رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

# نظريتا رول والقيمة المتوسطة

## أولًا: نظرية رول

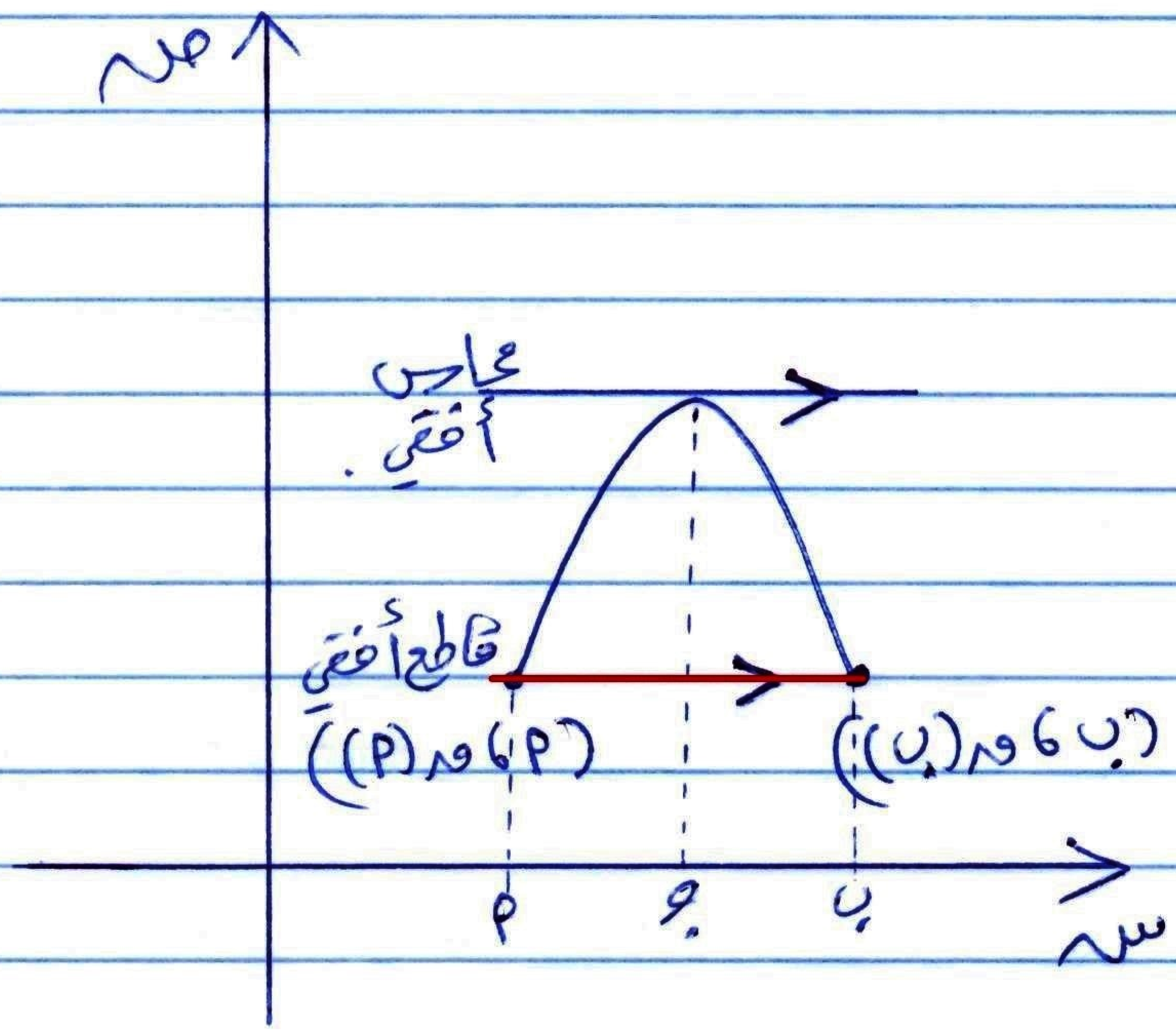
## *Roll's Theorem*

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

أ. هدى أسامة فرج

## (٢-١) نظريتا رول والقيمة المتوسطة

* **أولاً / نظرية رول** (Rolle's Theorem)




[ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [أ ، ب] ، وقابلاً للاشتقاق على ]أ ، ب[ ، وكان ق(أ) = ق(ب) ، فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈ ]أ ، ب[ بحيث إن قَ(جـ) = صفر ]

* **معنى النظرية** / أي أنه إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [أ ، ب] وقابلاً للاشتقاق على ]أ ، ب[ ، وكان ق(أ) = ق(ب) أي كان القاطع لمنحنى الاقتران عند النقطتين (أ ، ق(أ)) ، (ب ، ق(ب)) **أفقياً** فإنه يوجد قيمة على الأقل جـ في الفترة ]أ ، ب[ بحيث يكون المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة (جـ ، ق(جـ)) **أفقياً** .

أ. هدى أسامة فرج

* شروط النظرية /

① ق(س) اقتران متصل على [أ، ب]

② ق(س) قابل للاشتقاق على ]أ، ب[

③ ق(أ) = ق(ب)

* نتيجة النظرية /

توجد جـ ∈ ]أ، ب[ حيث قَ(جـ) = ٠

أو يوجد صفر للمشتقة الأولى في ]أ، ب[

أو يوجد جـ ∈ ]أ، ب[ يكون عندها المماس لمنحنى ق(س) أفقياً

* ملاحظات /

① لإثبات أن قَ(جـ) = صفر نطبق رول على ق(س)

ولإثبات أن قً(جـ) = صفر نطبق رول على قَ(س) وهكذا...

② لإثبات أن قَ(جـ) = هـَ(جـ) نطبق رول على الاقتران

ل(س) = ق(س) - هـ(س)

أ. هدى أسامة فرج

* مثال ① / س١ فرع (ب) ص٩٠ من الكتاب الوزاري

بين فيما إذا كان ق(س) = س$^{٢}$ - ٢س - ٣ ، س ∈ [-١، ٣]

يحقق شروط نظرية رول في الفترة المعطاة ، ثم جد قيمة أو قيم

جـ التي تحقق النظرية (إن وجدت)

الحل ① ق(س) متصل على [-١، ٣] ② وقابل للاشتقاق على ]-١، ٣[

لأنه كثير حدود.

③ ق(-١) = (-١)$^{٢}$ - ٢(-١) - ٣ = ٣ - ٣ = صفر

ق(٣) = (٣)$^{٢}$ - ٢(٣) - ٣ = ٣ - ٣ = صفر

⟸ ق(-١) = ق(٣)

∴ تحققت شروط نظرية رول على ق(س) في [-١، ٣]

⟸ يوجد جـ ∈ ]-١، ٣[ حيث قَ(جـ) = صفر

قَ(س) = ٢س - ٢

قَ(جـ) = ٢جـ - ٢ = ٠ ⟸ جـ = ١ ∈ ]-١، ٣[

تدريب ① / (أ) ق(س) = س$^{٤}$ - س - ٦ ، س ∈ [٠، ١]

(ب) ق(س) = س$^{٣}$ - ٤س + ٢ ، س ∈ [-٢، ٢]

بين أن الاقترانات السابقة تحقق شروط نظرية رول على الفترة المعطاة ثم جد قيمة / قيم جـ التي تعينها النظرية.

أ. هدى أسامة فرج

* مثال ② / بين أن الاقتران ق(س) = جاس + جتاس يحقق شروط نظرية رول في الفترة [٠ ، ٢π] ، ثم أوجد قيمة/قيم ج التي تحددها النظرية.

الحل ① ق(س) متصل في [٠ ، ٢π] لأنه مجموع اقترانين متصلين في نفس الفترة

② ق(س) قابل للاشتقاق في ]٠ ، ٢π[ لأنه مجموع اقترانين قابلين للاشتقاق في نفس الفترة

③ ق(٠) = جا٠ + جتا٠ = ① ⟸ ق(٠) = ق(٢π)

ق(٢π) = جا٢π + جتا٢π = ①

من ① ، ② ، ③ ق(س) يحقق شروط نظرية رول

∴ يوجد ج ∈ ]٠ ، ٢π[ بحيث قَ(ج) = ٠

قَ(س) = جتاس − جاس ، س ∈ ]٠ ، ٢π[

قَ(ج) = جتاج − جاج = ٠ ، ج ∈ ]٠ ، ٢π[

⟸ جتاج = جاج

ج تقع في الربع الأول أو تقع في الربع الثالث

⟸ ج = $\frac{\pi}{4}$ ∈ ]٠ ، ٢π[

⟸ ج = ١٨٠ + ٤٥° = ٢٢٥° ∈ ]٠ ، ٢π[

⟸ $\boxed{ج = \frac{\pi}{4} ، \frac{5\pi}{4}}$

أ. هدى أسامة فرج

* تدريب ② / بين أن كلاً من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية رول على الفترة المعطاة ، ثم عين قيمة / قيم جـ التي تحقق النظرية .

أ) ق(س) = جتا س ، س ∈ $[\frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{2}]$ { جـ = $\pi$ }

ب) ق(س) = س + $\frac{1}{س}$ ، س ∈ $[\frac{1}{2} ، 2]$ { جـ = 1 }

جـ) ق(س) = $\sqrt{4س - س^2}$ ، س ∈ $[0 ، 4]$ { جـ = 2 }

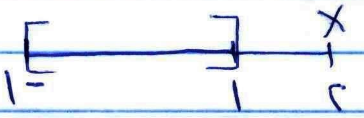
د) ق(س) = لو$_{هـ}$ (س + $\frac{1}{س}$) ، س ∈ $[\frac{1}{2} ، 2]$ { جـ = 1 }

* مثال ③ / بين فيما إذا كان ق(س) = $\frac{س^2 - 1}{س - 2}$ على الفترة $[-1 ، 1]$ يحقق شروط نظرية رول على الفترة المعطاة ، ثم أوجد قيمة / قيم جـ التي تعينها النظرية .

الحل: $س^2 - 1$ متصل على $[-1 ، 1]$ لأنه كثير حدود

$س - 2$ متصل على $[-1 ، 1]$ لأنه كثير حدود

$س - 2 = 0$ ، ⟸ $س = 2 \notin [-1 ، 1]$



① ⟸ ق(س) متصل على $[-1 ، 1]$ لأنه قسمة اقترانين متصلين .

$$ق'(س) = \frac{(س-2) \times 2س - (س^2 - 1) \times 1}{(س-2)^2} = \frac{2س^2 - 4س - س^2 + 1}{(س-2)^2}$$

أ. هدى أسامة فرج

① ق(س) = $\frac{س^2 - ٤س + ١}{(س - ٢)^2}$ موجودة $\forall$ س $\in$ ]−١، ١[

⟸ ② ق(س) قابل للاشتقاق على ]−١، ١[

③ ق(١) = ٠ ، ق(−١) = ٠ ⟸ ق(١) = ق(−١)

من ①، ②، ③ تحققت شروط نظرية رول

لذ يوجد جـ $\in$ ]−١، ١[ حيث قَ(جـ) = صفر

قَ(جـ) = $\frac{جـ^2 - ٤جـ + ١}{(جـ - ٢)^2}$ = ٠ ⟸ $جـ^2$ − ٤جـ + ١ = ٠

⟸ جـ = ٢ ± $\sqrt{٣}$

⟸ جـ = ٢ + $\sqrt{٣}$ $\notin$ ]−١، ١[ مرفوضة

$\boxed{جـ = ٢ - \sqrt{٣}}$ $\in$ ]−١، ١[ مقبولة ✓

* مثال ③ مثال ② ص٥٥ من الكتاب الوزاري؟

إذا علمت أن الاقتران ق(س) = جتا٢س + ٢جاس يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ، π] حيث أ > ٠ ، فما قيمة/قيم الثابت أ

الحل: ب الاقتران ق(س) يحقق شروط رول على الفترة [أ، π]

⟸ ق(أ) = ق(π)

⟸ جتا٢أ + ٢جاأ = جتا٢π + ٢جاπ

⟸ جتا٢أ + ٢جاأ = ١

أ. هدى أسامة فرج

* جتا ٢أ = جتا$^2$أ − جا$^2$أ
* جتا$^2$أ = ١ − جا$^2$أ

⟸ جتا$^2$أ − جا$^2$أ + ٢جاأ = ١

⟸ جتا$^2$أ − جا$^2$أ − ١ + ٢جاأ = ٠

⟸ ($\cancel{١}$ − جا$^2$أ) − جا$^2$أ − $\cancel{١}$ + ٢جاأ = ٠

⟸ −٢جا$^2$أ + ٢جاأ = ٠

⟸ −٢جاأ (جاأ − ١) = ٠ (x−1)

⟸ ٢جاأ (جاأ − ١) = ٠

إما ٢جاأ = ٠ ⟸ جاأ = ٠ ⟸ أ = ٠ ، $\pi$ مرفوضة لأنها لا يمكن أن تكون بداية الفترة.

٠ مرفوضة لأنه > أ.

أو جاأ − ١ = ٠

⟸ جاأ = ١ ⟸ $\boxed{أ = \frac{\pi}{2}}$

* **مثال ٤** / إذا كان د(س) = { ٥ − س$^2$ ، −٣ ≤ س ≤ ١
٦ − ٢س ، ١ < س ≤ ٥

ابحث في توفر شروط رول على [−٣ ، ٥] ثم جد قيمة جـ التي تعينها النظرية؟

الحل أولاً / نبحث اتصال د(س) على [−٣ ، ٥]

٥ − س$^2$ متصل على [−٣ ، ١] لأنه كثير حدود

٦ − ٢س متصل على ]١ ، ٥] لأنه كثير حدود.

نها$_{س \to ١^-}$ ٥ − س$^2$ = ٥ − ١ = $\boxed{٤}$ ، نها$_{س \to ١^+}$ ٦ − ٢س = $\boxed{٤}$ ، د(١) = $\boxed{٤}$

أ. هدى أسامة فرج

$\Leftarrow$ د(س) متصل عند س = ١

$\Leftarrow$ د(س) متصل على [-٣، ٥]

**ثانياً/** د̅(س) = $\begin{cases} -٢س، & -٣ < س < ١ \\ -٢، & ١ < س < ٥ \end{cases}$

د̅(١)$^{+}$ = -٢ ، د̅(١)$^{-}$ = -٢ $\Leftarrow$ د̅(١)$^{+}$ = د̅(١)$^{-}$ = -٢

$\Leftarrow$ د̅(١) = -٢

$\Leftarrow$ د(س) قابل للاشتقاق على ]-٣، ٥[

**ثالثاً/** د(٥) = -٤ ، د(-٣) = -٤

د(٥) = د(-٣)

من أولاً ، ثانياً ، ثالثاً من نظرية رول توجد ج ∈ ]-٣، ٥[ حيث د̅(ج) = صفر

∵ القاعدة الأولى/ -٢ج = ٠ ، -٣ < ج < ١

$\Leftarrow$ ج = ٠ ∈ ]-٣، ١[

∵ القاعدة الثانية/ -٢ ≠ ٠

$\Leftarrow$ قيمة ج التي تحققها النظرية هي $\boxed{ج = ٠}$

أ. هدى أسامة فرج

* مثال (5) مثال (٣) ص ٥٥ من الكتاب الوزاري :-

ابحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} س - ٢ &، -٤ \le س < -١ \\ س^٢ - ٧ &، -١ \le س \le ١ \end{cases}$$

في الفترة [-٤ ، ١] ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية (إن وجدت)

الحل (١) ق(س) متصل على [-٤ ، -١[ لأنه كثير حدود.

ق(س) متصل على ]-١ ، ١] لأنه كثير حدود.

لكن ق(س) غير متصل عند س = -١ (تحقق من ذلك)

⇐ ق(س) غير متصل على [-٤ ، ١]

---

(٢) $$قَ(س) = \begin{cases} ١ &، -٤ < س < -١ \\ ٢س &، -١ < س < ١ \end{cases}$$

$قَ(-١)^+ = -٢$ ، $قَ(-١)^- = ١$ ⇐ قَ(-١) غ.م

⇐ ق(س) غير قابل للاشتقاق على ]-٤ ، ١[

(٣) ق(-٤) = ق(١) = -٦

∴ لم تتحقق شروط نظرية رول على [-٤ ، ١] ، وهذا لا يعني بالضرورة عدم وجود قيم لـ جـ

أ. هدى أسامة فرج

✓ عندما $-٤ < س < -١ \Leftarrow ١ \neq ٠$ .

(لا يوجد جـ في هذه الفترة)

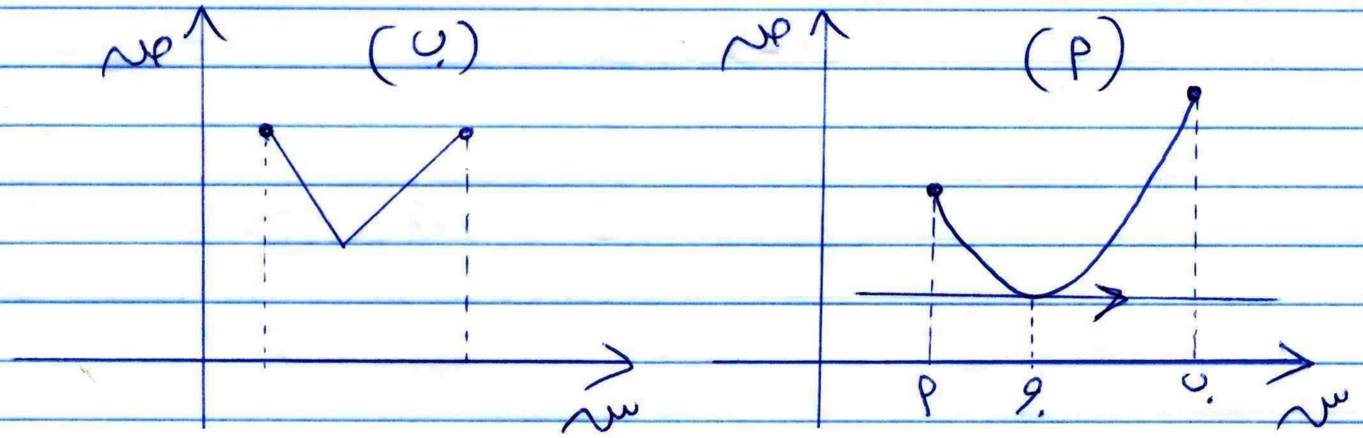
✓ عندما $-١ < س < ١ \Leftarrow ٢جـ = ٠ \Leftarrow$ جـ = صفر $\in ]-١ ، ١[$

وهنا لا يتعارض مع نظرية رول.

* ملاحظات / ① عدم تحقق أحد شروط نظرية رول يعني عدم تحقق الشروط للنظرية فلا داعي للبحث في باقي الشروط عند عدم تحقق أحدها

② عدم تحقق شروط نظرية رول لا يعني عدم وجود قيمة / قيم لـ جـ (كما في المثال السابق).

* لاحظ الرسومات التالية :-




* في الشكل (أ) ق(س) لا يحقق شروط نظرية رول لأنه ق(أ) $\neq$ ق(ب) ومع ذلك توجد جـ $\in ]$أ، ب$[$ بحيث قَ(جـ) = ٠.

* في الشكل (ب) ق(س) لا يحقق شروط نظرية رول لأنه غير قابل للاشتقاق على $]$أ، ب$[$ (حيث لا يوجد مماس وحيد عند رأس الزاوية) $\Leftarrow$ لا توجد جـ $\in ]$أ، ب$[$ بحيث قَ(جـ) = ٠.

أ. هدى أسامة فرج

* مثال ⑥ / من فرع (د) تمارين الكتاب الوزاري ص٥٩ :-

بين فيما إذا كان $ق(س) = جا٢س + ٢جاس$ ، $س \in [\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,]$

يحقق شروط نظرية رول في الفترة المعطاة ، ثم جد قيمة / قيم جـ

التي تحققها النظرية (إن وجدت)

الحل ① $ق(س)$ متصل في $[\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,]$ مجموع اقترانين مثلثية متصلين .

② $ق(س)$ قابل للاشتقاق في $]\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,[$

③ $ق(٠) = صفر$ ، $ق(\frac{\pi}{٢}) = ٢$

$ق(٠) \neq ق(\frac{\pi}{٢})$

$\Leftarrow$ لا تتحقق شروط نظرية رول (قد توجد أو لا توجد قيم لـ جـ)

$قَ(س) = ٢جتا٢س + ٢جتاس$

$قَ(جـ) = ٢جتا٢جـ + ٢جتاجـ = ٠$ (÷٢)

$\Leftarrow$ $جتا٢جـ + جتاجـ = ٠$

$\Leftarrow$ $جتا^٢جـ - جا^٢جـ + جتاجـ = ٠$

$\Leftarrow$ $جتا^٢جـ - (١ - جتا^٢جـ) + جتاجـ = ٠$

* $جتا٢جـ = جتا^٢جـ - جا^٢جـ$
* $جا^٢جـ = ١ - جتا^٢جـ$

$\Leftarrow$ $٢جتا^٢جـ + جتاجـ - ١ = ٠$ $\Leftarrow$ $(٢جتاجـ - ١)(جتاجـ + ١) = ٠$

$\Leftarrow$ إما $جتاجـ = \frac{١}{٢}$ $\Leftarrow$ $جـ = \frac{\pi}{٣} \in ]\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,[$

أو $(جتاجـ + ١) = ٠$ $\Leftarrow$ $جتاجـ = -١$ $\Leftarrow$ $جـ = \pi \notin ]\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,[$

أ. هدى أسامة فرج

تدريب (3) ليكن د(س) = { س$^٢$ − ٤س + ٦ ، س > ١
٧ − ٤س ، س ≤ ١

(أ) أي من شروط نظرية رول يحققها الاقتران في الفترة [-١ ، ٥]
(ب) هل توجد جـ ∈ ]-١ ، ٥[ بحيث إن قَ(جـ) = ٠
(جـ) هل تتعارض الإجابات في (أ) ، (ب) مع نظرية رول ؟! ولماذا ؟

* الإجابات [(أ) يتحقق شرط الاتصال و د(-١) = د(٥)]
(ب) لا يوجد جـ ∈ ]-١ ، ١[ حيث قَ(جـ) = ٠
(جـ) لا تتعارض لأنه في حالة عدم توفر شروط رول معاً قد تتوفر النتيجة وقد لا تتوفر.

* تدريب (4) ليكن د(س) = |٢س − ١| − ٣
(أ) أي من شروط رول يحققها الاقتران على الفترة [-١ ، ٢] ؟
(ب) هل توجد جـ ∈ ]-١ ، ٢[ بحيث قَ(جـ) = ٠ ؟!

* مسايرة / أعد تعريف الاقتران
الإجابات / [(أ) د(س) متصل على [-١ ، ٢] ، د(س) غير قابل للاشتقاق على ]-١ ، ٢[
د(٢) = د(-١)]
(ب) لا توجد جـ ∈ ]-١ ، ٢[ بحيث قَ(جـ) = ٠.

**أ. هدى أسامة فرج**

* مثال (7) إذا كان

$$د(س) = \begin{cases} س^3 - 3س & ، \quad 0 \le س \le 1 \\ أس^2 + ب س + جـ & ، \quad 1 < س \le 2 \end{cases}$$

يحقق رول على $[0 ، 2]$ جد قيم أ ، ب ، جـ

(الحل) ∵ د(س) تحقق شروط نظرية رول على $[0 ، 2]$

∴ (1) د(س) متصل على $[0 ، 2]$

(2) د(س) قابل للاشتقاق على $]0 ، 2[$

(3) د(2) = د(0)

من (1) $\lim_{س \to 1^-} د(س) = \lim_{س \to 1^+} د(س) = د(1)$

∴ $(1)^3 - 3(1) = أ + ب + جـ$ ∴ $أ + ب + جـ = -2 \leftarrow (1)$

من (2)

$$دَ(س) = \begin{cases} 3س^2 - 3 & ، \quad 0 < س < 1 \\ 2أس + ب & ، \quad 1 < س < 2 \end{cases}$$

$دَ(1)^+ = دَ(1)^-$

$2أ + ب = 3 - 3$ ∴ $2أ + ب = 0 \leftarrow (2)$

من (3) $د(2) = د(0)$ ∴ $4أ + 2ب + جـ = 0 \leftarrow (3)$

بحل (1) ، (3)

$(أ + ب + جـ = -2) \times -1$ ∴ $-أ - ب - \cancel{جـ} = +2$

$4أ + 2ب + جـ = 0$ ∴ $4أ + 2ب + \cancel{جـ} = 0$

$3أ + ب = +2 \leftarrow (4)$

أ. هدى أسامة فرج

بحل (٢) ، (٤)

$٣أ + ب = ٢$

$٢أ + ب = ٠$ $\times -١$

$\Leftarrow$ $٣أ + \cancel{ب} = ٢$

$-٢أ - \cancel{ب} = ٠$

$\boxed{أ = ٢}$ عوض عن قيمة أ في معادلة (٣)

$\Leftarrow$ ب = (-٤) ثم عوض عن أ = ٢ ، ب = -٤ في (١)

ينتج أن جـ = -٢ + ٢ = صفر

∴ أ = ٢ ، ب = -٤ ، جـ = صفر

أ. هدى أسامة فرج

مثال (8) / إذا كان ق(س) ، ل(س) اقترانين متصلين على [أ ، ب]

وقابلين للاشتقاق على ]أ ، ب[ وكان ق(أ) = ل(أ)

، ق(ب) = ل(ب) ، فأثبت وجود عدد واحد على الأقل

جـ ∈ ]أ ، ب[ بحيث قَ(جـ) = لَ(جـ)

الحل بتعريف الاقتران هـ(س) = ق(س) - ل(س) على [أ ، ب]

نجد أن ① هـ(س) متصل على [أ ، ب] لأنه فرق اقترانين متصلين

② هـ(س) قابل للاشتقاق على ]أ ، ب[ لأنه فرق اقترانين

قابلين للاشتقاق .

③ هـ(أ) = ق(أ) - ل(أ) = صفر (لأن ق(أ) = ل(أ))

كذلك هـ(ب) = ق(ب) - ل(ب) = صفر (لأن ق(ب) = ل(ب))

⇐ هـ(أ) = هـ(ب)

من ① ، ② ، ③ تتحقق شروط نظرية رول على الاقتران هـ(س) في الفترة [أ ، ب]

⇐ توجد جـ ∈ ]أ ، ب[ بحيث هَـ(جـ) = صفر

⇐ قَ(جـ) - لَ(جـ) = ٠

⇐ قَ(جـ) = لَ(جـ) #

أ. هدى أسامة فرج

*تدريب (5) إذا كان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق على $]أ، ب[$ وكان $ق(أ) = هـ(أ)$ ، $ق(ب) = هـ(ب)$ فأثبت أنه يوجد على الأقل عدد واحد مثل $جـ \in ]أ، ب[$ بحيث أن المماس المرسوم لمنحنى $ق(س)$ عند $س = جـ$ يوازي مماس المرسوم لمنحنى $هـ(س)$ عند $س = جـ$.

*مساعدة / المطلوب اثبات أن $ق'(جـ) = هـ'(جـ)$

*مثال (9) إذا علمت أن الاقتران $ق(س) = \frac{(س^2 - ٥س + ٦)(س + أ)}{(س - ٣)}$ ، $س \in [أ، ب]$ يحقق شروط نظرية رول في $[-١، ب]$ وكانت قيمة جـ التي تحققها النظرية هي $جـ = ٠$ ، جد الثابتين أ، ب

(الحل) بما الاقتران يحقق شروط نظرية رول في الفترة $[-١، ب]$ فإنه

$ق(س)$ متصل في $[-١، ب] \Leftarrow ب < ٣$

السبب/

$ق(س)$ اقتران نسبي $\Leftarrow$ $ق(س)$ متصل على $ح - \{٣\}$

أي أن ٣ يجب أن لا تكون داخل الفترة $[-١، ب] \Leftarrow ب < ٣$

لكن $ق(س) = \frac{\cancel{(س - ٣)}(س - ٢)(س + أ)}{\cancel{(س - ٣)}} = (س - ٢)(س + أ)$

⟸ د(س) = س$^{٢}$ + أس − ٢س − ٢أ ، س ≠ ٣

∵ د(ب) = د(−١)

ب$^{٢}$ + أب − ٢ب − ٢أ = ٣ − ٣أ

⟸ ب$^{٢}$ + أب − ٢ب = ٣ − أ ⟵ ①

لكن دَ(س) = ٢س + أ − ٢ ، س ∈ ]−١، ب[

∵ جـ = ٠ ⟸ دَ(١) = ٠ ⟸ $\boxed{أ = ٢}$

عوضنا عن قيمة أ في معادلة ① ⟸ $\boxed{ب = ١}$

* مثال ١٥ / إذا كان د(س) = ٤ − س$^{٢}$ باستخدام رول أثبت وجود جـ ∈ ]−أ، أ[ ، أ ∈ ح بحيث يكون المماس عندها أفقياً ، ثم جد قيم جـ التي تعينها النظرية.

الحل ① د(س) = ٤ − س$^{٢}$ متصل على $\boxed{[−أ، أ]}$ ② وقابل للاشتقاق على ]−أ، أ[ لأنه كثير حدود.

③ د(أ) = $\boxed{٤ − أ^{٢}}$ ، د(−أ) = ٤ − (−أ)$^{٢}$ = $\boxed{٤ − أ^{٢}}$

⟸ د(أ) = د(−أ)

من ① ، ② ، ③ د(س) تحقق نظرية رول ⟸ يوجد جـ ∈ ]−أ، أ[

حيث دَ(جـ) = ٠ ⟸ −٢جـ = ٠ ⟸ جـ = ٠ ∈ ]−أ، أ[

وهي قيمة جـ التي تعينها النظرية.

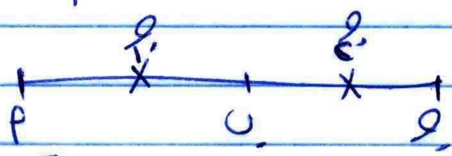
* **مثال (11)** إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [أ، جـ] بحيث قً(س) موجودة في ]أ، جـ[ ، وكان ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ) حيث أ < ب < جـ ، أثبت وجود عدد حقيقي واحد على الأقل د ∈ ]أ، جـ[ بحيث قً(د) = صفر

الحل (1) نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في [أ، ب] وحيث أن قً(س) موجودة في ]أ، جـ[ فإن :

ق(س) متصل على [أ، ب] وقابل للاشتقاق على ]أ، ب[ ،

ق(أ) = ق(ب) ⟸ تحقق شروط رول ومنها يوجد $جـ_1$ ∈ ]أ، ب[

بحيث قَ($جـ_1$) = ٠ ⟵ (*)




(2) نبحث في شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في [ب، جـ]

ق(س) متصل على [ب، جـ] وقابل للاشتقاق على ]ب، جـ[

، ق(ب) = ق(جـ) ⟸ تحقق شروط رول ومنها يوجد $جـ_2$ ∈ ]ب، جـ[

بحيث قَ($جـ_2$) = ٠ ⟵ (**)

الاقتران متصل على كل الفترة ⟸ الاقتران متصل على جزء الفترة

لاحظ أن $جـ_1$ < $جـ_2$

(3) نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران قَ(س) في [$جـ_1$، $جـ_2$]

قَ(س) متصل على [$جـ_1$، $جـ_2$] وقابل للاشتقاق على ]$جـ_1$، $جـ_2$[

أ. هدى أسامة فرج

كذلك ق($جـ_1$) = ق($جـ_2$)

← تحقق شروط نظرية رول على ق(س) في [$جـ_1$ ، $جـ_2$]

← يوجد على الأقل عدد مثل ء ∈ ]$جـ_1$ ، $جـ_2$[ ⊂ ]أ ، ب[

حيث قَ(ء) = ٠

* مثال (12) | د(س) اقتران كثير حدود يحقق رول على [أ ، ب]

حيث د(أ) = د(ب) = صفر ، إذا كان هـ(س) = ٢س فأثبت أن

د(س) × هـ(س) يحقق رول على [أ ، ب]

الحل ∵ د(س) يحقق رول على [أ ، ب]

∴ د(س) متصل على [أ ، ب] وقابل للاشتقاق على ]أ ، ب[

و د(أ) = د(ب)

نفرض ل(س) = د(س) × هـ(س)

هـ(س) = ٢س متصل على [أ ، ب] لأنه كثير حدود

∴ ل(س) متصل على [أ ، ب] لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين اقتران متصل

لَ(س) = د(س) × هـَ(س) + هـ(س) × دَ(س)

= ٢د(س) + ٢س دَ(س) موجودة ∀ س ∈ ]أ ، ب[

لأن د(س) متصل وقابل للاشتقاق على ]أ ، ب[

أ. هدى أسامة فرج

ن ل(س) = ق(س) × هـ(س) قابل للاشتقاق في ] أ، ب [

ل(أ) = ق(أ) هـ(أ) = ٠ × هـ(أ) = ٠

ل(ب) = ق(ب) . هـ(ب) = ٠ × هـ(ب) = ٠

∴ ل(أ) = ل(ب) ⇐ ل(س) = ق(س) × هـ(س) يحقق رول في

* مثال (13) س٥ ص٥ كتاب وزاري ؟ ـ [أ ، ب]

إذا كان ق(س) = س جتا س ، س ∈ [ ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ ] ، استخدم نظرية رول لإثبات أن القيمة التي تعينها النظرية هي عندما س = ظتا س

(الحل) ق(س) = س جتا س متصل في [ ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ ] وقابل للاشتقاق في ] ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ [

ق(٠) = صفر ، ق($\frac{\pi}{2}$) = صفر ⇐ ق(٠) = ق($\frac{\pi}{2}$)

⇐ تحققت شروط نظرية رول ⇐ يوجد جـ ∈ ] ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ [

بحيث قَ(جـ) = ٠

قَ(س) = س × -جا س + جتا س × ١

= جتا س - س جا س

قَ(جـ) = جتا جـ - جـ جا جـ = ٠ ⇐ جتا جـ = جـ جا جـ (÷ جا جـ)

⇐ ظتا جـ = جـ

⇐ القيمة التي تعينها النظرية هي عندما ظتا س = س #

* مثال (١٤) | إذا كان ق(س) اقتراناً كثير حدود يقطع محور السينات في نقطتين هما $س_١$ ، $س_٢$ بحيث $س_١ \neq س_٢$ أثبت أن الاقتران هـ(س) $= س^٤ \times$ ق(س) يحقق شروط نظرية رول في $[س_١ ، س_٢]$

(الحل) ∵ ق(س) يقطع محور السينات عند $س_١$ ، $س_٢$

∴ ق$(س_١)$ = ق$(س_٢)$ = صفر

(١) $س^٤$ متصل على $[س_١ ، س_٢]$ لأنه كثير حدود

ق(س) متصل على $[س_١ ، س_٢]$ لأنه كثير حدود

∴ هـ(س) $= س^٤$ ق(س) متصل على $[س_١ ، س_٢]$ لأن الضرب متصل.

(٢) هـَ(س) $= س^٤$ قَ(س) + ق(س) $\times ٤س^٣$ موجودة لكل س $\in ]س_١ ، س_٢[$

لأن $س^٤$ ، قَ(س) ، ق(س) ، $٤س^٣$ كثيرات حدود.

(٣) هـ$(س_٢) = س_٢^٤$ ق$(س_٢) = س_٢^٤ \times ٠ = ٠$

هـ$(س_١) = س_١^٤$ ق$(س_١) = س_١^٤ \times ٠ = ٠$

$\Leftarrow$ هـ$(س_١)$ = هـ$(س_٢)$

$\Leftarrow$ هـ(س) تحقق شروط رول على $[س_١ ، س_٢]$ #

# حلول أسئلة اختبارات السنوات السابقة

## على درس نظرية رول

أ. هدى أسامة فرج

٢٠١٧ دورة ثانية

قيمة جـ التي تحددها نظرية رول للاقتران ق(س) = |س² - ٢س + ١| في الفترة [٠، ٢] هي:

الحل: س² - ٢س + ١ = ٠ ⟸ (س - ١)(س - ١) = ٠ ⟸ س = ١

٠ ـــ صفر ـــ ٢

+ + + ١ + + +

س² - ٢س + ١ ١ س² - ٢س + ١

ق(س) = { س² - ٢س + ١ ، ٠ ≤ س < ١
س² - ٢س + ١ ، ١ ≤ س ≤ ٢ }

(١) ق(س) متصل على [٠، ٢]

ق'(س) = { ٢س - ٢ ، ٠ < س ≤ ١
٢س - ٢ ، ١ < س < ٢ }

(٢) ق(س) قابل للاشتقاق على ]٠، ٢[

(٣) ق(٠) = ١ ، ق(٢) = ١

ملاحظة/ عندما يكون ما داخل القيمة المطلقة اقتران تربيعي له جذران متشابهان فإن المشتقة موجودة وتساوي صفر عند هذا الجذر

من (١) ، (٢) ، (٣) ق(س) يحقق رول

∴ يوجد جـ ∈ ]٠، ٢[ حيث ق'(جـ) = صفر

أ. هدى أسامة فرج

$\Leftarrow$ ٢جـ-٢= ٠ $\Leftarrow$ جـ=١ $\in$ ]٠، ٢[

٢٠١٢ | مجموعة جميع قيم جـ التي يمكن الحصول عليها من تطبيق نظرية رول على الاقتران ق(س) = ٨ في الفترة [٠، ١] هي

الحل ① ق(س) اقتران ثابت (كثير حدود من الدرجة الصفرية)

متصل على [٠، ١]

② ق(س) قابل للاشتقاق على ]٠، ١[

③ ق(٠) = ق(١) = ٨

من ①، ②، ③ تحقق شروط نظرية رول ويوجد جـ $\in$ ]٠، ١[

حيث ق'(جـ) = ٠ $\Leftarrow$ ٠ = ٠ (صحيحة لكل س $\in$ ح)

$\Leftarrow$ صحيحة $\forall$ س $\in$ ]٠، ١[

∴ مجموعة قيم جـ التي يمكن الحصول عليها هي ]٠، ١[

أ. هدى أسامة فرج

٢٢) إذا كان ق(س) كثير حدود ، وكان المستقيم ص = ٤س - ٣ يمس منحنى ق(س) عند (١ ، ق(١)) والمستقيم ٣ص - ١٢س = ١٨ يمس منحنى ق(س) عند (٣ ، ق(٣)) باستخدام نظرية رول أثبت أنه يوجد جـ ∈ ]١ ، ٣[ بحيث قً(جـ) = ٠

الحل: ∵ المستقيم ص = ٤س - ٣ يمس ق(س) عند النقطة (١ ، ق(١)) ⟸ $ص'|_{س=١}$ = قَ(١) ⟸ $\boxed{٤ = قَ(١)}$

وكذلك ∵ المستقيم ٣ص - ١٢س = ٨ يمس منحنى ق(س) عند النقطة (٣ ، ق(٣)) ⟸ $ص'|_{س=٣}$ = قَ(٣)
⟸ ٤ = قَ(٣)

٣ص - ١٢س = ٨
٣صَ - ١٢ = ٠
صَ = ١٢/٣ = ٤

١) ق(س) كثير حدود ⟸ قَ(س) كثير حدود
⟸ قَ(س) متصل على [١ ، ٣]

٢) قَ(س) قابل للاشتقاق على ]١ ، ٣[

٣) قَ(١) = قَ(٣) ⟸ ١ ، ٢ ، ٣ تتحقق رول على قَ(س) على الفترة [١ ، ٣] ⟸ يوجد جـ ∈ ]١ ، ٣[ بحيث قً(جـ) = صفر.

أ. هدى أسامة فرج

٢٠١٨
دورة ثالثة

ق، ل اقترانان كل منهما يحقق شروط نظرية رول على الفترة [أ، ب] ، أثبت أن (ق ∘ ل)(س) يحقق شروط هذه النظرية على الفترة [أ، ب]

الحل: ق، ل يحققان رول على [أ، ب]

⟸ ق متصل على [أ، ب] وقابل للاشتقاق على ]أ، ب[

و ق(أ) = ق(ب) ⟵ (*)

كذلك ⟸ ل متصل على [أ، ب] وقابل للاشتقاق على ]أ، ب[

و ل(أ) = ل(ب)

(1) (ق ∘ ل)(س) متصل على [أ، ب] لأنه تركيب اقترانات متصلة

(2) (ق ∘ ل)(س) قابل للاشتقاق على ]أ، ب[ لأنه تركيب اقترانات قابلة للاشتقاق

(3) (ق ∘ ل)(أ) = ق(ل(أ)) = ق(ل(ب))

(ق ∘ ل)(ب) = ق(ل(ب))

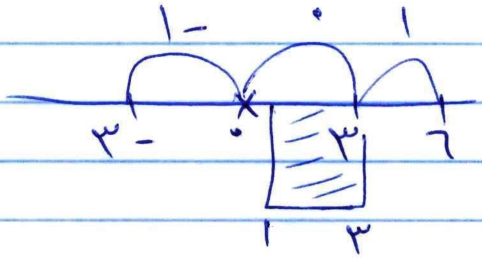
∴ (ق ∘ ل)(أ) = (ق ∘ ل)(ب)

من (1)، (2)، (3) (ق ∘ ل)(س) يحقق شروط رول على [أ، ب]

٢٠١٤ إذا كان الاقتران ق(س) = { [$\frac{1}{3}$ س] + جـ ، ١ ≤ س < ٣
س² − أ س ، ٣ ≤ س < ب

يحقق شروط نظرية رول ، أوجد الثوابت أ ، ب ، جـ

الحل [$\frac{1}{3}$ س]




- طول الدرجة ٣
- معامل س موجب
- $\frac{1}{3}$ س = ٠ ⟸ س = ٠

ق(س) = { ٠ + جـ ، ١ ≤ س < ٣
س² − أ س ، ٣ ≤ س < ب

∵ ق(س) يحقق رول ⟸ ق(س) متصل عند س = ٣

⟸ جـ = ٩ − ٣أ ⟸ $\boxed{\text{جـ} + ٣\text{أ} = ٩}$ ← (١)

ق′(س) = { ٠ ، ١ < س < ٣
٢س − أ ، ٣ < س < ب

ق(س) يحقق رول ⟸ ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ٣

⟸ ٠ = ٦ − أ ⟸ $\boxed{\text{أ} = ٦}$ ⟸ نعوض في (١) جـ + ١٨ = ٩

⟸ $\boxed{\text{جـ} = -٩}$

كذلك ق(١) = ق(ب)

⟸ جـ = ب² − أ ب ⟸ −٩ = ب² − ٦ب

⟸ ب² − ٦ب + ٩ = ٠ ⟸ (ب − ٣)(ب − ٣) =

أ. هدى أسامة فرج

⇐ ب = ٣

ن أ = ٦ ، ب = ٣ ، جـ = -٩