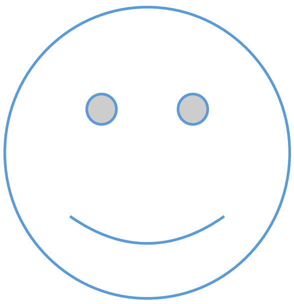
رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

اختبارات الوحدة الثالثة دفعة 2022 مع الحلول

- اختبار درسي المصفوفة والعمليات على المصفوفات .
- اختبار درس المحددات .
- تمارين على خصائص المحددات.
- اختبار درس النظير الضربي للمصفوفة المربعة.
- اختبار الوحدة الثالثة.

تمنياتي لكم بالتفوق والتميز

أ. هدى أسامة فرج



رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درسي

المصفوفة والعمليات على المصفوفات

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار المصفوفة والعمليات على المصفوفات

دفعة 2004

① إذا كانت جـ = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، أ + ب = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ فإن

جـ أ + جـ ب =

أ) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 29 & -4 \\ 11 & -6 \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

② إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{جتاس} & \text{جاس} \\ \text{جاس} & \text{جتاس} \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} \text{جا٢س} & 0 \\ 0 & \text{جا٢س} \end{bmatrix}$

فإن أ^2 ـ ب =

أ) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ب) م$_2$ جـ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ د) أ + ب

③ إذا كانت ٣ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ س & -1 \end{bmatrix}$ ـ ٢ $\begin{bmatrix} ص & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ فإن س + ص

أ) ٥ ب) ٤ جـ) ٣ د) ١

④ إذا كانت $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ × أ = $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ فإن أ =

أ) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

⑤ إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢×٢ حيث $أ_{هـي} = هـ^{٢} - ي$
فإن المصفوفة أ =

(أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

⑥ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن $أ^{١٠٠}$ =

(أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

⑦ إذا كانت $\frac{١}{٢}$أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ فإن
المصفوفة $(ب - أ)^{٢}$ =

(أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٩ \\ ١٤ & ٢٥ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ١١ & ٢١ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٣ & ١٢ \\ ٣ & ٢٥ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٨ & -١٢ \end{bmatrix}$

⑧ إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢}+١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ س-١ & ٥ \end{bmatrix}$ فجد قيمة / قيم س

(أ) -٣ (ب) ٣ (ج) {٣ ، -٣} (د) {٩ ، ٣}

⑨ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} س ص & س^{٢} \\ ص^{٢} & س ص \end{bmatrix}$ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ فإن $أ^{٢}$ =

(أ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ (ج) أ (د) ٢أ + ١

١٠) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

فإن ١٥ أ + ١٠ ب ـ ١٤ (أ + ب) =

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٦ & -١ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$ د) ٢م

حلول أسئلة اختبار درس المصفوفة والعمليات على المصفوفات

(١) جـ أ + جـ ب = جـ (أ + ب)

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-12 & 20+9 \\ 2-8 & 5+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 29 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}$$ فرع (ب)

(٢)

$$\text{أ}^2 = \begin{bmatrix} \text{جا}س & \text{جتا}س \\ \text{جتا}س & \text{جا}س \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{جا}س & \text{جتا}س \\ \text{جتا}س & \text{جا}س \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س & 2\,\text{جا}س\,\text{جتا}س \\ 2\,\text{جا}س\,\text{جتا}س & \text{جتا}^2 س + \text{جا}^2 س \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \text{جا}2س \\ \text{جا}2س & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س = 1$

$2\,\text{جا}س\,\text{جتا}س = \text{جا}2س$

$$\text{أ}^2 - \text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & \text{جا}2س \\ \text{جا}2س & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \text{جا}2س \\ \text{جا}2س & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = م_2$$ فرع (د)

③ $٣\begin{bmatrix}٢ & ١\\ -١ & س\end{bmatrix} - ٢\begin{bmatrix}١ & ص\\ ١ & ٥\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٤ & ١\\ -٥ & ٢\end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix}٦ & ٣\\ -٣ & ٣س\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-٢ & -٢ص\\ -٢ & -١٠\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٤ & ١\\ -٥ & ٢\end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix}٤ & ٣-٢ص\\ -٥ & ٣س-١٠\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٤ & ١\\ -٥ & ٢\end{bmatrix}$

$٣ - ٢ص = ١$ $\qquad$ $٣س - ١٠ = ٢$

$\Leftarrow \boxed{ص = ١}$ $\qquad$ $\Leftarrow س = ٤$ $\qquad$ $\therefore س + ص = ٥$

⑤ أ من الرتبة ٢×٢ ، $أ_{هـي} = هـ^{٢} - ي$

$\begin{bmatrix}أ_{١١} & أ_{٢١}\\ أ_{١٢} & أ_{٢٢}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٠ & -١\\ ٣ & ٢\end{bmatrix}$ فرع (ج)

⑥ فرع (أ) لاحظ أن القطر الثانوي كله أصفار

⑦ $\frac{١}{٢}أ = \begin{bmatrix}١ & ٠\\ -٢ & ١\end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix}٣ & ١\\ ٣ & ٤\end{bmatrix}$ ، $(ب - أ)^{٢}$ ؟؟

$أ = \begin{bmatrix}٢ & ٠\\ -٤ & ٢\end{bmatrix}$

$ب - أ = \begin{bmatrix}٣ & ١\\ ٣ & ٤\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}٢ & ٠\\ -٤ & ٢\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}١ & ١\\ ٧ & ٢\end{bmatrix}$

$$(\text{أ}-\text{ب})^2 = (\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}-\text{ب}) = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢+١ & ٧+١ \\ ٤+٧ & ١٤+٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ١١ & ٢١ \end{bmatrix}$$

فرع (ب)

(٨) $\begin{bmatrix} ٢ & \text{س}^2+١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٥ & \text{س}-١ \end{bmatrix}$

$\text{س}^2 + ١ = ١٠$

$\text{س}^2 = ٩$

$\therefore \text{س} = \pm ٣$

$\text{س} - ١ = ٢$

$\text{س} = ٣$

فرع (ب) $\{٣-، ٣\} \cap \{٣\} = \{٣\}$

(٩) $\text{أ}^2 = \begin{bmatrix} \text{س}^2 & \text{س ص} \\ \text{س ص} & \text{ص}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س}^2 & \text{س ص} \\ \text{س ص} & \text{ص}^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \text{س}^4 + \text{س}^2\text{ص}^2 & \text{س}^3\text{ص} + \text{س ص}^3 \\ \text{س}^3\text{ص} + \text{س ص}^3 & \text{س}^2\text{ص}^2 + \text{ص}^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{س}^2 \overset{١}{\cancel{(\text{س}^2+\text{ص}^2)}} & \text{س ص} \overset{١}{\cancel{(\text{س}^2+\text{ص}^2)}} \\ \text{س ص} \overset{١}{\cancel{(\text{س}^2+\text{ص}^2)}} & \text{ص}^2 \overset{١}{\cancel{(\text{س}^2+\text{ص}^2)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س}^2 & \text{س ص} \\ \text{س ص} & \text{ص}^2 \end{bmatrix}$$

$= \text{أ}$

(١٠) أ = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

١٥ أ + ١٥ ب - ١٤ (أ + ب)

= ١٥ أ + ١٥ ب - ١٤ أ - ١٤ ب = أ + ب

أ + ب = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ فرع (ب)

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درس

المحددات

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس المحددات
دفعة 2004

١) إذا كان $\begin{vmatrix} ٨ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & ١ & ١ \\ ١ & -٤ & ٥ \\ ٢س & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ فإن قيمة س = ...

أ) ح+ ب) ح - {٠} ج) ح د) ح-

٢) إذا كان $\begin{vmatrix} ٢أ & ٢ب \\ جـ & د \end{vmatrix} = ٦$ فإن $\begin{vmatrix} ٣جـ & ٣د \\ أ & ب \end{vmatrix}$

أ) -٦ ب) -٩ ج) ٣ د) ٩

٣) إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ١ \\ -١ \end{bmatrix}$ فإن قيمة |س.ص|

أ) ٩ ب) -٩ ج) ١ د) -١

٤) $\begin{vmatrix} ١ & جاس \\ جتاس & ٠ \end{vmatrix} =$

أ) جا٢س ب) -جا٢س ج) $\frac{١}{٢}$ جا٢س د) $-\frac{١}{٢}$ جا٢س

٥) قيم س التي تحقق المعادلة

$$\begin{vmatrix} س & -س & -٢ \\ س & ٢ & -١ \\ ١ & س & ٣ \end{vmatrix} = ١$$ هي:

أ) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٣}$ ج) $-\frac{١}{٢}$ ، -٣ د) $-\frac{١}{٢}$ ، ٣

٦) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية بحيث

أن $|٣أ| = ٥٤$ ، $|أ.ب| = -١٢$ فإن قيمة المقدار

$|٢أ| + |٥ب|$ ؟

أ) -٢٦ ب) ٢ ج) ٧٤ د) $\frac{٢٦}{٣}$

٧) إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ك \\ ك+١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -ك & ٢ \\ -١ & -٢ك \end{bmatrix}$

فإن قيمة/قيم التي تجعل $|أ+ب| = ٠$ هي ؟

أ) ١ ، ١٠ ب) -١ ، -١٠ ج) ٥ ، ٢ د) -٥ ، -٢

حلول أسئلة اختبار درس المحددات

دفعة 2004

① $\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \\ 2\text{س} & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$(8\times 1) - (2\times 4) = \text{س}\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2\text{س} & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2\text{س} & 4 \end{vmatrix}$

صفر $= \text{س}(-8-20) - 2(2-10\text{س}) + 4 - (-8\text{س})$

صفر $= -28\text{س} - 4 + 20\text{س} + 4 + 8\text{س}$

صفر = صفر (صحيحة ∀ س ∈ ح) فرع ج

② $\begin{vmatrix} 2\text{أ} & 2\text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix} = 6$ جد $\begin{vmatrix} 3\text{جـ} & 3\text{د} \\ \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix}$

$2\text{أد} - 2\text{ب جـ} = 6$ (÷2)

$\text{أد} - \text{ب جـ} = 3$ ⟵ (*)

$\begin{vmatrix} 3\text{جـ} & 3\text{د} \\ \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} = 3\text{جـ ب} - 3\text{أد} = 3(\text{ب جـ} - \text{أد})$

$= -3(\text{أد} - \text{ب جـ})$ عوض من (*)

$= -3 \times 3 = -9$ فرع ب

٣) إذا كانت $\text{س} = \begin{bmatrix} -٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{bmatrix} ١ \\ -١ \end{bmatrix}$ فما قيمة |س.ص|

$$\text{س.ص} = \underset{٢\times١}{\begin{bmatrix} -٤ & ٥ \end{bmatrix}} \underset{١\times٢}{\begin{bmatrix} ١ \\ -١ \end{bmatrix}} = \underset{١\times١}{\begin{bmatrix} -٤\times١ + ٥\times-١ \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} -٩ \end{bmatrix}$$

$$|\text{س.ص}| = \text{محدد} \begin{bmatrix} -٩ \end{bmatrix} = -٩$$

فرع ب

٤) $\begin{vmatrix} ١ & \text{جاس} \\ \text{جتاس} & ٠ \end{vmatrix} = ١\times٠ - \text{جاس جتاس}$

$= -\text{جاس جتاس} = -\frac{١}{٢}\text{جا٢س}$

فرع د

٥) $\begin{vmatrix} \text{س} & -\text{س} & -٢ \\ \text{س} & ٢ & -١ \\ ١ & \text{س} & ٣ \end{vmatrix} = ١$

$\text{س}\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ \text{س} & ٣ \end{vmatrix} + \text{س}\begin{vmatrix} \text{س} & -١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} \text{س} & ٢ \\ ١ & \text{س} \end{vmatrix} = ١$

س(٦+س) + س(٣س+١) - ٢(س² - ٢) = ١

٦س + س² + ٣س² + س - ٢س² + ٤ = ١

٢س² + ٧س + ٣ = ٠ ⟸ (٢س+١)(س+٣) = ٠

⟸ س = $-\frac{١}{٢}$ ، س = -٣ فرع جـ

٦) أ من الرتبة الثانية ⟸ $|٣أ| = (٣)^٢ |أ| = ٥٤$

⟸ $|أ| = \frac{٥٤}{٩} = ٦$

$|أ . ب| = -١٢$ ⟸ $|أ| . |ب| = -١٢$

⟸ $٦ . |ب| = -١٢$ ⟸ $|ب| = -٢$

قيمة المقدار $|٢أ| + |٥ب|$

$= ٤|أ| + ٢٥|ب|$

$= ٤ \times ٦ + ٢٥ \times -٢ = ٢٤ - ٥٠ = \boxed{-٢٦}$ فرع أ

٧) $أ + ب = \begin{bmatrix} ٢ - ل & ل + ٢ \\ ل & ٥ - ٢ل \end{bmatrix}$

$|أ + ب| = ٠$ ⟸ $(٢ - ل)(٥ - ٢ل) - [ل(ل + ٢)] = ٠$

⟸ $١٠ - ٤ل - ٥ل + ٢ل^٢ - [ل^٢ + ٢ل] = ٠$

⟸ $ل^٢ - ١١ل + ١٠ = ٠$

⟸ $(ل - ١٠)(ل - ١) = ٠$ ⟸ $ل = ١٠ ، ل = ١$

فرع أ

* ملاحظة هامة / المحدد لا يوزع في جمع المصفوفات

رياضيات الثاني عشر علمي

تمارين على خصائص المحددات

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

تمارين على خصائص المحددات

رياضيات الثاني عشر علمي

① بدون فك المحدد أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{ل} & \text{ل}^2 \\ 1 & \text{م} & \text{م}^2 \\ 1 & \text{ن} & \text{ن}^2 \end{vmatrix} = (\text{ل}-\text{م})(\text{م}-\text{ن})(\text{ن}-\text{ل})$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{ل} & \text{ل}^2 \\ 1 & \text{م} & \text{م}^2 \\ 1 & \text{ن} & \text{ن}^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ص}_3-\text{ص}_1]{\text{ص}_2-\text{ص}_1} \begin{vmatrix} 1 & \text{ل} & \text{ل}^2 \\ 0 & \text{م}-\text{ل} & \text{م}^2-\text{ل}^2 \\ 0 & \text{ن}-\text{ل} & \text{ن}^2-\text{ل}^2 \end{vmatrix}$$

(م - ل) من الصف الثاني

(ن - ل) من الصف الثالث

$$\Rightarrow (\text{م}-\text{ل})(\text{ن}-\text{ل}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ل} & \text{ل}^2 \\ 0 & 1 & \text{م}+\text{ل} \\ 0 & 1 & \text{ن}+\text{ل} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ص}_3-\text{ص}_2} (\text{م}-\text{ل})(\text{ن}-\text{ل}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ل} & \text{ل}^2 \\ 0 & 1 & \text{م}+\text{ل} \\ 0 & 0 & \text{ن}-\text{م} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{م}-\text{ل})(\text{ن}-\text{ل})(\text{ن}-\text{م})$$

$$= -1(\text{ل}-\text{م}) \times (\text{ن}-\text{ل}) \times -1(\text{م}-\text{ن})$$

$$= (\text{ل}-\text{م})(\text{م}-\text{ن})(\text{ن}-\text{ل}) \quad \#$$

② حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} \text{س} & 2\text{س}+1 & 3\text{س}+2 \\ 2\text{س}+1 & 3\text{س}+2 & 4\text{س}+3 \\ 3\text{س}+3 & 5\text{س}+6 & 10\text{س}+9 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل

$\text{ع}_2 - 2\text{ع}_1 \Leftarrow$

$$\begin{vmatrix} \text{س} & 1 & 3\text{س}+2 \\ 2\text{س}+1 & -\text{س} & 4\text{س}+3 \\ 3\text{س}+3 & -\text{س} & 10\text{س}+9 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$\text{ع}_3 - 3\text{ع}_1 \Leftarrow$

$$\begin{vmatrix} \text{س} & 1 & 2 \\ 2\text{س}+1 & -\text{س} & -2\text{س} \\ 3\text{س}+2 & -\text{س} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$\text{ع}_3 - 2\text{ع}_2 \Leftarrow$

$$\begin{vmatrix} \text{س} & 1 & 0 \\ 2\text{س}+1 & -\text{س} & 0 \\ 3\text{س}+2 & -\text{س} & 3\text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$3\text{س} \begin{vmatrix} \text{س} & 1 \\ 2\text{س}+1 & -\text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$3\text{س} \left(-\text{س}^2 - 2\text{س} - 1 \right) = \text{صفر}$$

$$-3\text{س} \left(\text{س}^2 + 2\text{س} + 1 \right) = \text{صفر}$$

إما $-3\text{س} = \text{صفر}$ أو $\text{س}^2 + 2\text{س} + 1 = \text{صفر} \Leftarrow (\text{س}+1)^2 = 0$

$\Leftarrow \text{س} = \text{صفر}$ $\qquad$ $\text{س} = -1$

③ بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١٢ & ١٥ & ١٧ \\ ٨ & ١١ & ١٣ \\ ٢- & ١ & ٣ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل

ص١ - ص٢

ص٢ - ص٣

$$\Longleftarrow \begin{vmatrix} ٤ & ٤ & ٤ \\ ١٠ & ١٠ & ١٠ \\ ٢- & ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٤ \times ١٠ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ٢- & ١ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٤ \times ١٠ \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

④ بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ - \text{ب جـ} \\ ١ & \text{ب} & \text{ب}^٢ - \text{جـ أ} \\ ١ & \text{جـ} & \text{جـ}^٢ - \text{أ ب} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل

ص٣ - ص١

ص٢ - ص١

$$\Longleftarrow \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ - \text{ب جـ} \\ ٠ & \text{أ} - \text{ب} & \text{أ}^٢ - \text{ب جـ} - \text{ب}^٢ + \text{جـ أ} \\ ٠ & \text{أ} - \text{جـ} & \text{أ}^٢ - \text{ب جـ} - \text{جـ}^٢ + \text{أ ب} \end{vmatrix}$$

$$= ١ \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & \text{أ}^٢ - \text{ب}^٢ + \text{جـ} (\text{أ} - \text{ب}) \\ \text{أ} - \text{جـ} & \text{أ}^٢ - \text{جـ}^٢ + \text{ب} (\text{أ} - \text{جـ}) \end{vmatrix} + ٠$$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب}) + \text{جـ} (\text{أ} - \text{ب}) \\ \text{أ} - \text{جـ} & (\text{أ} - \text{جـ})(\text{أ} + \text{جـ}) + \text{ب} (\text{أ} - \text{جـ}) \end{vmatrix}$$

$\Longleftarrow$

* تابع س٤ /

$$= \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & (\text{أ} - \text{ب})[\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}] \\ \text{أ} - \text{جـ} & (\text{أ} - \text{جـ})[\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}] \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}) \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & \text{أ} - \text{ب} \\ \text{أ} - \text{جـ} & \text{أ} - \text{جـ} \end{vmatrix} = \text{صفر} \quad \#$$

⑤ استخدم خصائص المحددات لإثبات أنه:

$$\begin{vmatrix} \text{ب} + \text{جـ} & \text{أ} - 1 & 1 \\ \text{جـ} + \text{أ} & \text{ب} - 1 & 1 \\ \text{ب} + \text{أ} & \text{جـ} - 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 \Longrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1 & \text{أ} - 1 & 1 \\ \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1 & \text{ب} - 1 & 1 \\ \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1 & \text{جـ} - 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} - 1 & 1 \\ 1 & \text{ب} - 1 & 1 \\ 1 & \text{جـ} - 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1) \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

٦ بدون فك المحدد أثبت أنه:

$$\begin{vmatrix} س & أ & أ \\ أ & س & أ \\ أ & أ & س \end{vmatrix} = (س+٢أ)(س-أ)^٢$$

الحل

$$\xrightarrow{ص_٣ + - ص_١} \begin{vmatrix} س & أ & أ \\ أ & س & أ \\ أ-س & ٠ & س-أ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{ع_١ + ع_٣} \begin{vmatrix} س+أ & أ & أ \\ ٢أ & س & أ \\ ٠ & ٠ & س-أ \end{vmatrix} \xrightarrow{ص_٢ + - ص_١}$$

$$\begin{vmatrix} س+أ & أ & أ \\ أ-س & س-أ & ٠ \\ ٠ & ٠ & س-أ \end{vmatrix} \xrightarrow{ع_١ + ع_٢} \begin{vmatrix} س+٢أ & أ & أ \\ ٠ & س-أ & ٠ \\ ٠ & ٠ & س-أ \end{vmatrix}$$

$$= (س+٢أ)(س-أ)^٢ \quad \#$$

٧ برهن باستخدام خصائص المحددات أنه

$$\begin{vmatrix} ١ & -١ & ب \\ ١-ب & ب & ب-١ \\ ب & -ب & ١ \end{vmatrix} = ١-ب^٤$$

الحل

$$\xrightarrow[-ب ص_١ + ص_٣]{(ب-١)ص_١ + ص_٢} \begin{vmatrix} ١ & -١ & ب \\ ٠ & ١ & ب^٤-١ \\ ٠ & ٠ & ١-ب^٢ \end{vmatrix} = ١-ب^٢ \quad \#$$

(8) أوجد قيمة ل التي تجعل (س − 1) أحد عوامل

$$\begin{vmatrix} \text{س} & 2 & 4 \\ \text{ل} & \text{ل}+\text{س} & \text{ل}+5 \\ 3 & \text{ل}+2 & -1 \end{vmatrix}$$

(الحل) ∵ (س − 1) أحد العوامل ⟸ س = 1 أحد جذور المحدد

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & \text{ل}+1 & \text{ل}+5 \\ 3 & \text{ل}+2 & -1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

⟸ نكمل الحل ونجد أن ل = 2 أو ل = 3

(9) في أي مثلث أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{جا}^2\text{أ} & \text{جتا}\,2\text{أ} \\ 1 & \text{جا}^2\text{ب} & \text{جتا}\,2\text{ب} \\ 1 & \text{جا}^2\text{جـ} & \text{جتا}\,2\text{جـ} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الطرف الأيمن =

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{جا}^2\text{أ} & \text{جتا}^2\text{أ} - \text{جا}^2\text{أ} \\ 1 & \text{جا}^2\text{ب} & \text{جتا}^2\text{ب} - \text{جا}^2\text{ب} \\ 1 & \text{جا}^2\text{جـ} & \text{جتا}^2\text{جـ} - \text{جا}^2\text{جـ} \end{vmatrix}$$

ع3 + ع2 ⟸

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{جا}^2\text{أ} & \text{جتا}^2\text{أ} \\ 1 & \text{جا}^2\text{ب} & \text{جتا}^2\text{ب} \\ 1 & \text{جا}^2\text{جـ} & \text{جتا}^2\text{جـ} \end{vmatrix}$$

⟸ ع2 + ع3

تابع ⟸

تابع س٩

$$= \begin{vmatrix} \text{جا}^2\text{أ} + \text{جتا}^2\text{أ} & \text{جا}^2\text{أ} & 1 \\ \text{جا}^2\text{ب} + \text{جتا}^2\text{ب} & \text{جا}^2\text{ب} & 1 \\ \text{جا}^2\text{جـ} + \text{جتا}^2\text{جـ} & \text{جا}^2\text{جـ} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{جا}^2\text{أ} & 1 \\ 1 & \text{جا}^2\text{ب} & 1 \\ 1 & \text{جا}^2\text{جـ} & 1 \end{vmatrix}$$

$= \text{صفر}$ #

(١٠) بدون فك المحدد أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{س} - \text{ع} & \text{س} - \text{ص} \\ \text{س} - \text{ع} & \text{ع} & \text{س} - \text{ص} \\ \text{س} + \text{ع} & \text{س} - \text{ع} & -\text{ص} \end{vmatrix} = \text{س}\,(2\text{س} - \text{ص})\,(2\text{ع} - \text{س})$$

(الحل) $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3$

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{س} - \text{ع} & 2\text{س} - \text{ص} \\ \text{س} - \text{ع} & \text{ع} & 2\text{س} - \text{ص} \\ \text{س} + \text{ع} & \text{س} - \text{ع} & 2\text{س} - \text{ص} \end{vmatrix}$$

$$(2\text{س} - \text{ص}) \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{س} - \text{ع} & 1 \\ \text{س} - \text{ع} & \text{ع} & 1 \\ \text{س} + \text{ع} & \text{س} - \text{ع} & 1 \end{vmatrix}$$

$\text{ع}_2 + \text{ع}_3$

$$(2\text{س} - \text{ص}) \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{س} & 1 \\ \text{س} - \text{ع} & \text{س} & 1 \\ \text{س} + \text{ع} & 2\text{س} & 1 \end{vmatrix}$$

يتبع

تابع الحل

$$\Longleftarrow \quad س(٢س - ص)\begin{vmatrix} ١ & ١ & ع \\ ١ & ١ & س - ع \\ ١ & ٢ & س + ع \end{vmatrix}$$

$$\xLeftarrow{ع_١ - ع_٢} \quad س(٢س - ص)\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ع \\ ٠ & ١ & س - ع \\ -١ & ٢ & س + ع \end{vmatrix}$$

ونفك المحدد فينتج

$$(٢س - ص)(س) \times -١(س - ع - ع)$$

$$= (٢س - ص) \times س \times (٢ع - س) \quad \#$$

(11) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} (أ+ب)^٢ & أ^٢ + ب^٢ & أب \\ (أ+د)^٢ & ج^٢ + د^٢ & جد \\ (هـ+و)^٢ & هـ^٢ + و^٢ & هـو \end{vmatrix} = صفر$$

الحل فك المربع الكامل في $ع_١$ $\Longleftarrow$

$$\begin{vmatrix} أ^٢ + ٢أب + ب^٢ & أ^٢ + ب^٢ & أب \\ أ^٢ + ٢أد + د^٢ & ج^٢ + د^٢ & جد \\ هـ^٢ + ٢هـو + و^٢ & هـ^٢ + و^٢ & هـو \end{vmatrix}$$

تابع س١١

$\xrightarrow{\text{ع٢ ع٣}}$ $\begin{vmatrix} \text{٢أب} & \text{أ}^2+\text{ب}^2 & \text{أ}^2+\text{٢أب}+\text{ب}^2 \\ \text{٢جـد} & \text{جـ}^2+\text{د}^2 & \text{جـ}^2+\text{٢جـد}+\text{د}^2 \\ \text{٢هـو} & \text{هـ}^2+\text{و}^2 & \text{هـ}^2+\text{٢هـو}+\text{و}^2 \end{vmatrix}$

ع٣ + ع٢

$\xrightarrow{}$

ع١ - (ع٢ + ع٣)

$\begin{vmatrix} \text{٢أب} & \text{أ}^2+\text{ب}^2 & ٠ \\ \text{٢جـد} & \text{جـ}^2+\text{د}^2 & ٠ \\ \text{٢هـو} & \text{هـ}^2+\text{و}^2 & ٠ \end{vmatrix}$

= صفر #

(١٢) أثبت أنه $\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ع}+\text{ل} & \text{س}+\text{ص} \\ \text{س} & \text{س}+\text{ل} & \text{ص}+\text{ع} \\ \text{ص} & \text{ص}+\text{ل} & \text{ع}+\text{س} \end{vmatrix}$ = صفر

الحل ع١ + ع٣ $\xrightarrow{}$ $\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ع}+\text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ \text{س} & \text{س}+\text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ \text{ص} & \text{ص}+\text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \end{vmatrix}$

ع٢ - ع٣ $\xrightarrow{}$ $\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ \text{س} & \text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ \text{ص} & \text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \end{vmatrix}$

تابع س ١٢

$$ل(س+ص+ع)\begin{vmatrix}1 & 1 & ع\\ 1 & 1 & س\\ 1 & 1 & ص\end{vmatrix}$$

$$= ل(س+ص+ع) \times \text{صفر} = \text{صفر}$$ #

١٣) باستخدام خواص المحدد أثبت أنه :

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ أ^2 & ب^2 & ج^2\\ أ^3 & ب^3 & ج^3\end{vmatrix} = (أ-ب)(ب-ج)(ج-أ)(أب+ب ج+ج أ)$$

الحل: $ع_1 - ع_2$ ، $ع_2 - ع_3$

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ أ^2-ب^2 & ب^2-ج^2 & ج^2\\ أ^3-ب^3 & ب^3-ج^3 & ج^3\end{vmatrix}$$

* بأخذ أ-ب عامل مشترك من $ع_1$
* بأخذ ب-ج عامل مشترك من $ع_2$

$$(أ-ب)(ب-ج)\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ أ+ب & ب+ج & ج^2\\ أ^2+أب+ب^2 & ب^2+ب ج+ج^2 & ج^3\end{vmatrix}$$

$$= (أ-ب)(ب-ج)\begin{vmatrix}أ+ب & ب+ج\\ أ^2+أب+ب^2 & ب^2+ب ج+ج^2\end{vmatrix}$$

وبفك المحدد لنحصل على

$$= (أ-ب)(ب-ج)(ج-أ)(أب+ب ج+ج أ)$$ #

(١٤) بدون فك المحدد أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & \text{ص} & \text{ص}^2 \\ 1 & \text{ع} & \text{ع}^2 \end{vmatrix} = (\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س})$$

(الحل)

ص٢ - ص١

ص٣ - ص٢

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 0 & \text{ص}-\text{س} & \text{ص}^2-\text{س}^2 \\ 0 & \text{ع}-\text{ص} & \text{ع}^2-\text{ص}^2 \end{vmatrix}$$

مت (ص - س) من الصف الثاني

مت (ع - ص) من الصف الثالث

$$(\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص})\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 0 & 1 & \text{ص}+\text{س} \\ 0 & 1 & \text{ع}+\text{ص} \end{vmatrix}$$

$$(\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص})\begin{vmatrix} 1 & \text{ص}+\text{س} \\ 1 & \text{ع}+\text{ص} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص})(\text{ع}+\cancel{\text{ص}}-\cancel{\text{ص}}-\text{س})$$

$$= -1\times(\text{س}-\text{ص})\times -1\times(\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س})$$

$$= (\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س}) \quad \#$$

(١٥) أثبت بدون فك المحددات أنه

$$\begin{vmatrix} ن_1 & م_1س - ل_1 & ل_1 + م_1س \\ ن_2 & م_2س - ل_2 & ل_2 + م_2س \\ ن_3 & م_3س - ل_3 & ل_3 + م_3س \end{vmatrix} = ٢س \qquad \begin{vmatrix} ن_1 & م_1 & ل_1 \\ ن_2 & م_2 & ل_2 \\ ن_3 & م_3 & ل_3 \end{vmatrix}$$

(الحل) $ع_1 - ع_2 \Leftarrow$

$$\begin{vmatrix} ن_1 & م_1س - ل_1 & ٢ل_1 \\ ن_2 & م_2س - ل_2 & ٢ل_2 \\ ن_3 & م_3س - ل_3 & ٢ل_3 \end{vmatrix}$$

$$= ٢ \qquad \begin{vmatrix} ن_1 & م_1س - ل_1 & ل_1 \\ ن_2 & م_2س - ل_2 & ل_2 \\ ن_3 & م_3س - ل_3 & ل_3 \end{vmatrix}$$

$$ع_2 + ع_1 = ٢ \qquad \begin{vmatrix} ن_1 & م_1س & ل_1 \\ ن_2 & م_2س & ل_2 \\ ن_3 & م_3س & ل_3 \end{vmatrix}$$

$$= ٢س \qquad \begin{vmatrix} ن_1 & م_1 & ل_1 \\ ن_2 & م_2 & ل_2 \\ ن_3 & م_3 & ل_3 \end{vmatrix} \quad \#$$

(١٦) بدون فك المحدد أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب جـ} & \text{جـ أ} & \text{أ ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$$

(الحل)

*ملاحظة / عند تبديل صفوف المحدد بأعمدة وأعمدة المحدد بنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب جـ} & \text{جـ أ} & \text{أ ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب جـ} \\ 1 & \text{ب} & \text{جـ أ} \\ 1 & \text{جـ} & \text{أ ب} \end{vmatrix}$$

اضرب ص١ في $\frac{\text{أ}}{\text{أ}}$

اضرب ص٢ في $\frac{\text{ب}}{\text{ب}}$

اضرب ص٣ في $\frac{\text{جـ}}{\text{جـ}}$

$$\frac{1}{\text{أ ب جـ}} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}^2 & \text{أ ب جـ} \\ \text{ب} & \text{ب}^2 & \text{أ ب جـ} \\ \text{جـ} & \text{جـ}^2 & \text{أ ب جـ} \end{vmatrix}$$

نخرج أ ب جـ عامل مشترك من ع٣

$$\cancel{\text{أ ب جـ}} \times \frac{1}{\cancel{\text{أ ب جـ}}} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}^2 & 1 \\ \text{ب} & \text{ب}^2 & 1 \\ \text{جـ} & \text{جـ}^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}^2 & 1 \\ \text{ب} & \text{ب}^2 & 1 \\ \text{جـ} & \text{جـ}^2 & 1 \end{vmatrix}$$

* تابع س ١٦

$$= -1 \times \begin{vmatrix} \text{أ} & 1 & \text{أ}^2 \\ \text{ب} & 1 & \text{ب}^2 \\ \text{جـ} & 1 & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$$ (تبديل ع٣ مع ع٢)

$$= -1 \times -1 \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$$ (تبديل ع٢ مع ع١)

$$= \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix} \#$$

(١٧) استخدم خواص المحددات في إثبات أنه :-

$$\begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص}+2 & \text{س} & \text{ص} \\ 1 & \text{ص}+2\text{س}+1 & \text{ص} \\ 1 & \text{س} & \text{س}+2\text{ص}+1 \end{vmatrix} = 2(\text{س}+\text{ص}+1)^3$$

الحل ع١ + ع٢ + ع٣ $\longleftarrow$

$$\begin{vmatrix} 2(\text{س}+\text{ص}+1) & \text{س} & \text{ص} \\ 2(\text{س}+\text{ص}+1) & \text{ص}+2\text{س}+1 & \text{ص} \\ 2(\text{س}+\text{ص}+1) & \text{س} & \text{س}+2\text{ص}+1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(\text{س}+\text{ص}+1) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{ص} \\ 1 & \text{ص}+2\text{س}+1 & \text{ص} \\ 1 & \text{س} & \text{س}+2\text{ص}+1 \end{vmatrix}$$

تابع س١٧

$$\xrightarrow{\text{ص}_2-\text{ص}_1,\ \text{ص}_3-\text{ص}_1}\ 2(\text{س}+\text{ص}+1)\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{ص} \\ 0 & 1+\text{س}+\text{ص} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\text{س}+\text{ص} \end{vmatrix}$$

$$= 2(\text{س}+\text{ص}+1)^3 \quad \#$$

(١٨) باستخدام خواص المحددات أثبت أنه:

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix} = (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})(\text{س}-\text{أ})(\text{س}-\text{ب})$$

(الحل) $\text{ع}_1+\text{ع}_2+\text{ع}_3$

$$\Longleftarrow \begin{vmatrix} \text{س}+\text{أ}+\text{ب} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{س}+\text{أ}+\text{ب} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{س}+\text{أ}+\text{ب} & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ 1 & \text{س} & \text{ب} \\ 1 & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ص}_1-\text{ص}_2,\ \text{ص}_2-\text{ص}_3}\ (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})\begin{vmatrix} 0 & \text{أ}-\text{س} & 0 \\ 0 & \text{س}-\text{ب} & \text{ب}-\text{س} \\ 1 & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix}$$

تابع س ١٨

$$(\text{س}+\text{أ}+\text{ب}) \begin{vmatrix} \text{أ}-\text{س} & 0 \\ \text{س}-\text{ب} & \text{ب}-\text{س} \end{vmatrix}$$

$$\Leftarrow (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}-\text{س})(\text{ب}-\text{س})$$

$$= (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})(\text{س}-\text{أ})(\text{س}-\text{ب}) \quad \#$$

(١٩) باستخدام خصائص المحددات أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ} \\ 1 & \text{ب} & \text{أ} \\ 1 & \text{أ} & -\text{ب} \end{vmatrix} = (\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}-\text{ب})$$

الحل

ص٢ − ص١ و ص٣ − ص١

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ} \\ 0 & \text{ب}-\text{أ} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{ب}-\text{أ} \end{vmatrix} = (\text{ب}-\text{أ})(-\text{ب}-\text{أ}) = -(\text{أ}-\text{ب}) \times -(\text{أ}+\text{ب})$$

$$= (\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}-\text{ب}) \quad \#$$

(٢٠) بدون فك المحدد أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} \text{ب}(\text{جـ}-\text{أ}) & \text{أ}(\text{ب}-\text{جـ}) & \text{جـ}\,\text{أ} \\ \text{أ}(\text{ب}-\text{جـ}) & \text{جـ}(\text{أ}-\text{ب}) & \text{ب}\,\text{جـ} \\ \text{جـ}(\text{أ}-\text{ب}) & \text{ب}(\text{جـ}-\text{أ}) & \text{أ}\,\text{ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب}\,\text{جـ} & \text{أ}^2 & \text{أ}^2 \\ \text{ب}^2 & \text{جـ}\,\text{أ} & \text{ب}^2 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ}^2 & \text{أ}\,\text{ب} \end{vmatrix}$$

الحل

الطرف الأيمن

ع$_1$ + ع$_2$ + ع$_3$ ، ع$_2$ + ع$_3$

$$\begin{vmatrix} \text{جـ أ} & \text{أ ب} & \text{ب جـ} \\ \text{ب جـ} & \text{جـ أ} & \text{أ ب} \\ \text{أ ب} & \text{ب جـ} & \text{جـ أ} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{ص}_1 \times \frac{\text{أ}}{\text{أ}} \\ \text{ص}_2 \times \frac{\text{ب}}{\text{ب}} \\ \text{ص}_3 \times \frac{\text{جـ}}{\text{جـ}} \end{matrix} \Longrightarrow \frac{1}{\text{أ ب جـ}} \begin{vmatrix} \text{جـ أ}^2 & \text{أ}^2\text{ب} & \text{أ ب جـ} \\ \text{ب}^2\text{جـ} & \text{أ ب جـ} & \text{أ ب}^2 \\ \text{أ ب جـ} & \text{ب جـ}^2 & \text{جـ}^2\text{أ} \end{vmatrix}$$

عامل مشترك

ع$_1$ ← أ

ع$_2$ ← ب

ع$_3$ ← جـ

$$\Longrightarrow \frac{1}{\cancel{\text{أ ب جـ}}} \times \cancel{\text{أ ب جـ}} \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ}^2 & \text{ب جـ} \\ \text{ب}^2 & \text{أ جـ} & \text{ب}^2 \\ \text{أ ب} & \text{جـ}^2 & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ}^2 & \text{ب جـ} \\ \text{ب}^2 & \text{أ جـ} & \text{ب}^2 \\ \text{أ ب} & \text{جـ}^2 & \text{جـ}^2 \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيسر} \ \#$$

٢١ أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ب+جـ & جـ+أ & أ+ب \\ ل+م & م+ك & ك+ل \\ ص+ع & ع+س & س+ص \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ك & ل & م \\ س & ص & ع \end{vmatrix}$$

الحل

الطرف الأيمن /

ع١ + ع٢ + ع٣ ⟸

$$\begin{vmatrix} ٢ب & جـ+أ & أ+ب \\ ٢ل & م+ك & ك+ل \\ ٢ص & ع+س & س+ص \end{vmatrix}$$

٢ عامل مشترك من ع١ ⟸

$$٢\begin{vmatrix} ب & جـ+أ & أ+ب \\ ل & م+ك & ك+ل \\ ص & ع+س & س+ص \end{vmatrix}$$

ع٣ − ع١ ⟸

$$٢\begin{vmatrix} ب & جـ+أ & أ \\ ل & م+ك & ك \\ ص & ع+س & س \end{vmatrix}$$

ع٢ − ع٣ ⟸

$$٢\begin{vmatrix} ب & جـ & أ \\ ل & م & ك \\ ص & ع & س \end{vmatrix}$$

تابع س٢١

$$= -٢ \begin{vmatrix} ب & جـ & أ \\ ل & م & هـ \\ ص & ع & س \end{vmatrix}$$

$$= -١ \times -١ \times ٢ \begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ م & ل & هـ \\ ع & ص & س \end{vmatrix}$$

$$\# \begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ م & ل & هـ \\ ع & ص & س \end{vmatrix} \; ٢ =$$

٢٢) حل المعادلة الآتية

$$\begin{vmatrix} ٣ & س \\ ٢س & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٥ & س & ٣ \\ ١+س & ٠ & ١- \end{vmatrix}$$

الحل باستخدام خصائص المحددات للطرف الأيمن

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٥ & س & ٣ \\ ٢+س & ٠ & ٠ \end{vmatrix} \xleftarrow{ص٣+ص١} \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٥ & س & ٣ \\ ١+س & ٠ & ١- \end{vmatrix}$$

تابع س٢٢

نفك المحدد باستخدام ص٣ $س+٢ \Leftarrow \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & س \end{vmatrix}$

$= (س+٢)(س-٠) = س^٢ + ٢س$

الطرف الأيسر

$\begin{vmatrix} س & ٣ \\ ١ & ٢س \end{vmatrix} = ٢س^٢ - ٣$

نساوي الطرف الأيمن بالأيسر

$س^٢ + ٢س = ٢س^٢ - ٣ \Leftarrow س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$

$\Leftarrow (س-٣)(س+١) = ٠$

$\Leftarrow س = ٣ \text{ ، } س = -١$

٢٣) أثبت باستخدام خصائص المحددات أنه

$\begin{vmatrix} أ & ب & ب \\ ب & أ & ب \\ ب & ب & أ \end{vmatrix} = (أ+٢ب)(أ-ب)^٢$

الحل $\underset{ع_١+ع_٣}{\overset{ع_١+ع_٢}{\Leftarrow}} \begin{vmatrix} أ+٢ب & ب & ب \\ أ+٢ب & أ & ب \\ أ+٢ب & ب & أ \end{vmatrix} \underset{من ع_١}{\overset{عامل مشترك}{\Leftarrow}} (أ+٢ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ١ & أ & ب \\ ١ & ب & أ \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{ص}_2 - \text{ص}_1]{\text{ص}_3 - \text{ص}_1} \quad = (أ + ٢ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ . & أ - ب & . \\ . & . & أ - ب \end{vmatrix}$$

نجد المحدد من خلال ضرب عناصر القطر الرئيسي

$$= (أ + ٢ب)\,(١)\,\underbrace{(أ - ب)\,(أ - ب)}$$

$$= (أ + ٢ب)\,(أ - ب)^{٢} \quad \#$$

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درس

النظير الضربي للمصفوفة المربعة

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس النظير الضربي للمصفوفة المربعة (دفعة 2004)

(١) إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٣ & س \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$ وكان $|أ| = |أ^{-1}|$ فإن إحدى قيم س الممكنة

أ) ٤ ب) ٨ ج) -٤ د) ٢

(٢) إذا كان $أ^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

فإن $(أ \times ب)^{-1} =$

أ) $\begin{bmatrix} -\frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢} \\ -\frac{١}{٢} & -\frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} -\frac{١}{٣} & ١ \\ ١ & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -\frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

③ إذا كان $(\text{أ}+\text{ب})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ وكانت $\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

حيث (أ+ب) مصفوفة غير منفردة فإن المصفوفة ب =

ⓐ $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -7 & -18 \end{bmatrix}$ ⓑ $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & -18 \end{bmatrix}$

ⓒ $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -7 & -18 \end{bmatrix}$ ⓓ $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 7 & -18 \end{bmatrix}$

④ إذا كانت $\text{س} = \begin{bmatrix} 3 & \text{أ} \\ \text{جـ} & \text{ب} \end{bmatrix}$ وكان $\text{س} = \text{س}^{t}$ فإن أ+جـ =

أ) -1 ب) صفر جـ) $\frac{1}{2}$ د) -3

⑤ إذا كانت $\text{ب}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ ، $(\text{س} \times \text{ب})^{-1} = \frac{\text{ب}}{|\text{ب}|}$

فإن المصفوفة س =

أ) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 3 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} \\ 3 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$

٦) إذا كانت $ب^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$ وكانت $ب \times أ - \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = و$

فإن المصفوفة $أ^{-١} =$

أ) $\begin{bmatrix} ٦- & ١٢- \\ ٥ & ٥ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٥}- & \frac{٢}{٥}- \\ \frac{١}{٦}- & \frac{١}{٦}- \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{٢}{٥} \\ \frac{١}{٦}- & \frac{١}{٦}- \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٥}- & \frac{٥}{٢} \\ \frac{١}{٦} & \frac{١}{٦} \end{bmatrix}$

٧) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

فإن حل المعادلة المصفوفية $أ^{-١} \times (س^{-١} \times ب)^{-١} = م_٢ + ب$ هي $س$

$=$

أ) $\begin{bmatrix} ٢٨ & ٥٢ \\ ١٤ & ١٤- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢٨- & ٥٢- \\ ١٤- & ١٤ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ٢٨ & ١ \\ ١٤- & ٥٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢٨- & ٥٢- \\ ١٤- & ١٤ \end{bmatrix}$

٨) إذا علمت أن أ ، ب مصفوفتان من الرتبة الثانية حيث أن

$(٢أب^{-١})^{-١}$ ـم٢ $= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ وكان $(٤أ)^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

فإن ب =

أ) $\begin{bmatrix} -٨ & ١٦ \\ ١٤ & ١٢ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} \frac{٨}{٢٠} & \frac{-١٦}{٢٠} \\ \frac{-١٤}{٢٠} & \frac{-١٢}{٢٠} \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} -٨ & \frac{١}{٢٠} \\ \frac{-٤٤}{٢٠} & \frac{-١٢}{٢٠} \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} \frac{-٨}{٢٠} & \frac{١٦}{٢٠} \\ \frac{٤٤}{٢٠} & \frac{١٢}{٢٠} \end{bmatrix}$

٩) حل المعادلة المصفوفية

$\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} \times س \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ هو س =

أ) $\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ -٧ & ٢ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} -٣ & -١ \\ -٧ & -٢ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -٧ & -٢ \end{bmatrix}$

(١٠) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ فإن أ$^{-١}$. ب − ٤ ٢ أ م$_{٢}$ =

(أ) $\begin{bmatrix} -٨ & ٠ \\ ٠ & ١٥ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٨ & -١ \\ ٠ & ١٥ \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} ٨ & ٠ \\ -١ & -١٥ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -٨ & ١ \\ ١ & -١٥ \end{bmatrix}$

حلول أسئلة اختبار درس النظير الضربي للمصفوفة المربعة

(١) $|أ^{-1}| = \frac{1}{|أ|} \Leftarrow |أ| = \frac{1}{|أ|}$ (معطى $|أ| = |أ^{-1}|$)

$\therefore |أ|\,|أ| = ١$ كذلك

لكن $|أ| = -٢س + ٩ \Leftarrow |أ|^{٢} = ١$

$\Leftarrow (-٢س + ٩)^{٢} = ١$

$\Leftarrow$ إما $-٢س + ٩ = ١$ أو $-٢س + ٩ = -١$

$\Leftarrow -٢س = -٨$ ، $-٢س = -١٠$

$\Leftarrow س = ٤$ ، $س = ٥$

$\therefore$ إحدى قيم س الممكنة هي (٤) فرع (أ)

(٢) $أ^{-1} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

$(أ \times ب)^{-1} = ب^{-1} \times أ^{-1}$

نجد $ب^{-1}$

$|ب| = ٢ \Leftarrow ب^{-1} = \frac{1}{٢}\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{٢} & ٠ \\ -\frac{1}{٢} & ١ \end{bmatrix}$

$(أ \times ب)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{٢} & ٠ \\ -\frac{1}{٢} & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ -\frac{٣}{٢} & \frac{1}{٢} \end{bmatrix}$ فرع (ب)

③ $(أ + أب)^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$

$(أ + أب)^{-1} = س$ (مجرد تسمية)

$\left((أ + أب)^{-1}\right)^{-1} = س^{-1}$

$\Leftarrow$ $أ + أب = س^{-1}$ لذلك نوجد $س^{-1}$

$|س| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix} = ١٤ - ١٥ = -١$

$س^{-1} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} -٣ & ٧ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow$ $أ + أب = \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ (اضرب في $أ^{-1}$ من اليمين للجهتين)

$أ^{-1}(أ + أب) = أ^{-1} \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$م + ب = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow$ $م + ب = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ٨ & -١٨ \end{bmatrix}$ $\Leftarrow$ $ب = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ٨ & -١٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٧ & -١٨ \end{bmatrix}$ فرع (د)

٤) $\text{س} = \text{س}^{-1}$ (اضرب في س للطرفين)

$\text{س} \times \text{س} = \text{س} \times \text{س}^{-1}$

$\text{س}^{2} = \text{م} \Leftarrow |\text{س}^{2}| = |\text{م}| \Leftarrow |\text{س}| = \pm 1$

$\text{س}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -3 & \text{جـ} \\ \text{م} & -\text{ب} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & \text{م} \\ \text{جـ} & \text{ب} \end{bmatrix}$ (عندما $|\text{س}| = 1$)

(مرفوض لأن $\text{س}^{-1} = \text{س}$ معطى)

$\text{س}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -3 & \text{جـ} \\ \text{م} & -\text{ب} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\text{جـ} \\ -\text{م} & \text{ب} \end{bmatrix}$ (عندما $|\text{س}| = -1$)

$\because \text{س}^{-1} = \text{س}$

$\therefore \begin{bmatrix} 3 & -\text{جـ} \\ -\text{م} & \text{ب} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \text{م} \\ \text{جـ} & \text{ب} \end{bmatrix}$

من تساوي المصفوفتين $-\text{جـ} = \text{م} \Leftarrow \text{م} + \text{جـ} = \text{صفر}$

فرع (ب)

(5) $(\text{س} \times \text{ب})^{-1} = \dfrac{\text{ب}}{|\text{ب}|}$

$\Leftarrow \text{ب}^{-1} \times \text{س}^{-1} = \dfrac{\text{ب}}{|\text{ب}|}$ (اضرب في ب من جهة اليمين)

$\text{ب} \times \text{ب}^{-1} \times \text{س}^{-1} \times \text{ب} = \text{ب} \times \text{ب} \times \dfrac{1}{|\text{ب}|} \Leftarrow \text{س}^{-1} = \text{ب}^{2} \times \dfrac{1}{|\text{ب}|} \leftarrow (*)$

$|\text{ب}^{-1}| = 12$

$\text{ب} = (\text{ب}^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Leftarrow \text{ب} = \dfrac{1}{12} \times 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \text{ب} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \text{ب}^{2} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{ب}^{2} = \dfrac{1}{36}\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ عوض عن ب² في (*)

$\text{س}^{-1} = \dfrac{1}{36}\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \dfrac{1}{\frac{1}{12}} = \dfrac{12}{36}\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \text{س}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Leftarrow |\text{س}^{-1}| = \dfrac{1}{3} \times 3 - 0 = 1$

$\therefore \text{س} = (\text{س}^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-4}{3} & 3 \end{bmatrix}$ ح ع (م)

٦) $\text{ب} \times \text{أ} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \text{ب} \times \text{أ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \text{ب} \times \text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (اضرب الطرفين في ب^{-1} من جهة اليمين)

$\text{ب}^{-1}\,\text{ب}\,\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Leftarrow \text{أ} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -12 \end{bmatrix}$

$|\text{أ}| = 5 \times -12 - (6 \times -5) = -30$

$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ فرع ج

٧) $\text{أ}^{-1} \times (\text{س}^{-1} \times \text{ب})^{-1} = \text{م}_2 + \text{ن}$

$\Leftarrow \text{أ}^{-1} \times \text{ب}^{-1} \times \text{س} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow (\text{ب}\,\text{أ})^{-1} \times \text{س} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ اضرب في (ب أ) من اليمين

$\Leftarrow (\text{ب}\,\text{أ})(\text{ب}\,\text{أ})^{-1} \times \text{س} = \text{ب}\,\text{أ} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \text{س} = \text{ب}\,\text{أ} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow (*)$

لكن $\text{ب}\,\text{أ} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 10 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}$

عوض عن ب أ في (*)

$\therefore \text{س} = \begin{bmatrix} -12 & 10 \\ 14 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \Leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} 52 & 28 \\ -14 & 14 \end{bmatrix}$

فرع أ

⑧ $(٢\,أ\,ب^{-1})^{-1} - م_٢ = \begin{bmatrix}١ & ٢\\ -١ & ٣\end{bmatrix}$

$\frac{١}{٢}(ب^{-1})^{-1}\,أ^{-1} = \begin{bmatrix}١ & ٢\\ -١ & ٣\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}١ & ٠\\ ٠ & ١\end{bmatrix}$

$\frac{١}{٢}\,ب\,أ^{-1} = \begin{bmatrix}٢ & ٢\\ -١ & ٤\end{bmatrix} \Leftarrow ب\,أ^{-1} = \begin{bmatrix}٤ & ٤\\ -٢ & ٨\end{bmatrix}$

$\Leftarrow ب\,أ^{-1}\,أ = \begin{bmatrix}٤ & ٤\\ -٢ & ٨\end{bmatrix} \times أ$

$\Leftarrow ب = \begin{bmatrix}٤ & ٤\\ -٢ & ٨\end{bmatrix} \times أ \longrightarrow (*)$

لكن $(٤أ)^{-1} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix}٢ & ٣\\ -١ & ١\end{bmatrix}$

$\Leftarrow \frac{١}{٤}\,أ^{-1} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix}٢ & ٣\\ -١ & ١\end{bmatrix} \Leftarrow أ^{-1} = \begin{bmatrix}٤ & ٦\\ -٢ & ٢\end{bmatrix}$

$|أ^{-1}| = ٨ + ١٢ = ٢٠ \Leftarrow أ = \frac{١}{٢٠}\begin{bmatrix}٢ & -٦\\ ٢ & ٤\end{bmatrix}$

عوض عن أ في (*)

$ب = \frac{١}{٢٠}\begin{bmatrix}٤ & ٤\\ -٢ & ٨\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٢ & -٦\\ ٢ & ٤\end{bmatrix} \Leftarrow ب = \frac{١}{٢٠}\begin{bmatrix}١٦ & -٨\\ ١٢ & ٤٤\end{bmatrix}$

$\Leftarrow ب = \begin{bmatrix}\frac{١٦}{٢٠} & \frac{-٨}{٢٠}\\ \frac{١٢}{٢٠} & \frac{٤٤}{٢٠}\end{bmatrix}$ فرع (د)

⑨ $\begin{bmatrix}-1&0\\3&-1\end{bmatrix} \times \text{س} \times \begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-1&0\\3&-1\end{bmatrix} \times \text{س} \times \underbrace{\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}}_{\text{م}_2} = \begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-1&0\\3&-1\end{bmatrix} \times \text{س} = \begin{bmatrix}1&3\\-1&-2\end{bmatrix} \longleftarrow$ (*)

محدد $\begin{bmatrix}-1&0\\3&-1\end{bmatrix} = 1 - 0 = 1$ ①

$\begin{bmatrix}-1&0\\3&-1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}-1&0\\-3&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&0\\-3&-1\end{bmatrix}$ (اضربها من جهة اليمين ع (*))

$\underbrace{\begin{bmatrix}-1&0\\3&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1&0\\3&-1\end{bmatrix}}_{\text{م}_2} \times \text{س} = \begin{bmatrix}-1&0\\3&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&3\\-1&-2\end{bmatrix}$

$\text{س} = \begin{bmatrix}-1&0\\-3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\-1&-2\end{bmatrix} \Longleftarrow \text{س} = \begin{bmatrix}-1&-3\\-2&-7\end{bmatrix}$ فرع (ج)

⑩ $\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}$

$\text{أ}^{-1} . \text{ب} - 24\,\text{م}_2$

$= \begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}-3&-4\\6&0\end{bmatrix} - 24\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}24&-8\\15&-4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}24&0\\0&24\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&-8\\15&0\end{bmatrix}$ فرع (أ)

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار الوحدة الثالثة

(المصفوفات والمحددات)

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الثالثة (المصفوفات والمحددات)

رياضيات 12 علمي دفعة 2004

① إذا كان $\begin{bmatrix} س^2-1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & ص+5 \\ 2 & س+1 \end{bmatrix}$

فإن قيم س ، ص على الترتيب هي :

أ) ٣ ، -٨ ب) -٨ ، ٣ جـ) -٣ ، -٨ د) ±٣ ، -٨

② إذا كان جـ = $\begin{bmatrix} صفر & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، أ = $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ + ب فإن ب جـ - أ جـ =

أ) $\begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} -5 & -16 \\ -3 & -18 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -12 & -9 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}$

③ قيم س ، ص على الترتيب التي تجعل

$\begin{bmatrix} س & ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}$

أ) ١ ، $\frac{1}{4}$ ب) -١ ، $-\frac{1}{4}$ جـ) -١ ، $-\frac{1}{4}$ د) ١ ، $-\frac{1}{4}$

④ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ فإن قيمة

المصفوفة ٢٢أ + ٧٢ب - ٥(أ + ٢ب) =

أ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 17 & 17 \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 51 & -34 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 51 & 34 \end{bmatrix}$

٥) حل المعادلة المصفوفية

$$-3\left(\text{س} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right) = \text{س} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أ) $\begin{bmatrix} \frac{10}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -\frac{10}{4} & -\frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} -\frac{10}{4} & \frac{7}{4} \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -\frac{10}{4} & \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$

٦) إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & \text{ل} \\ \text{ل}+1 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} -\text{ل} & 2 \\ -1 & -2\text{ل} \end{bmatrix}$ فإن قيمة

ل التي تجعل $|\text{أ} + \text{ب}| = $ صفر هي ؟

أ) ١ ، ١٠ ب) -١ ، ١٠ ج) -١ ، -١٠ د) ٠ ، ١٠

٧) إذا كانت $\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix}$ ، $|3\text{ب}| = -18$

فإن $\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ل} \\ \text{ع} - 3\text{س} & \text{ل} - 3\text{ص} \end{vmatrix} = $

أ) ٦ ب) -٦ ج) ٢ د) -٢

(٨) عند حل معادلتين باستخدام كريمر كانت س = ٢

|أس| + ٤|أص| = ١٠ وكانت |٤أص| = ٦٤ فإن قيمة ص =

أ) -٣ ب) $\frac{٤}{٣}$ ج) -٦ د) $\frac{-٤}{٣}$

(٩) عند حل النظام التالي باستخدام طريقة جاوس فإن قيم أ، ب، جـ على الترتيب هي ؟

٤أ + ٥ب + جـ = ١٤

أ + ٣ب + ٢جـ = ٧

ب + ١٠أ = ١٢

أ) -١، ٢، ١ ب) ٠، ١، -٢ ج) ١، ٢، ٠ د) ١، -١، ٢

(١٠) إذا كانت $س^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$

فإن ع التي تحقق $ع^{-١}$ × س = ص هي ؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -\frac{١}{٢} & -٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & -٥ \\ \frac{١}{٢} & -٣ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -\frac{١}{٢} & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -١ & -٥ \\ \frac{١}{٢} & -٣ \end{bmatrix}$

(١١) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س، ص حيث $أ^{٢}$ + س أ + ص $I_{٢}$ = ٠

أ) س = ١ ، ص = -٥ ب) س = -١ ، ص = -٥

ج) س = ٠ ، ص = -١ د) س = ٠ ، ص = ١

(١٢) إذا كانت أ، ب، جـ، د مصفوفات بحيث ٣أ + ب جـ = د
فإذا علمت أن رتبة ب = ٥×٢ ورتبة د = ٥×٣ ، فما رتبة
أ، جـ على الترتيب ؟!

(أ) ٥×٣ ، ٢×٣ (ب) ٥×٢ ، ٢×٣

(جـ) ٢×٣ ، ٣×٢ (د) ٢×٥ ، ٣×٥

(١٣) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ & -١ \\ -٢ & ٩ & ١ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة $\left(\sum_{هـ=١}^{٣} أ_{٢هـ} \right)^{٢}$ =

(أ) ٢١ (ب) ٣٦ (جـ) ٦٤ (د) ٢٨٩

(١٤) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} س+١ & ١ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٣ \\ ٢ & ٣ & س+٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة
فأوجد قيمة س =

(أ) $\frac{١٠}{٣}$ (ب) $\frac{-١٠}{٣}$ (جـ) $\frac{-١}{١٠}$ (د) $\frac{١}{١٠}$

(١٥) إذا كان ص = ٢س$^{-١}$ ، |ص| = ٤ حيث س مصفوفة من الرتبة
٢×٢ فما قيمة |ص^{٢} س|

(أ) -٤ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) -١٦

(١٦) عند استخدام قاعدة كريمر في ايجاد حل نظام مكون من معادلتين خطيتين في متغيرين إحداهما ص = $\frac{١}{٢}$ - س وُجد أن

|أس| + |أص| = ٧ فإن |أ| =

(أ) ٦ (ب) ١٤ (ج) ١٦ (د) ٢

(١٧) عند حل نظام باستخدام قاعدة كريمر وجد أن

أ × أس = $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، أ × أص = $\begin{bmatrix} ٢٦ & ٦ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن قيمة ص

(أ) ٢٤ (ب) ٢٦ (ج) ٦ (د) ٣١

(١٨) إذا كانت $أ^{-1}$ = $\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب^{-1}$ أ = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن أ + $ب^{-1}$ =

(أ) $\begin{bmatrix} ٤- & ٩ \\ ٦- & ٧ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٤- & ٩ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٤- & ٧ \\ ٦- & ٩ \end{bmatrix}$

(١٩) قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} ١- & ٢س & ٢ \\ ٤ & ١- & ٠ \\ ١ & س & ٢ \end{vmatrix}$ = $\frac{١}{٢}$ $\begin{vmatrix} ٢- & ١٧ \\ ٢ & س \end{vmatrix}$ هي

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{٦}$-

(٢٠) إذا كانت س ، ص مصفوفتان غير منفردتين من الرتبة ن وكان

|-٣س × $ص^{-1}$| = ٢٧ ، |س| = ٢ ، |ص| = ٦ فإن ن =

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ٥

حلول أسئلة اختبار الوحدة الثالثة

(المصفوفات والمحددات)

صفحة 204

① $\begin{bmatrix} س^2-1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & ص+5 \\ 2 & س+1 \end{bmatrix}$

$س^2 - 1 = 8 \Leftarrow س^2 = 9 \Leftarrow س = \pm 3$

كذلك $س + 1 = 4 \Leftarrow س = 3$

$\therefore س = \{+3, -3\} \cap \{+3\} = 3$

$ص + 5 = -3 \Leftarrow ص = -8$ فرع (أ)

② $ب\,جـ - أ\,جـ = (ب - أ)\,جـ$

$= \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -5 & -16 \\ -3 & -18 \end{bmatrix}$ فرع (جـ)

③ الطرف الأيمن

$\begin{bmatrix} س & ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} 3س - 4ص & -3س & 9س - 8ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}$

−٣س = −٣ ⟸ س = ١

٣ × ١ − ٤ص = ٤ ⟸ −٤ص = ١ ⟸ ص = $-\frac{١}{٤}$

عوض عن س ، ص

٩س − ٨ص

= ٩ × ١ − ٨ × $-\frac{١}{٤}$ = (١١) ✓ ⟸ س = $\boxed{١}$ ، ص = $\boxed{-\frac{١}{٤}}$ فرع (د)

(٤) ٣٢أ + ٧٢ب − ٥أ − ١٠ب = ١٧أ + ١٧ب = ١٧(أ + ب)

أ + ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

١٧(أ + ب) = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ -٣٤ & ٥١ \end{bmatrix}$ فرع (ج)

(٥) −٣س + ٣ $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ = س + $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

= −٣س + $\begin{bmatrix} -٦ & -٩ \\ -١٢ & ٣ \end{bmatrix}$ = س + $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

⟸ −٣س − س = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ − $\begin{bmatrix} -٦ & -٩ \\ -١٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ⟸ −٤س = $\begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ١٢ & -٢ \end{bmatrix}$

∴ س = $-\frac{١}{٤}$ $\begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ١٢ & -٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -\frac{٧}{٤} & -\frac{١٠}{٤} \\ -٣ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ فرع (ب)

(٦) أ + ب = $\begin{bmatrix} ٢ - ك & ك + ٢ \\ ك & ٥ - ٢ك \end{bmatrix}$

|أ + ب| = (٢ - ك)(٥ - ٢ك) - ك(ك + ٢)

= ١٠ - ٤ك - ٥ك + ٢ك^2 - ك^2 - ٢ك

= ك^2 - ١١ك + ١٠

لكن |أ + ب| = ٠ ⟸ ك^2 - ١١ك + ١٠ = ٠

⟸ (ك - ١٠)(ك - ١) = ٠

∴ إما ك = ١٠ أو ك = ١ فرع أ

(٧) |٣ب| = -١٨ ⟸ ٣^2 |ب| = -١٨ ⟸ |ب| = -٢

كذلك |ب| = س ل - ص ع = -٢ ⟵ (*)

$\begin{vmatrix} ع & ل \\ ع - ٣س & ل - ٣ص \end{vmatrix}$ = ع(ل - ٣ص) - ل(ع - ٣س)

= $\cancel{ع ل}$ - ٣ع ص - $\cancel{ل ع}$ + ٣ل س

= ٣(ل س - ص ع)

= ٣ × |ب| = ٣ × -٢ = -٦ فرع ب

⑧ $|٤\,أص| = ٦٤ \Leftarrow (٤)^٢\,|أص| = ٦٤$

$\Leftarrow |أص| = \frac{٦٤}{١٦} = ٤$

$|أس| + ٤\,|أص| = ١٠$

$|أس| + ٤ \times ٤ = ١٠ \Leftarrow |أس| = ١٠ - ١٦ \Leftarrow |أس| = -٦$

$س = \frac{|أس|}{|أ|} \Leftarrow ٢ = \frac{-٦}{|أ|} \Leftarrow |أ| = -٣$

$ص = \frac{|أص|}{|أ|} = \frac{٤}{-٣}$ فرع (د)

⑨ $\left[\begin{array}{ccc|c} ٤ & ٥ & ١ & ٤ \\ ١ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ١٠ & ١ & ٠ & ١٢ \end{array}\right] \xrightarrow{-١٠ص_٢ + ص_٣} \left[\begin{array}{ccc|c} ٤ & ٥ & ١ & ١٤ \\ ١ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ٠ & -٢٩ & -٢٠ & ٥٨ \end{array}\right]$

$\xrightarrow{\text{تبديل } ص_٢ \text{ ب } ص_١ \ \leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ٤ & ٥ & ١ & ١٤ \\ ٠ & -٢٩ & -٢٠ & ٥٨ \end{array}\right]$

$\xrightarrow{-٤ص_١ + ص_٢} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ٠ & -٧ & -٧ & -١٤ \\ ٠ & -٢٩ & -٢٠ & -٥٨ \end{array}\right]$

$\xrightarrow{-\frac{١}{٧}ص_٢} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ٠ & ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & -٢٩ & -٢٠ & -٥٨ \end{array}\right]$

$\xrightarrow{٢٩ص_٢ + ص_٣} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ٠ & ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٩ & ٠ \end{array}\right]$

بالتعويض بطريقة عكسية

$٩جـ = صفر \Leftarrow جـ = صفر$

$ب + جـ = ٢ \Leftarrow ب + ٠ = ٢ \Leftarrow ب = ٢$

$أ + ٣ب + ٢جـ = ٧ \Leftarrow أ + ٦ + ٠ = ٧ \Leftarrow \boxed{أ = ١}$

$\therefore$ (أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ٠) فرع (جـ)

(١٠) $ع^{-1} \times س = ص$ (اضرب الطرفين في $س^{-1}$ من اليسار)

$ع^{-1} \times س \times س^{-1} = ص \, س^{-1}$

$ع^{-1} = ص \, س^{-1}$

$$ع^{-1} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١٠ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$$

$|ع^{-1}| = -١٢ + ١٠ = -٢$

$$ع = (ع^{-1})^{-1} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} -٢ & -١٠ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -\frac{١}{٢} & -٣ \end{bmatrix}$$ فرع (أ)

(١١) $$أ^٢ = أ \times أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

$أ^٢ + س \, أ + ص \, م_٢ = و_٢$

$$\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢س & س \\ ٣س & -س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ص & ٠ \\ ٠ & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

[٧+٢س+ص   ١+س]   [٠ ٠]
[٣+٣س   ٤-س+ص] = [٠ ٠]

٣+٣س = ٠ ⇐ س = -١

كذلك ١+س = ٠ ⇐ س = -١

∴ س = -١ ✓

٤-س+ص = ٠ ⇐ ٤+١+ص = ٠ ⇐ ص = -٥

كذلك ٧+٢س+ص = ٠ ⇐ ٧-٢+ص = ٠ ⇐ ص = -٥ ✓

∴ س = -١ ، ص = -٥ فرع (ب)

(١٢) ٣أ+ب جـ = د ، ب = ٢×٥
د = ٣×٥

٣ أ + ب جـ = د

٣×٥   ٢×٥ ٣×٢   ٣×٥

أ ← ٣×٥ فرع (أ)

جـ ← ٣×٢

(١٣) $\left(\sum_{\text{هـ}=1}^{3} a_{2\text{هـ}} \right)^{2}$

(تعني مجموع المدخلات في الصف الثاني من العمود الأول للعمود الثالث$)^{2}$ $= (2+5-1)^{2} = 36$ فرع ب

(١٤) أ منفردة ⟸ |أ| = صفر

$|أ| = (س+1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & س+2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & س+2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$ صفر

⟸ $(س+1)(0-9) - [(س+2)-6] + 2\times(3-0) =$ صفر

⟸ $-9س - 9 - س - 2 + 6 + 6 = 0$

⟸ $-10س + 1 = 0$ ⟸ $-10س = -1$ ⟸ $س = \frac{1}{10}$ فرع د

(١٥) $ص = 2س^{-1}$ ⟸ $|ص| = |2س^{-1}|$ ⟸ $|ص| = 4|س^{-1}|$

⟸ $4 = 4|س^{-1}|$

⟸ $|س^{-1}| = 1$ ⟸ $|س| = 1$

$|ص^{2}س| = |ص|^{2} \times |س| = 16 \times 1 = 16$ فرع جـ

(١٦) $\text{ص} + \text{س} = \frac{1}{2}$ ← (*)

$|\text{أس}| + |\text{أص}| = ٧$ (بقسمة على $|\text{أ}|$ حيث $|\text{أ}| \neq$ صفر)

$$\frac{|\text{أس}|}{|\text{أ}|} + \frac{|\text{أص}|}{|\text{أ}|} = \frac{٧}{|\text{أ}|}$$

$\text{س} + \text{ص} = \frac{٧}{|\text{أ}|}$ ← (**)

من (*) و (**) $\frac{٧}{|\text{أ}|} = \frac{1}{2} \Leftarrow |\text{أ}| = ١٤$ فرع (ب)

(١٧) $\text{أ} \times \text{أس} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ (نأخذ المحدد للطرفين)

$\Leftarrow |\text{أ} \times \text{أس}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} \Leftarrow |\text{أ}| \times |\text{أس}| = ٤$ ← (*)

كذلك $\text{أص} \times \text{أس} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢٦ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ (نأخذ المحدد للطرفين)

$|\text{أص}| \times |\text{أس}| = \begin{vmatrix} ٦ & ٢٦ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix} \Leftarrow |\text{أص}| \times |\text{أس}| = ٢٤$ ← (**)

بقسمة (**) على (*)

$$\frac{\cancel{|\text{أس}|} \times |\text{أص}|}{\cancel{|\text{أس}|} \times |\text{أ}|} = \frac{٢٤}{٤} \Leftarrow \frac{|\text{أص}|}{|\text{أ}|} = ٦$$

$\Leftarrow \text{ص} = ٦$ فرع (ج)

(١٨) $|أ^{-١}| = -١ \neq$ صفر

$أ = (أ^{-١})^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$

$ب^{-١} أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ اضرب طرفي المعادلة في $أ^{-١}$ من اليسار

$ب^{-١} أ أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} \Leftarrow ب^{-١} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix}$

$\therefore أ + ب^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٧ & -٤ \\ ٩ & -٦ \end{bmatrix}$ نوع (د)

(١٩) $\begin{vmatrix} -١ & ٢س & ٢ \\ ٤ & -١ & ٠ \\ ١ & س & ٢ \end{vmatrix} = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} -٢ & ١٧ \\ ٢ & س \end{vmatrix}$

$-١(-٢) - ٢س(٨) + ٢(٤س + ١) = \frac{١}{٢}(-٢س - ٣٤)$

$٢ - ١٦س + ٨س + ٢ = -س - ١٧$

$\Leftarrow ٢ - ١٦س + ٨س + ٢ + س + ١٧ = ٠$

$\Leftarrow -٧س + ٢١ = ٠ \Leftarrow \frac{\cancel{-٧}س}{\cancel{-٧}} = \frac{-٢١}{-٧}$

$\therefore س = ٣$ نوع (أ)

(٢٠) $|-٣س \times ص^{-١}| = ٢٧$ ، $|س| = ٢$ ، $|ص| = ٦$ ، ن = ؟

الحل $|-٣س \times ص^{-١}| = ٢٧$

$(-٣)^{ن} |س| \times |ص|^{-١} = ٢٧$

$(-٣)^{ن} \times \overset{}{\underset{١}{\cancel{٢}}} \times \frac{١}{\underset{٣}{\cancel{٦}}} = ٢٧$

$\Leftarrow (-٣)^{ن} = (٣)^{٤} \Leftarrow \boxed{ن = ٤}$ فرع (ب)