢}{٣}+\frac{٢}{٣}=\frac{٤}{٣}\ \text{وحدة مساحة}$$

السؤال الثالث عشر:



ق(س) = جتاس ، ص = ٣ − س والمحورين الاحداثيين

$$\text{م} = \int_{٠}^{٣}(٣-\text{س})\text{ءس} - \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}\text{جتاس ءس}$$

$$= ٣(٣-٠)-\frac{٣^{٢}-٠^{٢}}{٢}-\left(\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}\right)-\text{جا}(٠)\right)$$

$$= ٩-\frac{٩}{٢}-١=\frac{٧}{٢}\ \text{وحدة مساحة}$$

السؤال الرابع عشر:

أ) ف(٥) = بعد الجسم عن النقطة وعندما ن=٥ ثواني

$$\text{ف}(٥) = \int_{٠}^{٥}\text{ع}(\text{ن})\text{ءن} = \int_{٠}^{٢}٥\text{ن}^{٢}\text{ءن} + \int_{٢}^{٥}(٢٤-٢\text{ن})\text{ءن}$$

$$= ٥\times\frac{٢^{٣}-٠^{٣}}{٣}+٢٤(٥-٢)-٢\times\frac{٢٥-٤}{٢}$$

$$= \frac{٤٠}{٣}+٥١=\frac{٤٠+١٥٣}{٣}=\frac{١٩٣}{٣}\ \text{م}$$

ب) ع(ن) = ٠ **عندما** $٠ \le \text{ن} \le ١٢ \leftarrow ٥\text{ن}^{٢}=٠ \leftarrow \text{ن}=٠$

عندما $٢ < \text{ن} \le ١٢ \leftarrow ٢٤-٢\text{ن}=٠ \leftarrow \text{ن}=١٢$ **يتوقف الجسم عن الحركة عندما ن=١٢**

$$\text{ف}(١٢) = \int_{٠}^{١٢}\text{ع}(\text{ن})\text{ءن} = \int_{٠}^{٢}٥\text{ن}^{٢}\text{ءن} + \int_{٢}^{١٢}(٢٤-٢\text{ن})\text{ءن}$$

$$= \frac{٤٠}{٣}+٢٤٠-١٤٠=\frac{٤٠}{٣}+١٠٠=\frac{٣٤٠}{٣}\ \text{وحدة مسافة}$$

السؤال الخامس عشر:

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$ ، $\text{ق}(\text{س}) \neq ٠$

أ) نفرض ان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) \leftarrow \text{دص} = \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} \leftarrow \text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{ق}'(\text{س})} \leftarrow \text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{ص}}$

$$\int (\text{ق}(\text{س}))^{\text{ن}}\,\text{دس} = \int \text{ص}^{\text{ن}} \times \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \text{ص}^{\text{ن}-١} \times \text{دص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \text{جـ} = \frac{١}{\text{ن}}(\text{ق}(\text{س}))^{\text{ن}} + \text{جـ} : \text{جـ} \in \text{ع}$$

ب) $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) \leftarrow \dfrac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} = ١$

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\,\text{دس} = \int ١\,\text{دس} \leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ق}(\text{س})| = \text{س} + \text{جـ}$$

$$|\text{ق}(\text{س})| = \text{هـ}^{\text{س}+\text{جـ}} \leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \mp \text{أ}\,\text{هـ}^{\text{س}}$$

السؤال السادس عشر :

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \dfrac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{س}+١}\,\text{دس} = \text{أ}$ **ما قيمة** $\int_{٠}^{\pi} \dfrac{\text{جتاس}}{(\text{س}+٢)^{٢}}\,\text{دس}$

نفرض ان $\text{ص} = ٢\text{س} \leftarrow \dfrac{\text{ص}}{٢} = \text{س} \leftarrow \dfrac{\text{دص}}{٢} = \text{دس}$

عندما $\text{س} = \dfrac{\pi}{٢} \leftarrow \text{ص} = \pi$ ، $\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ٠$

$$\text{أ} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{س}+١}\,\text{دس} = \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جاص}}{\frac{\text{ص}}{٢}+١} \times \frac{\text{دص}}{٢} \leftarrow \text{أ} = \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}+٢} \times \text{دص}$$

$\int_{٠}^{\pi} \dfrac{\text{جتاس}}{(\text{س}+٢)^{٢}}\,\text{دس} = \int_{٠}^{\pi} (\text{س}+٢)^{-٢}\,\text{جتاس}\,\text{دس}$ **نكامل بالاجزاء**

نفرض ان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس} \leftarrow \text{دق} = -\text{جاس}\,\text{دس}$

$$\text{ءهـ} = (\text{س}+٢)^{-٢}\,\text{ءس} \leftarrow \text{هـ} = -(\text{س}+٢)^{-١}$$

$$\int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جتاس}}{(\text{س}+٢)^{٢}}\,\text{ءس} = \left.\frac{-\text{جتاس}}{(\text{س}+٢)}\right|_{٠}^{\pi} - \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جاس}}{\text{س}+٢}\,\text{ءس} = \frac{١}{\pi+٢} + \frac{١}{٢} - \text{أ}$$

السؤال السابع عشر:

$$\int_{١}^{٣} \frac{\text{س ك}'(\text{س}) - \text{ك}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \int_{١}^{٣} \frac{\text{س ك}'(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} - \int_{١}^{٣} \frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$$

نكامل الجزء الأول بالأجزاء $\int_{١}^{٣} \frac{\text{س ك}'(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

نفرض أن: $\text{ق} = \frac{١}{\text{س}}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{ك}'(\text{س})\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ءق} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \text{ك}(\text{س})$

فيكون $$\int_{١}^{٣} \frac{\text{س ك}'(\text{س}) - \text{ك}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \left.\frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}}\right|_{١}^{٣} + \int_{١}^{٣} \frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} - \int_{١}^{٣} \frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$$

ومنها $$\int_{١}^{٣} \frac{\text{س ك}'(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \frac{\text{ك}(٣)}{٣} - \frac{\text{ك}(١)}{١} = \frac{٦}{٣} - ٢ = ٠$$

حل آخر: نفرض ان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}} \leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س ك}'(\text{س}) - \text{ك}(\text{س}) \times ١}{\text{س}^{٢}}$

$$\int_{١}^{٣} \frac{\text{س ك}'(\text{س}) - \text{ك}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \int_{١}^{٣} \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ق}(٣) - \text{ق}(١)$$

$$\text{ك}(٣) = ٣\text{ك}(١) = ٦ \leftarrow \text{ك}(٣) = ٣\text{ك}(١) = ٦ \text{ ، } \text{ك}(١) = ٢ \quad \frac{\text{ك}(٣)}{٣} - \frac{\text{ك}(١)}{١} = \frac{٦}{٣} - ٢ = ٠$$

السؤال الثامن عشر :

$\text{س ص} = ٤ + \text{س}^{٢}$ **ومحور السينات و المستقيمين س=١ ، س=٤**

الحل : $\text{س ص} = ٤ + \text{س}^{٢} \leftarrow \text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} = (٤+\text{س}^{٢})^{٢} \leftarrow \text{ص}^{٢} = \frac{١٦ + ٨\text{س}^{٢} + \text{س}^{٤}}{\text{س}^{٢}}$

$$\text{ص}^{٢} = ١٦\,\text{س}^{-٢} + ٨ + \text{س}^{٢}$$

$$\text{ع} = \pi \int_{١}^{٤} \text{ص}^{٢}\,\text{ءس} = \pi \int_{١}^{٤} \left(١٦\,\text{س}^{-٢} + ٨ + \text{س}^{٢}\right) \text{ءس}$$

$$= \pi \left(\frac{-١٦}{\text{س}} + ٨\text{س} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣} \right)\Big|_{١}^{٤} = \pi\left(\left(-٤ + ٣٢ + \frac{٦٤}{٣}\right) - \left(-١٦ + ٨ + \frac{١}{٣}\right)\right)$$

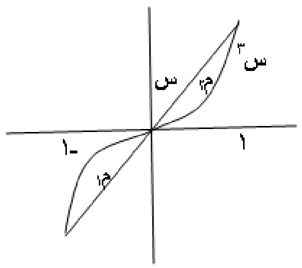
$= ٥٧\pi$ **وحدة حجم**

السؤال التاسع عشر :

$\text{ص}_{١} = \text{ظاس}$ ، $\text{ص}_{٢} = \text{قاس}$ ، $\text{س} = \frac{\pi}{٣}$ ، $\text{س} = \frac{\pi}{٦}$

$\text{ظاس} = \text{قاس} \leftarrow \text{جاس} = ١ \leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٢} \notin \left[\frac{\pi}{٦}, \frac{\pi}{٣}\right]$

$$\text{ع} = \pi \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} \left(\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}\right) \text{ءس} = \pi \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} ١\,\text{ءس} = \pi\left(\frac{\pi}{٣} - \frac{\pi}{٦}\right) = \frac{\pi^{٢}}{٦}$$ **وحدة حجم**



السؤال العشرون :

$$\text{ع} = \text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢} = ٢\text{ع}_{١} = ٢\pi \int_{-١}^{٠} \left((\text{هـ}(\text{س}))^{٢} - (\text{ن}(\text{س}))^{٢}\right) \text{ءس}$$

$$= ٢\pi \int_{٠}^{١} \left(\text{س}^{٢} - \text{س}^{٦}\right) \text{ءس} = ٢\pi \left(\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{س}^{٧}}{٧}\right)\Big|_{٠}^{١} = \frac{٨\pi}{٢١}$$ **وحدة حجم**

السؤال الحادي والعشرون :

معتمدا على الشكل المجاور اوجد $\int_{-١}^{٢} \text{س}\,\text{ن}\left(\text{س}^{٢} - ٣\right) \text{ءس}$ **علما بأن م١=٤ ، م٢=١٢**

الحل : نفرض ان : $ص = س^{٢} - ٣ \leftarrow دص = ٢س\,دس \leftarrow \frac{دص}{٢س} = دس$

عندما س = -١ فان ص = -٢ ، وعندما س = ٢ فان ص = ١

$$\int_{-١}^{٢} ن(س^{٢}-٣)\,س\,دس = \int_{-٢}^{١} س\,ن(ص) \times \frac{دص}{٢س} = \frac{١}{٢}\int_{-٢}^{١} ن(ص)\,دص$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\int_{-٢}^{-١} ن(ص)\,دص + \int_{-١}^{١} ن(ص)\,دص\right) = \frac{١}{٢}\left(م_{١} + {}^{-}م_{٢}\right) = \frac{١}{٢}(٤ - ١٢) = -٤$$

حلول الوحدة السادسة(الأعداد المركبة)

تمارين ومسائل (٦-١) صفحة ٢١٥

السؤال الأول:

١) $٢ + \sqrt{-٢} = ٢ + \sqrt{٢}\,ت$

٢) $\sqrt{-٣٢} + \sqrt{-٢} = \sqrt{٣٢} \times \sqrt{-١} + \sqrt{٢} \times \sqrt{-١}$
$= ٤\sqrt{٢}\,ت + \sqrt{٢}\,ت = ٥\sqrt{٢}\,ت = ٠ + ٥\sqrt{٢}\,ت$

٣) $\sqrt{-٨} \times \sqrt{-٢} = \sqrt{٨} \times \sqrt{-١} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{-١}$
$= ٢\sqrt{٢}\,ت \times \sqrt{٢}\,ت = ٤ت^{٢} = ٤ \times -١ = -٤ = -٤ + ٠ت$

السؤال الثاني:

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$\frac{٢}{٥}ت - ٣ = -٣ + \frac{٢}{٥}ت$	− ٣	$\frac{٢}{٥}$
$\sqrt{-٩} = \sqrt{٩}\,ت = ٠ + ٣ت$	٠	٣
$١ - \sqrt{-١} = ١ - ت$	١	−١
$\sqrt{٩ \times -٤} = \sqrt{٣٦}\,ت = ٠ + ٦ت$	٠	٦

$−٢ت = ٠ − ٢ ت$	٠	−٢
$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} + ٠ت$	$\frac{١}{٣}$	٠

السؤال الثالث:

البرهان : الطرف الأيمن :

$$= (١ + ت + ت^{٢})^{٣} (١ − ت + ت^{٢})^{٣}$$
$$= (١ + ت − ١)^{٣} (١ − ت − ١)^{٣}$$
$$= (ت)^{٣} (−ت)^{٣}$$
$$= −ت^{٦} = −(ت^{٢})^{٣} = ١$$

= الطرف الأيسر

السؤال الرابع:

١) $ت^{٤٣} = ت^{٤٠} × ت^{٣} = (ت^{٢})^{٢٠} × −ت = ١ × −ت = −ت$

٢) $\frac{١}{ت^{٦٥}} = ت^{−٦٥} = ت^{−٦٨} × ت^{٣} = (ت^{٢})^{−٣٤} × −ت$
$= ١ × −ت = −ت$

٣) $ت^{٢٧} + \frac{١}{ت^{٢٧}} = ت^{٢٧} + ت^{−٢٧} = ت^{٢٤} × ت^{٣} + ت^{−٢٨} × ت$
$= (ت^{٢})^{١٢} × −ت + (ت^{٢})^{−١٤} × ت = −ت + ت = ٠ = ٠ + ٠ت = ٠$

السؤال الخامس:

البرهان : الطرف الأيمن=

$$\frac{١ + ٢ت^{٢} + ت^{٣} + ٢ت}{ت^{٣} + ت^{٤}} = \frac{١ + ٢ × −١ + −ت + ٢ت}{ت^{٣}(١ + ت)}$$
$$= \frac{−١ + ت}{−ت − ت^{٢}} = \frac{−١(١ − ت)}{١ − ت} = −١$$

= الطرف الأيسر

تمارين ومسائل (٦-٢) صفحة ٢٢٠

السؤال الأول:

أ) ٤(٢ + ٤ت) + ٥(٣ − ٢ت)

= ٨ + ١٦ت + ١٥ − ١٠ت = ٢٣ + ٦ت

ب)

(٣ + ٤ت)(٣ − ٥ت)

= ٩ − ١٥ت + ١٢ت − ٢٠ت^{٢}

= ٩ − ٣ت − ٢٠ × −١ = ٢٩ − ٣ت

ج)

(٣ + ٤ت)^{٣} = (٣ + ٤ت)^{٢} (٣ + ٤ت)

= (٩ + ٢٤ت + ١٦ت^{٢})(٣ + ٤ت)

= (٩ − ١٦ + ٢٤ت)(٣ + ٤ت)

= (−٧ + ٢٤ت)(٣ + ٤ت)

= −٢١ − ٢٨ت + ٧٢ت + ٩٦ت^{٢}

= −٢١ − ٩٦ + ٤٤ت = −١١٧ + ٤٤ت

د) ٤ت(١ − ٥ت)^{٢} = ٤ت(١ − ١٠ت + ٢٥ت^{٢})

= ٤ت(١ − ٢٥ − ١٠ت) = ٤ت(−٢٤ − ١٠ت)

= −٩٦ت − ٤٠ت^{٢} = ٤٠ − ٩٦ت

و) (١ − ت)^{٦} = ((١ − ت)^{٢})^{٣} = (١ − ٢ت + ت^{٢})^{٣}

= (١ − ٢ت − ١)^{٣} = (−٢ت)^{٣} = −٨ت^{٣}

= −٨ × −ت = ٨ت = ٨ت

السؤال الثاني:

س + ٢ست = −٥(س − ٤ت)

بوضع س = أ + بت

⇐ أ + بت + ٢ت(أ + بت) = −٥(أ + بت − ٤ت)

أ + بت + ٢أت − ٢ب = أ − ٢ب + ت(٢أ + ب) =

= −٥أ + (−٥ب + ٢٠)ت

⇐ أ − ٢ب = −٥أ

∴ ٦أ = ٢ب ⇐ ب = ٣أ

⇐ ب + ٢أ = −٥ب + ٢٠
∴ ٦ب + ٢أ = ٢٠ ⇐ أ + ٣ب = ١٠
∴ أ + ٣ × ٣أ = ١٠ ⇐ ١٠أ = ١٠
⇐ أ = ١، ب = ٣ ∴ س = ١ + ٣ت

السؤال الثالث:

س − ص − ٢ = ص^{٢} ت − س ت
∴ س + س ت = ص + ٢ + ص^{٢} ت
∴ س = ص + ٢ ⇐ س − ص = ٢

، س = ص^{٢} ⇐ ص + ٢ = ص^{٢}
⇐ ص^{٢} − ص − ٢ = ٠
(ص − ٢)(ص + ١) = ٠
∴ ص = ٢ ⇐ س = ٤

، ص = −١ ⇐ س = ١

السؤال الرابع:

الطرف الأيمن= ع^{٥} + ع^{٢}

= ت^{٥} + ت^{٢} = ت + −١

الطرف الأيسر = ع − ١ = ت + −١

السؤال الخامس:

الطرف الأيمن= ع^{٢} + ٢ع + ٢

= (−١ + ت)^{٢} + ٢(−١ + ت) + ٢
= ١ + ت^{٢} − ٢ت − ٢ + ٢ت + ٢
= ١ − ١ − ٢ت − ٢ + ٢ت + ٢ = ٠
= **الطرف الأيسر**

السؤال السادس:

ت ÷ (ت + ٣) = (١ + ٣ت) ÷ أ
⇐ أت = (ت + ٣)(١ + ٣ت)
أت = ت + ٣ت^{٢} + ٣ + ٩ت
أت = ١٠ت − ٣ + ٣
⇐ أت = ١٠ت ⇐ أ = ١٠

السؤال السابع:

١) $\left(٢+\sqrt{٢}\,\text{ت}\right)^{-١} = \text{س} + \text{ص}\,\text{ت}$

$\Leftarrow \left(٢+\sqrt{٢}\,\text{ت}\right)\left(\text{س}+\text{ص}\,\text{ت}\right) = ١$

$\left(٢\text{س} + ٢\text{ص}\,\text{ت} + \sqrt{٢}\,\text{س}\,\text{ت} + \sqrt{٢}\,\text{ص}\,\text{ت}^{٢}\right) = ١ + ٠\text{ت}$

$٢\text{س} - \sqrt{٢}\,\text{ص} + \left(٢\text{ص} + \sqrt{٢}\,\text{س}\right)\text{ت} = ١ + ٠\text{ت}$

$\therefore ٢\text{ص} + \sqrt{٢}\,\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = -\sqrt{٣}\,\text{س}$

$٢\text{س} - \sqrt{٢}\,\text{ص} = ١ \Leftarrow ٢\text{س} - ٢\sqrt{٣} \times -\sqrt{٣}\,\text{س} = ١$

$\therefore ٢\text{س} + ٦\text{س} = ١ \Leftarrow ٨\text{س} = ١ \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٨}$ ، $\text{ص} = -\sqrt{٣} \times \frac{١}{٨} = \frac{-\sqrt{٣}}{٨}$

$\therefore \left(٢+\sqrt{٢}\,\text{ت}\right)^{-١} = \frac{١}{٨} - \frac{\sqrt{٣}}{٨}\text{ت}$

يمكن استخدام قاعدة النظير الضربي مباشرة

٢) $\left(\frac{\text{ت}}{\text{ت}-٣}\right)^{-١} = \text{س} + \text{ص}\,\text{ت}$

$\Leftarrow \left(\frac{\text{ت}}{\text{ت}-٣}\right)\left(\text{س}+\text{ص}\,\text{ت}\right) = ١$

$\text{ت}\left(\text{س}+\text{ص}\,\text{ت}\right) = \text{ت} - ٣$

$\text{ت}\,\text{س} + \text{ص}\,\text{ت}^{٢} = \text{ت} - ٣$

$\therefore \text{ت}\,\text{س} - \text{ص} = \text{ت} - ٣$

$\therefore \text{س} = ١$ ، $\text{ص} = ٣$

$\therefore \left(\frac{\text{ت}}{\text{ت}-٣}\right)^{-١} = ١ + ٣\text{ت}$

٣) $\left(\left(١+\text{ت}\right)^{١٣}\right)^{-١} = \left(١+\text{ت}\right)^{-١٣}$

$= \left(١+\text{ت}\right)^{-١٤} \times \left(١+\text{ت}\right)$

$= \left(\left(١+\text{ت}\right)^{٢}\right)^{-٧} \times \left(١+\text{ت}\right)$

$= \left(١+٢\text{ت}+\text{ت}^{٢}\right)^{-٧} \times \left(١+\text{ت}\right)$

$= \left(٢\text{ت}\right)^{-٧} \times \left(١+\text{ت}\right)$

$= \frac{١}{١٢٨} \times \text{ت}^{-٨} \times \text{ت} \times \left(١+\text{ت}\right)$

$= \frac{\text{ت}}{١٢٨} \times \left(١+\text{ت}\right) = \frac{-١}{١٢٨} + \frac{١}{١٢٨}\text{ت}$

السؤال الثامن:

بجمع المعادلتين ينتج أن:

$$٣ع_١ = \left(-\sqrt{٨} + \sqrt{٥٠}\right)ت = \left(-٢\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢}\right)ت = ٣\sqrt{٢}ت$$

$$\Leftarrow ع_١ = \sqrt{٢}ت$$

بالتعويض في المعادلة الأولى ينتج أن:

$$\sqrt{٢}ت + ٣ع_٢ = -\sqrt{٨}ت \Leftarrow ٣ع_٢ = -\sqrt{٨}ت - \sqrt{٢}ت$$

$$\Leftarrow ٣ع_٢ = -٢\sqrt{٢}ت - \sqrt{٢}ت = -٣\sqrt{٢}ت$$

$$\Leftarrow ع_٢ = -\sqrt{٢}ت$$

تمارين ومسائل (٣-٦) صفحة ٢٢٦

السؤال الأول:

$$١ + \sqrt{-٤} = ١ + ٢ت$$

$$\therefore \left|١ + \sqrt{-٤}\right| = |١ + ٢ت|$$

$$= \sqrt{١^٢ + ٢^٢} = \sqrt{١ + ٤}$$

$$= \sqrt{٥}$$

السؤال الثاني:

أ) $|-٣ع_١| = |-٣ - ٣ت| = \sqrt{(-٣)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{٩ + ٩} = \sqrt{١٨}$

ب) $ع_١ \overline{ع_١} = (١ + ت)(١ - ت) = ١ - ت^٢ = ٢$

$$\left|\frac{١}{٢} ع_١ \overline{ع_١}\right| = \left|\frac{١}{٢} \times ٢\right| = |١| = ١$$

حل آخر:

$$\left|\frac{١}{٢} ع_١ \overline{ع_١}\right| = \left|\frac{١}{٢}\left((١)^٢ + (١)^٢\right)\right|$$

$$= \sqrt{\frac{١}{٢} \times ٢} = \sqrt{١} = ١$$

ج) $\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{١ - ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{١ + ت^٢ - ٢ت}{١ + ١}$

$$= \frac{-٢ت}{٢} = -ت$$

$$\therefore \left|\frac{\text{ع}_٢}{\text{ع}_١}\right| = |-\text{ت}| = \sqrt{(٠)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{١} = ١$$

د) $\text{ع}_١\text{ع}_٢ = (١+\text{ت})(١-\text{ت}) = ١ - \text{ت}^٢ = ٢$

$$|٢\text{ع}_١\text{ع}_٢| = |٢\times٢| = |٤| = \sqrt{(٤)^٢ + (٠)^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$$

حل آخر:

$$|٢\text{ع}_١\text{ع}_٢| = \left|٢\left((١)^٢ + (١)^٢\right)\right| = |٢\times٢|$$

$$= |٤| = \sqrt{(٤)^٢ + (٠)^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$$

السؤال الثالث: $\text{ع} = \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}\text{ت}$

اولا: $\text{ع}^{-١} = \dfrac{١}{\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}\text{ت}} = \dfrac{٥}{٣-٤\text{ت}} \times \dfrac{٣+٤\text{ت}}{٣+٤\text{ت}}$

$$= \frac{١٥+٢٠\text{ت}}{٩+١٦} = \frac{١٥}{٢٥} + \frac{٢٠}{٢٥}\text{ت} = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}\text{ت}$$

ثانيا: $(٣\text{ع})^{-١} = \left(\frac{٩}{٥} - \frac{١٢}{٥}\text{ت}\right)^{-١} = \dfrac{١}{\frac{٩}{٥} - \frac{١٢}{٥}\text{ت}}$

$$= \frac{٥}{٩-١٢\text{ت}} \times \frac{٩+١٢\text{ت}}{٩+١٢\text{ت}} = \frac{٤٥+٦٠\text{ت}}{٨١+١٤٤}$$

$$= \frac{٤٥}{٢٢٥} + \frac{٦٠}{٢٢٥}\text{ت} = \frac{٣}{١٥} + \frac{٤}{١٥}\text{ت} = \frac{١}{٣}\text{ع}^{-١}$$

ثالثا: $|\text{ع}^{-١}| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٥}\right)^٢} = \sqrt{\frac{٩+١٦}{٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٢٥}} = \sqrt{١} = ١$

رابعا: $\left|\dfrac{\bar{\text{ع}}}{٥}\right| = \left|\frac{١}{٥}\overline{\left(\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}\text{ت}\right)}\right| = \left|\frac{١}{٥}\left(\frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}\text{ت}\right)\right|$

$$= \left|\frac{٣}{٢٥} + \frac{٤}{٢٥}\text{ت}\right| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٢٥}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٢٥}\right)^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{٩}{٦٢٥} + \frac{١٦}{٦٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٦٢٥}} = \sqrt{\frac{١}{٢٥}} = \frac{١}{٥}$$

السؤال الرابع:

أ) $$\frac{-١+\sqrt{٢}\,\text{ت}}{٢+\text{ت}} = \frac{-١+\sqrt{٢}\,\text{ت}}{٢+\text{ت}} \times \frac{٢-\text{ت}}{٢-\text{ت}}$$

$$= \frac{-٢+\text{ت}+٢\sqrt{٢}\,\text{ت}-\sqrt{٢}\,\text{ت}^{٢}}{٤+١}$$

$$= \frac{-٢+\sqrt{٢}}{٥} + \frac{١+٢\sqrt{٢}}{٥}\,\text{ت}$$

ب) $$\frac{٣+٤\text{ت}}{٣-٥\text{ت}} + \frac{٢+٣\text{ت}}{٢-٣\text{ت}} = \frac{٣+٤\text{ت}}{٣-٥\text{ت}} \times \frac{٣+٥\text{ت}}{٣+٥\text{ت}} + \frac{٢+٣\text{ت}}{٢-٣\text{ت}} \times \frac{٢+٣\text{ت}}{٢+٣\text{ت}}$$

$$= \frac{٩+٢٧\text{ت}+٢٠\text{ت}^{٢}}{٩+٢٥} + \frac{٤+١٢\text{ت}+٩\text{ت}^{٢}}{٤+٩}$$

$$= \frac{-١١+٢٧\text{ت}}{٣٤} + \frac{-٥+١٢\text{ت}}{١٣}$$

$$= \frac{-١٤٣+٣٥١\text{ت}-١٧٠+٤٠٨\text{ت}}{٤٤٢}$$

$$= \frac{-٣١٣}{٤٤٢} + \frac{+٧٥٩}{٤٤٢}\,\text{ت}$$

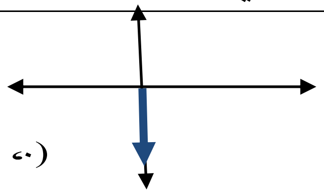
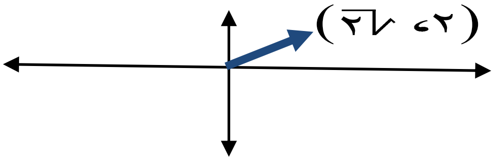
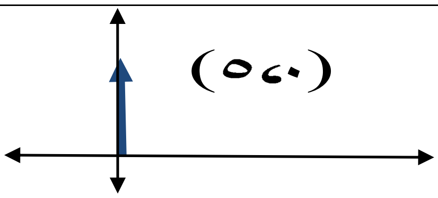
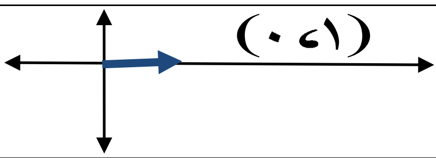
السؤال الخامس: **نفرض أن:** $\text{ع} = \text{أ} + \text{ب}\,\text{ت}$

الطرف الأيمن= $\text{ع}-١ = \text{أ}+\text{ب}\,\text{ت}-١ \Leftarrow |\text{ع}-١| = \sqrt{(\text{أ}-١)^{٢}+\text{ب}^{٢}}$

الطرف الأيسر= $\bar{\text{ع}}-١ = \text{أ}-\text{ب}\,\text{ت}-١ \Leftarrow |\bar{\text{ع}}-١| = \sqrt{(\text{أ}-١)^{٢}+(-\text{ب})^{٢}} = \sqrt{(\text{أ}-١)^{٢}+\text{ب}^{٢}}$

أي ان $|\text{ع}-١| = |\bar{\text{ع}}-١|$

السؤال السادس

تمثيل في مستوى الأعداد المركبة	العدد
 (٠، −١)	ت^٣٥ = ت^٣٢ × ت^٣ = ١ × −ت = −ت = ٠ − ت = (٠، −١)
 (٢، √٢)	٢ + √−٢ = ٢ + √٢ ت = (٢، √٢)
 (٠، ٥)	√−٤ + √−٩ = √٤ × √−١ + √٩ × √−١ = ٢ت + ٣ت = ٥ت = ٠ + ٥ت = (٠، ٥)
 (١، ٠)	١ / ت^٥٢ = ت^−٥٢ = (ت^٢)^−٢٦ = ١

السؤال السابع:

∵ ع^٢ = (ع̄)^٢ ⟸ (أ + ب ت)^٢ = (أ − ب ت)^٢

⟸ أ^٢ − ب^٢ + ٢أب ت = أ^٢ − ب^٢ − ٢أب ت

∴ ٢أب = −٢أب ⟸ ٤أب = ٠

∴ أ = ٠   ∴ ع = ب ت   **(عدد تخيلي)**

أو   ب = ٠   ∴ ع = أ   **(عدد حقيقي)**

السؤال الثامن:

أ) ع = −١ + ت

|ع| = √((−١)^٢ + (١)^٢) = √٢

جتاهـ = −١ / √٢ ، جاهـ = ١ / √٢ ،

∴ هـ = ٣π/٤ ومنها ع = √٢ (جتا ٣π/٤ + ت جا ٣π/٤)

ب) $\text{ع} = \frac{-١}{٢} + ٠\text{ت}$

$$|\text{ع}| = \sqrt{\left(\frac{-١}{٢}\right)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{\frac{١}{٤}} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ظاهـ} = \frac{٠}{\frac{-١}{٢}} = ٠ \qquad \therefore \text{هـ} = \pi$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{١}{٢}\left(\text{جتا}\,\pi + \text{ت}\,\text{جا}\,\pi\right)$$

ج)

$$\text{ع} = -\tfrac{١}{٢} + \tfrac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت} \quad ، \quad |\text{ع}| = ١$$

$$\text{جتاهـ} = -\tfrac{١}{٢} \text{ ،جاهـ} = \tfrac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow \text{هـ} = \tfrac{٢}{٣}\pi$$

$$\text{ع} = \left(\text{جتا}\,\tfrac{٢}{٣}\pi + \text{ت جا}\,\tfrac{٢}{٣}\pi\right)$$

السؤال التاسع:

ا)

$$\text{ع} = ٧\left(\text{جتا}\frac{٣\pi}{٤} + \text{ت جا}\frac{٣\pi}{٤}\right) = ٧\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{ت}\right)$$

$$= \frac{-٧}{\sqrt{٢}} + \frac{٧}{\sqrt{٢}}\text{ت}$$

ب)

$$\text{ع} = ٣\left(\text{جتا}\frac{-\pi}{٦} + \text{ت جا}\frac{-\pi}{٦}\right) = ٣\,\text{جتا}\frac{\pi}{٦} - ٣\text{ت جا}\frac{\pi}{٦}$$

$$= ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - ٣ \times \frac{١}{٢}\text{ت} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٣}{٢}\text{ت}$$

ج)

$$\text{ع} = ٢\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} - \text{ت جا}\frac{\pi}{٤}\right) = ٢\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{ت}\right)$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} - \frac{٢}{\sqrt{٢}}\text{ت} = \sqrt{٢} - \sqrt{٢}\,\text{ت}$$

د) $ع = ٣\left(جتا\frac{\pi}{٣} + ت\,جا\frac{\pi}{٣}\right) = ٣\left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right)$

$= \frac{٣}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}ت$

تمارين ومسائل (٤-٦) صفحة ٢٢٩

السؤال الأول:

أ) $ع^{٣} + ١ = ٠ \Leftarrow (ع+١)(ع^{٢} - ع + ١) = ٠$

$\therefore ع = -١$ أو، $ع = \frac{١ \pm \sqrt{١ - ٤\times١\times١}}{٢} = \frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

الحلول = $\left\{-١ ، \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت ، \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right\}$

ب) $(ع+١)^{٢} = ع \Leftarrow ع^{٢} + ٢ع + ١ = ع$

$\Leftarrow ع^{٢} + ع + ١ = ٠$

$\Leftarrow ع = \frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤\times١\times١}}{٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{٣}ت}{٢}$

الحلول = $\left\{\frac{-١ - \sqrt{٣}ت}{٢} ، \frac{-١ + \sqrt{٣}ت}{٢}\right\}$

ج) $(٣ - ٤ت)ع^{٢} = ت\,ع \Leftarrow ع\left((٣ - ٤ت)ع - ت\right) = ٠$

$\therefore ع = ٠$ أ، $(٣ - ٤ت)ع = ت$

$\Leftarrow ع = \frac{ت}{٣ - ٤ت} = \frac{ت}{٣ - ٤ت} \times \frac{٣ + ٤ت}{٣ + ٤ت} = \frac{-٤ + ٣ت}{٢٥}$

الحلول هي: $\left\{٠ ، \frac{-٤ + ٣ت}{٢٥}\right\}$

السؤال الثاني: تكون المعادلة على الصورة

$س^{٢}$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهما = ٠

مجموع الجذرين = ٣+٢ت ، حاصل ضربهما =٥+٥ت

المعادلة هي $س^{٢} - (٣ + ٢ت)س + ٥ + ٥ت = ٠$ يوجد طرق اخرى

السؤال الثالث:

أ) (س + ص ت)^{٢} = $\frac{١}{٤}$ ⟸ س^{٢} + ٢س ص ت − ص^{٢} = $\frac{١}{٤}$

⟸ س^{٢} − ص^{٢} = $\frac{١}{٤}$ أو ٢س ص = ٠

إما س = ٠ **مرفوض** أو ص = ٠ ⟸ س^{٢} = $\frac{١}{٤}$ ∴ س = ±$\frac{١}{٢}$

الجذور = $\left(\frac{١}{٢} + ٠\text{ت}\right)$، $\left(-\frac{١}{٢} + ٠\text{ت}\right)$

ب) (س + ص ت)^{٢} = −٤٩ ⟸ س^{٢} + ٢س ص ت − ص^{٢} = −٤٩ + ٠ت

⟸ س^{٢} − ص^{٢} = −٤٩   أو ٢س ص = ٠

إما ص = ٠ **مرفوض** أو س = ٠ ⟸ −ص^{٢} = −٤٩ ∴ ص = ±٧

الجذور = (٠ − ٧ت)، (٠ + ٧ت)

ج) (س + ص ت)^{٢} = ٢١ − ٢٠ت ⟸ س^{٢} + ٢س ص ت − ص^{٢} = ٢١ − ٢٠ت

∴ س^{٢} − ص^{٢} = ٢١

أو ٢س ص = −٢٠ ⟸ س ص = −١٠ ⟸ ص = $\frac{-١٠}{\text{س}}$

∴ س^{٢} − $\left(\frac{-١٠}{\text{س}}\right)^{٢}$ = ٢١ ⟸ س^{٢} − $\frac{١٠٠}{\text{س}^{٢}}$ = ٢١

⟸ س^{٤} − ٢١س^{٢} − ١٠٠ = ٠ ⟸ س^{٤} − ١٠٠ = ٢١س^{٢}

⟸ (س^{٢} + ٤)(س^{٢} − ٢٥) = ٠

∴ س^{٢} = −٤ ⟸ س = ±$\sqrt{-٤}$ = ±٢ت **مرفوض**

أو س^{٢} = ٢٥ ⟸ س = ±$\sqrt{٢٥}$ = ±٥   **بالتعويض ينتج أن:**

ص = $\frac{-١٠}{±٥}$ = ∓٢

الجذور = (٥ − ٢ت)، (−٥ + ٢ت)

السؤال الرابع:

الطرف الأيسر= $(\text{ع}^2-\sqrt{2}\,\text{ع}+1)(\text{ع}^2+\sqrt{2}\,\text{ع}+1)$

$$=(\text{ع}^2-\sqrt{2}\,\text{ع})(\text{ع}^2+\sqrt{2}\,\text{ع}+1)+(\text{ع}^2+\sqrt{2}\,\text{ع}+1)$$

$$=(\text{ع}^2-\sqrt{2}\,\text{ع})(\text{ع}^2+\sqrt{2}\,\text{ع})+(\text{ع}^2-\sqrt{2}\,\text{ع})+(\text{ع}^2+\sqrt{2}\,\text{ع}+1)$$

$$=\text{ع}^4-2\text{ع}^2+\text{ع}^2-\sqrt{2}\,\text{ع}+\text{ع}^2+\sqrt{2}\,\text{ع}+1$$

$=\text{ع}^4+1$ **=الطرف الأيمن**

ولحل المعادلة $\text{ع}^4+1=0$ **في ك نضع** $(\text{ع}^2-\sqrt{2}\,\text{ع}+1)(\text{ع}^2+\sqrt{2}\,\text{ع}+1)=0$

ومنها $(\text{ع}^2-\sqrt{2}\,\text{ع}+1)=0$

$$\Leftarrow \text{ع}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4\times1\times1}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,\text{ت}}{2}$$

أو $(\text{ع}^2+\sqrt{2}\,\text{ع}+1)=0$

$$\Leftarrow \text{ع}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4\times1\times1}}{2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,\text{ت}}{2}$$

إذن حلول المعادلة هي: $\left\{\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,\text{ت}}{2}\text{ ، }\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,\text{ت}}{2}\right\}$

تمارين عامة/ الأعداد المركبة صفحة ٢٣٠

السؤال الأول:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الإجابة	ج	ج	أ	د	أ	ب	ب	أ	د

السؤال الثاني:

أ) $|\text{ع}_1|=|1+2\text{ت}|=\sqrt{(1)^2+(2)^2}=\sqrt{5}$

ب) $|\text{ع}_2|=|2-\text{ت}|=\sqrt{(2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

ج) $|\text{ع}_1+\text{ع}_2|=|3+\text{ت}|=\sqrt{(3)^2+(1)^2}=\sqrt{10}$

د) $|\text{ع}_1|+|\text{ع}_2|=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}=\sqrt{20}$ **نلاحظ أن:** $|\text{ع}_1+\text{ع}_2|\neq|\text{ع}_1|+|\text{ع}_2|$

السؤال الثالث:

أ) $\text{ع} + ٣\text{ت}\,\text{ع} = \text{ت} \Leftarrow \text{ع}(١ + ٣\text{ت}) = \text{ت}$

$$\Leftarrow \text{ع} = \frac{\text{ت}}{١ + ٣\text{ت}} = \frac{\text{ت}}{١ + ٣\text{ت}} \times \frac{١ - ٣\text{ت}}{١ - ٣\text{ت}}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{٣ + \text{ت}}{١ + ٩} = \frac{٣}{١٠} + \frac{١}{١٠}\text{ت}$$

ب) $\text{ع}^٣ + \text{ع}^٢ + \text{ع} + ١ = ٠ \Leftarrow \text{ع}^٢(\text{ع} + ١) + ١(\text{ع} + ١) = ٠$

$$\Leftarrow (\text{ع} + ١)(\text{ع}^٢ + ١) = ٠$$

$$\therefore \text{ع} = -١ \quad \text{أو} \quad \text{ع}^٢ = -١ \Leftarrow \text{ع} = \pm\sqrt{-١} = \pm\text{ت}$$

الحلول = $\{-١، \text{ت}، -\text{ت}\}$

ج) $\text{ع}^٤ + ٥\text{ع}^٢ + ٤ = ٠ \Leftarrow (\text{ع}^٢ + ٤)(\text{ع}^٢ + ١) = ٠$

$$\Leftarrow (\text{ع}^٢ - ٤\text{ت}^٢)(\text{ع}^٢ - \text{ت}^٢) = ٠$$

ومنها $\text{ع}^٢ = ٤\text{ت}^٢ \Leftarrow \text{ع} = \pm٢\text{ت}$

أو $\text{ع}^٢ = \text{ت}^٢ \Leftarrow \text{ع} = \pm\text{ت}$

السؤال الرابع: $(\text{س} + \text{ص}\,\text{ت})^٢ = ٥ + ١٢\text{ت} \Leftarrow \text{س}^٢ + ٢\text{س}\text{ص}\text{ت} - \text{ص}^٢ = ٥ + ١٢\text{ت}$

$$\therefore \text{س}^٢ - \text{ص}^٢ = ٥ \quad \ldots\ldots \quad (١)$$

أو $٢\text{س}\text{ص} = ١٢ \Leftarrow \text{س}\text{ص} = ٦ \Leftarrow \text{ص} = \frac{٦}{\text{س}}$

بالتعويض في (١)

$$\therefore \text{س}^٢ - \frac{٣٦}{\text{س}^٢} = ٥ \Leftarrow \text{س}^٤ - ٥\text{س}^٢ - ٣٦ = ٠$$

$$\therefore (\text{س}^٢ + ٤)(\text{س}^٢ - ٩) = ٠ \Leftarrow (\text{س}^٢ - ٤\text{ت}^٢)(\text{س}^٢ - ٩) = ٠$$

ومنها $\text{س}^٢ = ٤\text{ت}^٢ \Leftarrow \text{س} = \pm٢\text{ت}$ **مرفوض لأن س عدد حقيقي**

أو $\text{س}^٢ = ٩ \Leftarrow \text{س} = \pm٣ \Leftarrow \text{ص} = \frac{٦}{\pm٣} = \pm٢$

الجذور = $\{٣ + ٢\text{ت}، -٣ - ٢\text{ت}\}$

السؤال الخامس:

$$\because س^{٢} + س + (ص - ١)ت = -تس^{٢}$$

$$\therefore س^{٢} + س + \left(ص + س^{٢} - ١\right)ت = ٠$$

ومنها $س^{٢} + س = ٠$ ، $ص + س^{٢} - ١ = ٠ \Leftarrow ص = ١ - س^{٢}$

$\Leftarrow س(س + ١) = ٠$

إذن إما $س = ٠ \Leftarrow ص = ١$

أو $س = -١ \Leftarrow ص = ٠$

الحلول هي $(٠،١)$، $(-١،٠)$

السؤال السادس:

أ) $ل = \dfrac{٥(٣ - ت)}{٣ + ت}$ ، $م = \dfrac{١١ت - ٣}{١ + ٢ت}$

$$ل = \frac{٥(٣ - ت)}{٣ + ت} = \frac{٥(٣ - ت)}{٣ + ت} \times \frac{٣ - ت}{٣ - ت}$$

$$= \frac{٥(٩ - ٦ت - ١)}{٩ + ١} = \frac{٨ - ٦ت}{٢} = ٤ - ٣ت$$

$$م = \frac{١١ت - ٢}{١ + ٢ت} = \frac{١١ت - ٢}{١ + ٢ت} \times \frac{١ - ٢ت}{١ - ٢ت}$$

$$= \frac{١١ت + ٢٢ - ٢ + ٤ت}{١ + ٤} = \frac{٢٠ + ١٥ت}{٥} = ٤ + ٣ت = \bar{ل}$$

إذن ل ، م مترافقان

ب) $ل + م = \dfrac{٥(٣ - ت)}{٣ + ت} + \dfrac{١١ت - ٣}{١ + ٢ت} = ٤ - ٣ت + ٤ + ٣ت = ٨$

$$لم = \frac{٥(٣ - ت)}{٣ + ت} \times \frac{١١ت - ٣}{١ + ٢ت} = (٤ - ٣ت)(٤ + ٣ت) = ١٦ + ٩ = ٢٥$$

$$\Leftarrow ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢لم = ٨^{٢} - ٢ \times ٢٥ = ١٤$$

السؤال السابع:

$$\frac{\sqrt{٣} - ت}{١ + \sqrt{٣}ت} = \frac{\sqrt{٣} - ت}{١ + \sqrt{٣}ت} \times \frac{١ - \sqrt{٣}ت}{١ - \sqrt{٣}ت} = \frac{\sqrt{٣} - ٤ت - \sqrt{٣}}{١ + ٣} = \frac{-٤ت}{٤} = -ت$$

$$\Leftarrow \left(\frac{\sqrt{٣} - ت}{١ + \sqrt{٣}ت}\right)^{٧} = (-ت)^{٧} = -١ \times ت^{٤} \times ت^{٣} = -١ \times ١ \times -ت = ت$$

جدول يتضمن التعديلات على الاجابات التي وردت في كتاب الرياضيات للصف الثاني عشر العلمي الجديد

الوحدة	البند/ الصفحة/ رقم السؤال	الاجابة في الكتاب	التعديل
الاولى	(١-٧) صفحة ٢٣٤/س٢	$هـ\frac{١}{هـ} - ١$	$\frac{١}{هـ} - ١$
	(١-٧) صفحة ٢٣٤/ س ٣	$\frac{٣س^{٢} - ٦س}{س^{٣} - ٣س}$	$\frac{٣س^{٢} - ٦س}{س^{٣} - ٣س^{٢}}$
	تمارين عامة صفحة ٢٣٥/ س١٦	$\pm\sqrt{٢}$	$((\sqrt{٢}، ق(\sqrt{٢}))، (-\sqrt{٢}، ق(-\sqrt{٢})))$
الثانية	(٢ – ٢) صفحة ٢٣٦/س ٢	ق متزايد على ح	ق متزايد على ح+
	(٢ – ٣) صفحة ٢٣٧س ٣/ج		يضاف ق$(\frac{٣\pi}{٢}) = ٠$ قيمة عظمى مطلقة
	(٢ – ٤) صفحة ٢٣٨س ٥/ أ		يضاف (٣ ، ق(٣)) نقطة انعطاف
	(٢ – ٤) صفحة ٢٣٨س ٨/أ		يضاف س=-٣ ، ٢ وكذلك ق(-٣) صغرى محلية ، ق(٢) عظمى محلية
	تمارين عامة صفحة ٢٣٩/موضوعي		تعدل اجابة الفقرة ٤ (ب)، ٥(د)، ٧(أ) ١٠(ج)
	تمارين عامة صفحة ٢٣٩/س٤	ا= -١ او ا = ٤	ا= ٤
الرابعة	تمارين عامة صفحة ٢٣٩/ س ٨	نق= ٤٠ $\frac{٢٠\sqrt{٢}}{٣}$	نق= $\frac{٢٠\sqrt{٢}}{٣}$
	(٤-٢) صفحة ٢٤٣س ١/د	$\frac{٢}{٥}س^{٢} + قاس + جـ$	$\frac{٥}{٢}س^{٢} + قاس + جـ$
	(٤-٢) صفحة ٢٤٣س ١/هـ	$\frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + س + جـ$	$\frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}} + \frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + س + جـ$
	(٤ – ٤ ب) صفحة ٢٤٤/س ١/ د	$\frac{-١}{٢}جتا٢س + \frac{١}{٤}جا٢س + جـ$	$\frac{-١}{٢}س جتا٢س + \frac{١}{٤}جا٢س + جـ$
	(٤ – ٤ ج) صفحة ٢٤٥ س١ /ي	$\frac{١}{٣}(لو_{هـ}\|س^{٣}\| + لو_{هـ}\|س^{٣} + ١\|) + جـ$	$\frac{١}{٣}(لو_{هـ}\|س^{٣}\| - لو_{هـ}\|س^{٣} + ١\|) + جـ$
	(٤ – ٤ ج) صفحة ٢٤٥ س ١ /حـ	$\frac{-١}{٨}لو_{هـ}\|٤ - جاس\| + \frac{١}{٨}لو_{هـ}\|٤ + جاس\|) + جـ$	$\frac{-١}{٨}لو_{هـ}\|٤ + جاس\| + \frac{١}{٨}لو_{هـ}\|٤ - جاس\|) + جـ$
الخامسة	تمارين عامة صفحة ٢٤٦/س٥	$ص = \frac{-١}{٦(٢س^{٣} - ٤س)^{٣}} + جـ$	$ص = \frac{-١}{٦(٢س^{٣} - ٤س)^{٣}} + \frac{٤٧}{٤٨}$
	(٥- ٤)صفحة ٢٤٧/س ١٠	تعدل الفترة الثانية في ت(س) الى س∈[٢، ٤]	تعدل الفترة الثانية في ت(س) الى س∈[٢، ٥]
	تمارين عامة صفحة ٢٤٨س ١٠ /ب	$\frac{٥\pi}{١٢} + ٢\sqrt{٥}$ وحدة مساحة	$٤\sqrt{٣} - \frac{\pi}{٣} - ٤$ وحدة مساحة
السادسة	(٦ – ٣)صفحة ٢٤٩-٢٥٠/س ١٣	$\frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}$	$\frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}ت$
	(٦ – ٣)صفحة ٢٤٩-٢٥٠/س ٨	$ع = \sqrt{٢}(جتا\frac{٧\pi}{٤} + ت جا\frac{٧\pi}{٤})$	$ع = \sqrt{٢}(جتا\frac{٣\pi}{٤} + ت جا\frac{٣\pi}{٤})$
	(٦ – ٣)صفحة ٢٤٩-٢٥٠/س ٩ د	$\frac{٣}{٢} + \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}ت$	$\frac{٣}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}ت$
	(٦ – ٤)صفحة ٢٥١ السؤال الثاني	$س^{٢} - (٣+٢ت)س - (٥ + ٥ت) = ٠$	$س^{٢} - (٣+٢ت)س + (٥ + ٥ت) = ٠$