رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

نظريتا رول والقيمة المتوسطة

ثانيًا: نظرية القيمة المتوسطة

Mean Value Theorem

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

نظرية القيمة المتوسطة
Mean Value Theorem

أ. هدى أسامة فرج

* نظرية القيمة المتوسطة/

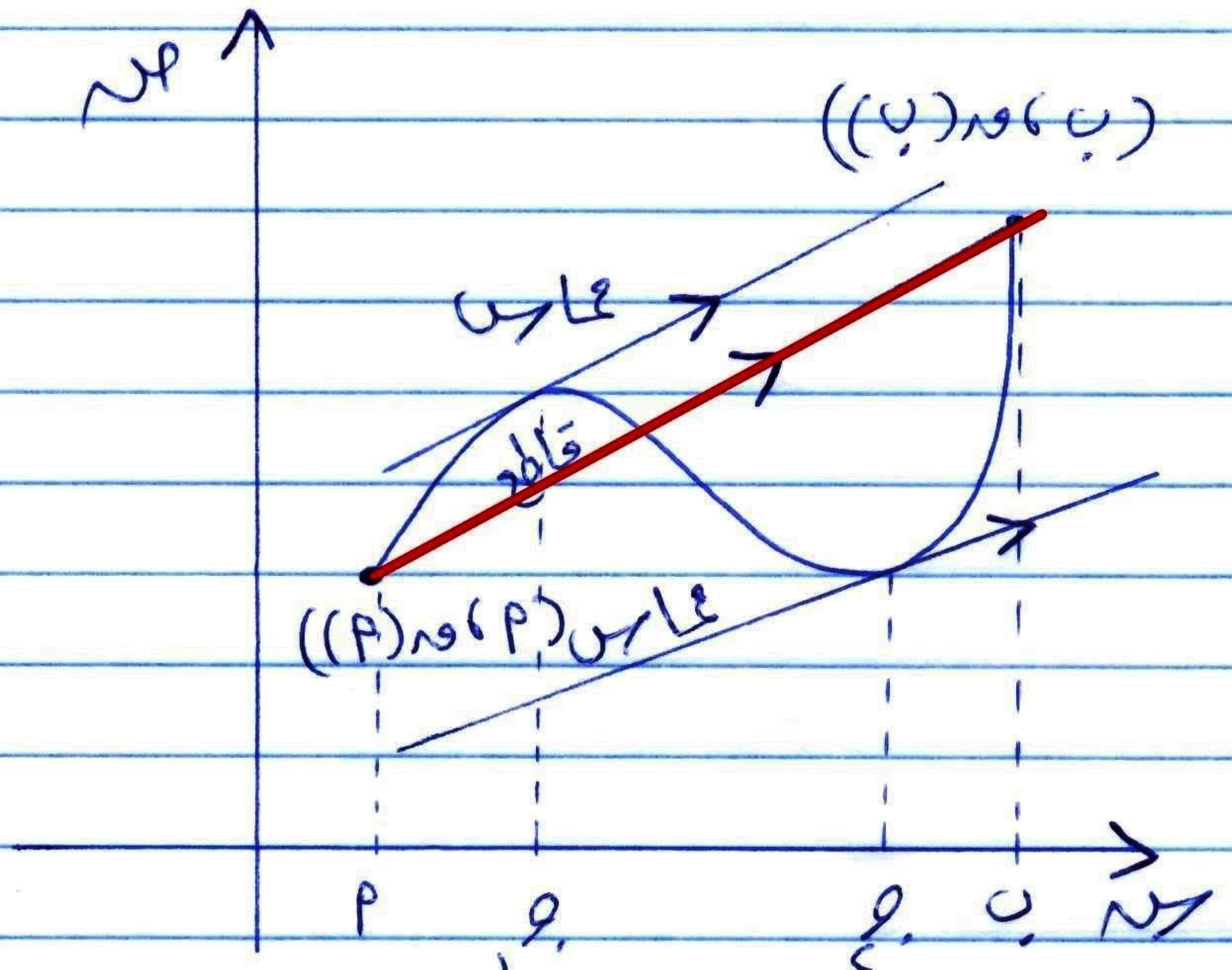
إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا في [أ، ب] وقابلًا للاشتقاق في]أ، ب[، فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∋]أ، ب[

بحيث إن $ق'(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$

* تتناول النظرية السابقة العلاقة بين متوسط تغير الاقتران في فترة ما ومعدل تغير الاقتران أي المشتقة الأولى له عند نقطة في تلك الفترة.

* تؤكد نظرية القيمة المتوسطة وجود عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∋]أ، ب[بحيث إن المشتقة الأولى للاقتران عند جـ تساوي متوسط تغير الاقتران في [أ، ب]

أ. هدى أسامة فرج



لاحظ في الشكل المجاور أن ميل المماس لمنحنى الاقتران عند $س = جـ_١$ يساوي ميل القاطع لمنحنى الاقتران عند النقطتين (أ ، ق(أ)) ، (ب ، ق(ب)) وهذا يعني أن المماس المذكور والقاطع متوازيان

* كما نلاحظ من الشكل أن ق(س) متصل على الفترة [أ ، ب] وقابل للاشتقاق على الفترة]أ ، ب[وفي الشكل يوجد مماسان للمنحنى عند $س = جـ_١$ ، $س = جـ_٢$ يوازيان القاطع

* ملخص/

✓ شروط نظرية القيمة المتوسطة/

(١) ق(س) متصل على [أ ، ب]

(٢) ق(س) قابل للاشتقاق على]أ ، ب[

✓ نتيجة النظرية/ يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈]أ ، ب[

حيث $قَ(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$

أ. هدى أسامة فرج

* معاني أخرى للنتيجة

- قَ(جـ) = متوسط تغير د(س) في [أ، ب]

- قَ(جـ) = ميل القاطع المار بالنقطتين (أ، د(أ))، (ب، د(ب))

- ميل المماس لمنحنى الاقتران عندما س = جـ يساوي ميل المستقيم القاطع المار بالنقطتين (أ، د(أ))، (ب، د(ب))

* ملاحظة/ عكس نظرية القيمة المتوسطة غير صحيح أي أنه يمكن وجود النتيجة دون تحقق شروط النظرية

مثال (1)/ مثال (6) ص٥٧ كتاب وزاري

بين أن الاقتران د(س) = س^{٣} + ١ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [-٢، ١] ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية

الحل (1) د(س) متصل على [-٢، ١] لأنه كثير حدود.
(2) د(س) قابل للاشتقاق على]-٢، ١[لأنه كثير حدود.

من (1)، (2) تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة ⇐ يوجد جـ ∈]-٢، ١[

بحيث قَ(جـ) = $\dfrac{\text{د(١) - د(-٢)}}{\text{١ - (-٢)}}$

⇐ ٣جـ^{٢} = $\dfrac{\text{٢ - (-٧)}}{\text{٣}}$ ⇐ ٣جـ^{٢} = ٣ ⇐ جـ = ±١

جـ = ١ ∉]-٢، ١[، $\boxed{\text{جـ = -١}}$ ∈]-٢، ١[

تدريب ① بين أي الاقترانات التالية يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحصل عليها من النظرية.

أ) ق(س) = س^{3} − س ، س ∈ [٠، ٣]

(جـ = $\sqrt{3}$)

ب) ق(س) = س^{2} + ٢س − ٣ ، س ∈ [−٢، ٢]

(جـ = ٠)

جـ) ق(س) = س^{3} − س − ١ ، س ∈ [−١، ٢]

(جـ = ١)

* مثال ② إذا كان ق(س) = س + $\sqrt{\text{س}}$ معرف على [١، ٤] هل توجد جـ ∈]١، ٤[بحيث يكون المماس المرسوم لمنحنى ق عند النقطة (جـ، ق(جـ)) موازياً للمستقيم الواصل بين النقطتين (١، ق(١))، (٤، ق(٤))؟

الحل: س متصل على [١، ٤] ، $\sqrt{\text{س}}$ متصل على [٠، ∞[⇐ متصل على [١، ٤]

① ⇐ ق(س) = س + $\sqrt{\text{س}}$ متصل على [١، ٤] لأن الجمع متصل.

② ق$'$(س) = ١ + $\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$ موجودة ∀ س > ٠ ⇐ ق(س) قابل للاشتقاق على]١، ٤[

③ حسب نظرية القيمة المتوسطة توجد جـ ∈]١، ٤[

حيث ق$'$(جـ) = $\frac{\text{ق(٤)} - \text{ق(١)}}{4 - 1}$ ⇐ ١ + $\frac{1}{2\sqrt{\text{جـ}}}$ = $\frac{4 + \sqrt{4} - (1 + \sqrt{1})}{3}$

أ. هدى أسامة فرج

$\Leftarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{\text{جـ}}} = \frac{6-2}{3} \Leftarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{\text{جـ}}} = \frac{4}{3}$

$\Leftarrow \frac{1}{2\sqrt{\text{جـ}}} = \frac{4}{3} - 1 \Leftarrow \frac{1}{2\sqrt{\text{جـ}}} \bowtie \frac{1}{3} \Leftarrow 2\sqrt{\text{جـ}} = 3$

$\Leftarrow \sqrt{\text{جـ}} = \frac{3}{2} \xLeftarrow{\text{بالتربيع}} \boxed{\text{جـ} = \frac{9}{4}} \in]1 ، 4[$

تدريب (2) تبين فيما إذا كان كل من الاقترانات التالية تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة، ثم عين قيمة / قيم جـ التي تعينها النظرية

(أ) $\text{ق}(\text{س}) = 3\sqrt{\text{س}} - 4\text{س}$ ، على الفترة $[1 ، 4]$

$(\text{جـ} = \frac{9}{4})$

(ب) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} + 2\text{س}$ ، على الفترة $[4 ، 9]$

$(\text{جـ} = \frac{25}{4})$

(جـ) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{4}{\text{س}+2}$ ، على الفترة $[-1 ، 2]$

$(\text{جـ} = \text{صفر})$

(د) $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{جاس} - \text{جتا}2\text{س}$ على الفترة $[0 ، \pi]$

$(\text{جـ} = \frac{\pi}{2})$

(هـ) $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}^2 - \text{س} - 6|$ على الفترة $[-1 ، 2]$

مناقشة $\text{س}^2 - \text{س} - 6 = 0$

$\Leftarrow (\text{س}-3)(\text{س}+2) = 0$

$(\text{س}^2-\text{س}-6)$ $\quad$ $(-\text{س}^2+\text{س}+6)$ $\quad$ $(\text{س}^2-\text{س}-6)$

$-2 \quad\quad -1 \quad\quad 2 \quad\quad 3$

أ. هدى أسامة فرج

تابع تدريب ②

$\text{ق}(\text{س}) = -\text{س}^{٢} + \text{س} + ٦$ ، $-١ \leq \text{س} \leq ٢$

$(\text{جـ} = \frac{١}{٢})$

مثال ③ إذا كانت قيمة جـ التي تحصل عليها من تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على ق في $[٠، \text{ب}]$ حيث $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢}$ هي $\text{جـ} = ٣$

جد قيمة ب ؟

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س}$

$\because$ ق(س) يحقق شروط المتوسطة في $[٠، \text{ب}]$ $\Leftarrow$ توجد $\text{جـ} \in]٠، \text{ب}[$

حيث $\text{ق}'(\text{جـ}) = \dfrac{\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(٠)}{\text{ب}}$

$\Leftarrow \text{ق}'(\text{جـ}) = \dfrac{\text{ب}^{٣} - ٢\text{ب}^{٢} - ٠}{\text{ب}} \Leftarrow \text{ق}'(٣) = \dfrac{\cancel{\text{ب}}(\text{ب}^{٢} - ٢\text{ب})}{\cancel{\text{ب}}}$

$\Leftarrow ٣(٣)^{٢} - ٤(٣) = \text{ب}^{٢} - ٢\text{ب}$

$\Leftarrow ٢٧ - ١٢ = \text{ب}^{٢} - ٢\text{ب} \Leftarrow \text{ب}^{٢} - ٢\text{ب} - ١٥ = ٠$

$\Leftarrow (\text{ب} - ٥)(\text{ب} + ٣) = ٠$

$\Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٥}$ ، $\text{ب} = -٣$ مرفوضة

لأنه الفترة $[٠، \text{ب}]$

أ. هدى أسامة فرج

* مثال (٦) س٣ ص٥٩ في الكتاب الوزاري.

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ٢س ، & ٠ \le س \le ٢ \\ س^{٣} - ب س + ١٢ ، & ٢ < س \le ٣ \end{cases}$

حقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [٠ ، ٣] ، جد قيم الثابتين أ ، ب ثم جد قيمة / قيم جـ التي تحددها النظرية

الحل ق(س) تحقق شروط القيمة المتوسطة في [٠ ، ٣]

⇐ ق(س) متصل على [٠ ، ٣] وقابل للاشتقاق على]٠ ، ٣[

ق(س) متصل على [٠ ، ٣] ⇐ ق(س) متصل عند س = ٢

⇐ $\lim_{س \to ٢^{-}} ق(س) = \lim_{س \to ٢^{+}} ق(س)$

⇐ ٤أ + ٤ = ٨ - ٢ب + ١٢ ⇐ ٤أ + ٢ب = ١٦

⇐ ٢أ + ب = ٨ ⟵ (١)

قَ(س) = $\begin{cases} ٢أس + ٢ ، & ٠ < س < ٢ \\ ٣س^{٢} - ب ، & ٢ < س < ٣ \end{cases}$

ق(س) قابل للاشتقاق ⇐ قَ$(٢)^{+}$ = قَ$(٢)^{-}$

⇐ ٤أ + ٢ = ١٢ - ب ⇐ ٤أ + ب = ١٠ ⟵ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن أ = ١ ، ب = ٦

أ. هدى أسامة فرج

⇐ ق(س) = { ٢س + ٢ ، ٠ < س < ٢
            ٣س² - ٦ ، ٢ ≤ س < ٣

لإيجاد قيمة جـ

ق'(جـ) = (ق(٣) - ق(١)) / ٣ = ٢١ / ٣ = ٧

عندما ٠ < جـ < ٢ ⇐ ٢جـ + ٢ = ٧ ⇐ ٢جـ = ٥

⇐ جـ = ٥/٢ ∉]٠، ٢[

عندما ٢ < جـ < ٣ ⇐ ٢جـ² - ٦ = ٧ ⇐ ٢جـ² = ١٣

⇐ جـ² = ١٣/٢

⇐ جـ = ± √(١٣/٢)

جـ = - √(١٣/٢) مرفوض ∉]٢، ٣[

⇐ $\boxed{\text{جـ} = \sqrt{١٣/٢}}$ ∈]٢، ٣[

تدريب ③

(أ) إذا علمت أن الاقتران ق(س) = { أس + ب ، -٣ ≤ س ≤ -١
                                   -س² ، -١ < س ≤ ٥

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [-٣، ٥] جد الثابتين أ، ب

(ج/ أ = ٢ ، ب = ١)

(ب) إذا كان ق(س) =

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ س}^4 + 3\text{س} , & 1 \le \text{س} \le 2 \\ \text{س}^3 - \text{ب س} + 12 , & 2 < \text{س} \le 3 \end{cases}$$

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة ، جد قيم أ ، ب ثم جد قيمة ج التي تعينها النظرية (أ = ١ ، ب = ٦ ، ج = $\sqrt{5}$)

(ج) جد الثوابت أ ، ب ، ج التي تجعل الاقتران

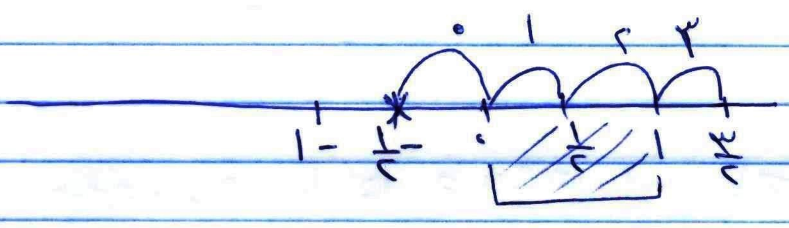
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 3 , & \text{س} = 0 \\ -\text{س}^2 + 3\text{س} + \text{ج} , & 0 < \text{س} < 1 \\ \text{أ س} + \text{ب} , & 1 \le \text{س} \le 2 \end{cases}$$

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [٠ ، ٢]

(أ = ١ ، ب = ٤ ، ج = ٣)

مثال (5) ابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق(س) = [٢س + ١] في الفترة [٠ ، ١] ، ثم جد قيمة / قيم ج التي تعينها النظرية (إن وجدت)

الحل أعد تعريف [٢س + ١]



- ٢س + ١ = ٠ ⟸ س = $-\frac{1}{2}$
- معامل س موجب
- طول الدرجة = $\frac{1}{2}$

⟸

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 1 , & 0 \le \text{س} < \frac{1}{2} \\ 2 , & \frac{1}{2} \le \text{س} < 1 \\ 3 , & \text{س} = 1 \end{cases}$$

أ. هدى أسامة فرج

$$ق'(س) = \begin{cases} ٠ & ، ٠ < س < \frac{١}{٢} \\ ٠ & ، \frac{١}{٢} < س < ١ \end{cases}$$

نبحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [٠،١]

① ق(س) متصل غير في [٠،١] لأنه غير متصل س = $\frac{١}{٢}$

② ق(س) غير قابل للاشتقاق في]٠،١[لأنه غير متصل عند س = $\frac{١}{٢}$

لم تتحقق شروط القيمة المتوسطة على ق(س) في [٠،١] وهذا لا يعني عدم وجود جـ

نبحث عن قيمة / قيم لـ جـ

$$ق'(جـ) = \frac{ق(١) - ق(٠)}{١ - ٠} = \frac{٣ - ١}{١} = ٢$$

⇐ ق'(جـ) = ٢

عندما ٠ < جـ < $\frac{١}{٢}$ عندما $\frac{١}{٢}$ < جـ < ١

⇐ ٠ ≠ ٢   ٠ ≠ ٢

⇐ لا يوجد قيم لـ جـ ∈]٠، $\frac{١}{٢}$[لا يوجد قيم لـ جـ ∈]$\frac{١}{٢}$، ١[

∴ ق'(جـ) ≠ ٢ ∀ س ∈]٠،١[

⇐ لا توجد قيم لـ جـ ∈]٠،١[

أ. هدى أسامة فرج

* مثال (6) إذا كانت د : [٠، ٢] ← ح حيث

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٣ - س}{٢} &، ٠ \le س < ١ \\ \frac{١}{س} &، ١ \le س \le ٢ \end{cases}$$

ابحث في توفر شروط المتوسطة وجد قيمة جـ التي تعينها النظرية إن وجدت؟

(الحل) * $\frac{٣ - س}{٢} = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢} س$ متصل على [٠، ١[لأنه كثير حدود

* $\frac{١}{س}$ متصل على ح - {٠} ← متصل على [١، ٢]

* نبحث الاتصال عند س = ١

$$\lim_{س \to ١^-} \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢} س = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢} = ١$$

$$\lim_{س \to ١^+} \frac{١}{س} = ١ \quad ، \quad د(١) = ١$$

∴ د(س) متصل عند س = ١ ← د(س) متصل على [٠، ٢]

$$د'(س) = \begin{cases} -\frac{١}{٢} &، ٠ < س < ١ \\ \frac{-١}{س^٢} &، ١ < س < ٢ \end{cases}$$

$د'(١^-) = -\frac{١}{٢}$ ، $د'(١^+) = -١$ ، $د'(١^+) \ne د'(١^-)$

د(س) غير قابل للاشتقاق على]٠، ٢[

د(س) لا يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

أ. هدى أسامة فرج

عدم تحقق شروط النظرية لا يعني عدم وجود جـ

$$\text{قَ(جـ)} = \frac{\text{ق(٢)} - \text{ق(٠)}}{٢ - ٠} = \frac{\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢}}{٢} = \frac{-١}{٢}$$

عندما ٠ < جـ < ١

$-\frac{١}{٢} = -\frac{١}{٢}$ صحيحة ∀ س ∈ ح ⟸ صحيحة ∀ س ∈]٠، ١[

⟸ قيمة جـ هي كل الفترة]٠، ١[⟵ (١)

عندما ١ < جـ < ٢

$-\frac{١}{\text{جـ}^٢} = -\frac{١}{٢}$ ⟸ $\text{جـ}^٢ = ٢$ ⟸ جـ = ±√٢

* جـ = −√٢ ∉]١، ٢[مرفوضة

* $\boxed{\text{جـ} = \sqrt{٢}}$ ∈]١، ٢[✓ ⟵ (٢)

من (١)، (٢) قَ(جـ) = $-\frac{١}{٢}$

∀ جـ ∈]٠، ١[∪ {√٢}

أ. هدى أسامة فرج

* مثال (7) إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فاستخدم نظرية القيمة المتوسطة مع الاقتران $ق(س) = س^3$ معرفاً على [أ ، ب] لإثبات وجود عدد حقيقي واحد على الأقل $جـ \in]أ ، ب[$ بحيث $أ^2 + أب + ب^2 = 3جـ^2$

الإثبات

$ق(س) = س^3$ متصل على [أ ، ب] وقابل للاشتقاق على]أ ، ب[لأنه كثير حدود ⟸ حسب نظرية القيمة المتوسطة توجد $جـ \in]أ ، ب[$

بحيث $ق'(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$

$3جـ^2 = \frac{ب^3 - أ^3}{ب - أ}$ ⟸ $3جـ^2 = \frac{\cancel{(ب - أ)}(ب^2 + أب + أ^2)}{\cancel{(ب - أ)}}$

⟸ $3جـ^2 = ب^2 + أب + أ^2$ #

* مثال (8) س10 ص59 في الكتاب الوزاري :-

إذا كان $ق(س) = \frac{1}{س}$ ، $س \in [أ ، ب]$ ، أ > صفر فأثبت باستخدام نظرية القيمة المتوسطة وجود عدد حقيقي واحد على الأقل $جـ \in]أ ، ب[$

بحيث $جـ^2 = أ . ب$

الإثبات $ق(س) = \frac{1}{س}$ متصل على ح - {0}

لكن س > 0 ⟸ ق(س) متصل على [أ ، ب]

أ. هدى أسامة فرج

$ق(س) = \frac{-1}{س^2}$ قابل للاشتقاق على ح - {٠} حيث س > ٠

∴ ق(س) قابل للاشتقاق على]أ، ب[

∴ ق(س) يحقق شروط القيمة المتوسطة ⟸ يوجد جـ ∈]أ، ب[

بحيث $ق(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$

$\frac{-1}{جـ^2} = \frac{\frac{1}{ب} - \frac{1}{أ}}{ب - أ} \Leftarrow \frac{-1}{جـ^2} = \frac{\frac{أ - ب}{أب}}{ب - أ}$

$\Leftarrow \frac{-1}{جـ^2} = \frac{\cancel{(أ - ب)}}{أب\cancel{(ب - أ)}} \Leftarrow \frac{-1}{جـ^2} = \frac{-1}{أب}$

$\Leftarrow -أب = -جـ^2 \Leftarrow أب = جـ^2$ #

* مثال (٩) رشن ص٥٩ كتاب وزاري ؟

إذا كان ع(س) = (هـ ∘ هـ)(س) ، س ∈ [أ، ب] ، هـ(س) ، هـ(س)

اقترانين متصلين في [أ، ب] وقابلين للاشتقاق في]أ، ب[

وكان هـ(أ) = ب ، هـ(ب) = أ . أثبت وجود عدد واحد على الأقل

جـ ∈]أ، ب[بحيث ع(أ) - ع(ب) = ق(جـ) (ب - أ)

الإثبات

أ. هدى أسامة فرج

∵ د(س) متصل على $[أ، ب]$ وقابل للاشتقاق على $]أ، ب[$

∴ د(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

⟸ يوجد $جـ \in]أ، ب[$ بحيث $\dot{د}(جـ) = \dfrac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$

لكن $هـ(أ) = ب$ ، $هـ(ب) = أ$

∴ $\dot{د}(جـ) = \dfrac{د(هـ(أ)) - د(هـ(ب))}{ب - أ}$

⟸ $\dot{د}(جـ) = \dfrac{ع(أ) - ع(ب)}{ب - أ}$ ⟸ $ع(أ) - ع(ب) = \dot{د}(جـ)(ب - أ)$

#

* مثال (15) إذا كان $د(س) = س^3$ ، $س \in [أ، ب]$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة أثبت أن المقدار $\dfrac{ب^3 - أ^3}{ب - أ}$ يقع بين $3أ^2$ و $3ب^2$ حيث $. < أ < ب$

(الحل) $د(س) = س^3$ متصل على $[أ، ب]$ لأنه كثير حدود وقابل للاشتقاق على $]أ، ب[$ لأنه كثير حدود

$\dot{د}(س) = 3س^2$

حسب نظرية القيمة المتوسطة يوجد $جـ \in]أ، ب[$ حيث

$\dot{د}(جـ) = \dfrac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$ ⟸ $3جـ^2 = \dfrac{ب^3 - أ^3}{ب - أ}$ ⟵ (*)

أ. هدى أسامة فرج

لكن جـ ∈]أ، ب[⟸ أ < جـ < ب   ربع أطراف المتباينة

⟸ أ² < جـ² < ب²   (×٣)

⟸ ٣أ² < ٣جـ² < ٣ب²   عوض من (*)

⟸ $٣أ^2 < \frac{ب^3 - أ^3}{ب - أ} < ٣ب^2$ #

* مثال (11) إذا كان د(س)، هـ(س) كثيرا حدود معرفان على [أ، ب] وكان متوسط التغير في الاقتران د(س) في [أ، ب] يساوي ٢ ومتوسط التغير للاقتران هـ(س) في [أ، ب] يساوي −٣، أثبت أنه توجد جـ ∈]أ، ب[حيث دَ(جـ) + هـَ(جـ) = −١

الحل نفرض م(س) = د(س) + هـ(س)

∵ د(س)، هـ(س) كثيرا حدود ⟸ د(س)، هـ(س) متصلان على [أ، ب] ⟸ م(س) متصل على [أ، ب]

∵ د(س)، هـ(س) كثيرا حدود ⟸ د(س)، هـ(س) قابلان للاشتقاق على]أ، ب[⟸ م(س) قابل للاشتقاق على]أ، ب[

∴ حسب نظرية القيمة المتوسطة توجد جـ ∈]أ، ب[بحيث

$$مَ(جـ) = \frac{م(ب) - م(أ)}{ب - أ} = \frac{د(ب) + هـ(ب) - [د(أ) + هـ(أ)]}{ب - أ}$$

أ. هدى أسامة فرج

$$\bar{\text{م}}(\text{جـ}) = \frac{\left(\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})\right) + \left(\text{هـ}(\text{ب}) - \text{هـ}(\text{أ})\right)}{\text{ب} - \text{أ}}$$

$$\bar{\text{م}}(\text{جـ}) = \frac{\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ب} - \text{أ}} + \frac{\text{هـ}(\text{ب}) - \text{هـ}(\text{أ})}{\text{ب} - \text{أ}}$$

$$\bar{\text{م}}(\text{جـ}) = ٢ + -٣ = -١$$

$$\Leftarrow \bar{\text{ق}}(\text{جـ}) + \bar{\text{هـ}}(\text{جـ}) = -١ \quad \#$$