رياضيات الثاني عشر علمي

الوحدة الثالثة: المصفوفات والمحددات

أ.   هدى أسامة فرج

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

المصفوفة

Matrix

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

أ. هدى فرج

* المصفوفة (Matrix)

* **تعريف المصفوفة /** هي تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد على هيئة صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين [ ] ويرمز لها بأحد الأحرف أ ، ب ، ..... وتسمى الأعداد داخل المصفوفة مدخلات.

* تتحدد رتبة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة فيها على النحو م × ن حيث م تمثل عدد الصفوف ، ن تمثل عدد الأعمدة (وتقرأ م في ن)

* عدد مدخلات المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة .

مثال / لتكن أ = $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

✓ عدد صفوف المصفوفة أ = ٢ ← رتبة المصفوفة أ هي ٢ × ٣

✓ عدد أعمدة المصفوفة أ = ٣ وتكتب أ$_{2\times3}$

✓ عدد مدخلات المصفوفة أ = ٢ × ٣ = ٦

✓ المدخلة أ$_{11}$ = ٥ (وهي المدخلة التي تقع في الصف الأول العمود الأول)

✓ المدخلة أ$_{23}$ = ٣ (وهي المدخلة التي تقع في الصف الثاني العمود الثالث)

✓ المدخلة أ$_{22}$ = صفر ، المدخلة أ$_{21}$ = ٤ وهكذا .....

أ. هدى فرج

وبشكل عام / الصورة العامة للمصفوفة من الرتبة م×ن تكون على النحو

$$\text{أ}_{\text{م×ن}} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١ن} & \text{---} & (\text{أ}_{١هـ}) & \text{---} & \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢ن} & & \text{———} & & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٢١} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \text{أ}_{\text{ين}} & & \text{-----} & & (\text{أ}_{\text{ي}٢}) & (\text{أ}_{\text{ي}١}) \\ \text{أ}_{\text{من}} & & \text{-----} & & \text{أ}_{\text{م}٢} & \text{أ}_{\text{م}١} \end{bmatrix}$$

حيث تتحدد أي مدخلة في المصفوفة بحسب الصف والعمود الواقعة فيهما.

مثال (١) إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ٣ & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

(أ) جد رتبة كل من المصفوفتين أ ، ب

الحل أ تتكون من ٣ صفوف وعمودين ⟸ أ من الرتبة ٣×٢ وتكتب $\text{أ}_{٣×٢}$

ب تتكون من صفين وثلاثة أعمدة ⟸ ب من الرتبة ٢×٣ وتكتب $\text{ب}_{٢×٣}$

(ب) جد $\text{أ}_{٣٢}$ ، $\text{ب}_{٢١}$ ، $\text{أ}_{٢٣}$ ، $\text{ب}_{٢٣}$

الحل $\text{أ}_{٣٢} = ١$ ، $\text{ب}_{٢١} = ١$ ، $\text{أ}_{٢٣} = ٢$ ، $\text{ب}_{٢٣} = ٣$

م. هدى فرج

* أنواع خاصة من المصفوفات

① **المصفوفة المربعة/** هي المصفوفة التي يكون عدد الصفوف = عدد الأعمدة فيها ويساوي ن وتسمى عندئذٍ مصفوفة مربعة من الرتبة ن.

مثال/ $س = \underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}}$ ، $ص = \underset{٣\times٣}{\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٥ \\ ١ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ١- & ٠ \end{bmatrix}}$

② **مصفوفة الوحدة/** يرمز لها بالرمز (م) وهي مصفوفة مربعة وتكون مدخلاتها على النحو التالي

$$م_{ي هـ} = \begin{cases} ١ \text{ ، } ي = هـ \\ ٠ \text{ ، } ي \neq هـ \end{cases}$$

مثال/ $م_{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $م_{٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ وهكذا ـــ

③ **المصفوفة الصفرية/** يرمز لها بالرمز (و) هي المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار

مثال/ $و_{٣\times١} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ، $و_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

④ **مصفوفة الصف/** هي المصفوفة المكونة من صف واحد

مثال/ $\underset{١\times٣}{\begin{bmatrix} ٥ & ١- & ٢ \end{bmatrix}}$ ، $\underset{١\times٢}{\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \end{bmatrix}}$ وهكذا ـــ

أ. هدى فرج

⑤ **مصفوفة العمود/** هي المصفوفة المكونة من عمود واحد مثل

$$ب_{2\times1} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad أ_{3\times1} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

ملاحظة/ المصفوفة $س_{1\times1} = [س_{١١}]$ هي مصفوفة صف ومصفوفة عمود في آنٍ واحد.

⑥ **المصفوفة القطرية/** هي المصفوفة المربعة س بحيث $س_{ي هـ} = ٠$ ، $\forall$ ي $\neq$ هـ ، حيث أن المدخلات $س_{ي هـ}$ ، $\forall$ ي = هـ القطر الرئيس.

مثال/

$$أ_{2\times2} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix} \quad ، \quad ع_{3\times3} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٥ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

ملاحظة/ مصفوفة الوحدة حالة خاصة من المصفوفة القطرية حيث عندما يكون القطر الرئيس في المصفوفة القطرية جميع مدخلاته = ١ تصبح القطرية مصفوفة وحدة.

⑦ **المصفوفة المثلثية العلوية:** هي المصفوفة المربعة التي تكون مدخلاتها التي تحت القطر الرئيس أصفاراً.

مثال/

$$ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٨ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \quad ، \quad أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$$

أ. هدى منج

* **مثال ②** / إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ج = $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

① ما نوع المصفوفة ج ؟

الحل مصفوفة عمود .

② هل ب مصفوفة وحدة ؟

الحل ب ليست مصفوفة وحدة حيث مصفوفة الوحدة من الرتبة ٣

تكون على الصورة $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

③ ما مجموع مدخلات الصف الثاني من المصفوفة أ ؟

الحل مجموع مدخلات الصف الثاني من المصفوفة أ = $-1 + 2 + 3$
$= 4$

* **نشاط ص ٩٧ من الكتاب الوزاري** / إذا كانت المصفوفة ل من الرتبة ٣×٣

حسب الشروط التالية

$$ل_{ي هـ} = \begin{cases} ي + هـ &، \quad ي < هـ \\ ي - هـ &، \quad ي > هـ \\ \dfrac{ي}{ي + هـ} &، \quad ي = هـ \end{cases}$$

$$ل_{3\times3} = \begin{bmatrix} ل_{13} & ل_{12} & ل_{11} \\ ل_{23} & ل_{22} & ل_{21} \\ ل_{33} & ل_{32} & ل_{31} \end{bmatrix}$$

$$ل_{3\times3} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{2}{4} & 1 \\ \frac{3}{6} & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

أ. هدى فرج

تدريب ① / أكتب المصفوفة أ من الرتبة ٣×٢ بحيث

$$أ_{ي هـ} = \begin{cases} ١ & \text{إذا كانت } ي > هـ \\ -١ & \text{إذا كانت } ي = هـ \\ ٠ & \text{إذا كانت } ي < هـ \end{cases}$$

تدريب ② / المصفوفة جـ من الرتبة ٣×٢ إذا عرفت مدخلاتها بحيث أن $جـ_{ي هـ} = ٢ي - هـ$ ، أكتب المصفوفة بذكر مدخلاتها.

* س٤ ص٩٨ من الكتاب الوزاري :-

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -٤ \\ ٦ & ٢ & س \\ ١ & -س & ٧ \\ ٣ & ٢٠ & ٧ \end{bmatrix}$ جد :-

ⓐ رتبة المصفوفة أ　　ⓑ قيمة ($أ_{٣١} + أ_{١٢}$)

ⓙ قيمة س بحيث إن $(أ_{٢٣})^{٣} = ٢٧$

الحل

ⓐ رتبة أ = ٤×٣ وبالتالي $أ_{٤×٣}$

ⓑ قيمة ($أ_{٣١} + أ_{١٢}$)

$= -٤ + ٦ = ٢$

ⓙ $(أ_{٢٣})^{٣} = (-س)^{٣} = ٣^{٣}$

$\Leftarrow -س = ٣$

$\Leftarrow \boxed{س = -٣}$

أ. هدى فنّو

* س٤ ص٩٨ من الكتاب الوزاري/ كوّن مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ بحيث تعطى مدخلاتها حسب العلاقة $أ_{ي هـ} = ٢^{ي-هـ}$

الحل $أ_{٢×٢} = \begin{bmatrix} أ_{١٢} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{٢١} \end{bmatrix}$ ي ← صف ، هـ ← عمود

$= \begin{bmatrix} ٢^{١-٢} & ٢^{١-١} \\ ٢^{٢-٢} & ٢^{٢-١} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

* س٥ ص٩٨ من الكتاب الوزاري/ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٥ & -٢ \\ ٥ & -٣ & ٦ \end{bmatrix}$ ،

فجد المصفوفة ب من الرتبة ٣×٢ بحيث إن

$أ_{ي هـ} = ب_{هـ ي}$ لجميع قيم ي ، هـ

الحل $ب_{٣×٢} = \begin{bmatrix} ب_{١٢} & ب_{١١} \\ ب_{٢٢} & ب_{٢١} \\ ب_{٣٢} & ب_{٣١} \end{bmatrix}$

$أ_{ي هـ} = ب_{هـ ي}$

مثلاً/ $أ_{٢٣} = ب_{٣٢}$

$أ_{١٣} = ب_{٣١}$ وهكذا.

$\Leftarrow$ $ب = \begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ -٣ & ٥ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$

* فارين/ إذا كانت $ع = \begin{bmatrix} ٠ & -١ & ٢ & ١ \\ -٢ & ٠ & ٥ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٤ & -١ \end{bmatrix}$ أكتب مجموعة الأعداد $\{ أ_{ي هـ} : ي = ٢ ، هـ < ٣ \}$

الحل $\{ ع_{٢١} ، ع_{٢٢} \} = \{ ٣ ، ٥ \}$

أ. هدى فنخ

* تساوي مصفوفتين

تعريف/ تتساوى المصفوفتان أ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية وبالرموز نقول أن أ = ب إذا وفقط إذا $أ_{يهـ} = ب_{يهـ}$ لجميع قيم ي، هـ.

مثال/ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٣ & ٨ \end{bmatrix}$

ع = $\begin{bmatrix} أ & -١ \\ ب+١ & م^{٣} \end{bmatrix}$

(أ) هل س = ص

(ب) إذا كانت ص = ع أوجد قيمة كل من أ، ب، م

الحل (أ) س ≠ ص (لأن المدخلة في صف ٢ عمود ٢ غير متساوية).

(ب) ∵ ص = ع

⇐ $\boxed{أ = ٥}$

وكذلك

ب + ١ = ٣ ⇐ $\boxed{ب = ٢}$

⇐ $م^{٣} = ٨$ ⇐ $\boxed{م = ٢}$

م. هدى فرج

* س٣ ص٩٨ من الكتاب الوزاري :-

إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & س^٢+١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٥ & س-١ \end{bmatrix}$ ، فجد قيمة / قيم س ؟

الحل ∵ المصفوفتان متساويتان

∴ $س^٢+١ = ١٠ \Leftarrow س^٢ = ٩ \Leftarrow س = \pm ٣$ ← ٣ ✓ ، -٣ مرفوض

وكذلك $س-١ = ٢ \Leftarrow س = ٣$

(نأخذ قيم س المشتركة) وهي $\boxed{س = ٣}$

تدريب ③/ إذا كانت $\begin{bmatrix} س^٢-٣ & ١ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ س^٢-٥س & ٢ \end{bmatrix}$

أوجد قيم / قيمة س ؟ (ج/ س = ٣)

* **فكرة/** أوجد قيم س ، ص ، ع ، ل إذا كان

$$\begin{bmatrix} س-١ & ص+٢ \\ ٢س+١ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٢ع-١ & ٣ل+١ \end{bmatrix}$$

الحل $س-١ = ٤ \Leftarrow \boxed{س = ٥}$

$ص+٢ = ٠ \Leftarrow \boxed{ص = -٢}$

$٢س+١ = ٢ع-١$

$١٠+١ = ٢ع-١ \Leftarrow \boxed{ع = ٦}$

$١٠ = ٣ل+١ \Leftarrow ٣ل = ٩$

$\Leftarrow \boxed{ل = ٣}$

س = ٥ ، ص = -٢ ، ع = ٦

ل = ٣

م/ هدى فرج

تدريب (٧) / (أ) أوجد قيم أ، ب، جـ التي تجعل

$$\begin{bmatrix} \text{أ} - ٣\text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} + \text{جـ} & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$$

(جـ / ب = ١ ، أ = ٣ ، جـ = ٣)

(ب) أوجد قيم أ، ب حيث

$$\begin{bmatrix} ٣\text{أ} - ٢\text{ب} & ٠ \\ ٢ & \text{أ} + \text{ب} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

(جـ / أ = ٣ / ب = ١)

* **فازي /** أوجد قيمة كل من س، ل، ن، ع حيث

$$\begin{bmatrix} ٣\,\text{لو}_{٧}\,\text{س} & \frac{١}{٣} \\ ٥^{\text{ع}} & ٤^{\text{ل}^{٢}-٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٩^{\text{ن}-٣} \\ \frac{١}{٢٥} & \text{لو}_{٧}\,٧ \end{bmatrix}$$

الحل

$٣\,\text{لو}_{٧}\,\text{س} = ٣ \Leftarrow \text{لو}_{٧}\,\text{س} = ١$

$\Leftarrow \boxed{\text{س} = ٧}$

* $\frac{١}{٣} = ٩^{\text{ن}-٣} \Leftarrow ٣^{-١} = ٣^{٢\text{ن}-٦}$

$\Leftarrow ٢\text{ن} - ٦ = -١$

$\Leftarrow \boxed{\text{ن} = \frac{٥}{٢}}$

* $٥^{\text{ع}} = \frac{١}{٢٥} \Leftarrow ٥^{\text{ع}} = ٥^{-٢}$

$\Leftarrow \boxed{\text{ع} = -٢}$

* $٤^{\text{ل}^{٢}-٤} = \text{لو}_{٧}\,٧$

$٤^{\text{ل}^{٢}-٤} = ١$

$\Leftarrow ٤^{\text{ل}^{٢}-٤} = ٤^{٠}$

$\Leftarrow \text{ل}^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{ل} = \pm ٢}$

م. هدى فرج

تمرين/ إذا كانت

$$\begin{bmatrix} ل^2 & 2 \\ \text{نها}_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - 1}{س} & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 2 \\ ك & -8 \end{bmatrix}$$

أوجد |ل| ، ك ؟!

الحل $ل^2 = 36 \Leftarrow ل = \pm 6 \Leftarrow |ل| = 6$

* $ك = \text{نها}_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - 1}{س}$ بالتعويض المباشر

$= \frac{هـ^{0} - 1}{0} = \frac{0}{0}$ لذلك يمكن استخدام قاعدة لوبيتال

$ك = \text{نها}_{س \to 0} \frac{هـ^{س}}{1} = هـ^{0} = 1 \Leftarrow \boxed{ك = 1}$

تمرين/ إذا كانت

$$\begin{bmatrix} جتا^2 س - 3 جتا س & 8 \\ جا س & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد قيم س علماً بأن $س \in [0 ، \pi]$

الحل

$جتا^2 س - 3 جتا س = 4$

$جتا^2 س - 3 جتا س - 4 = 0$

$(جتا س - 4)(جتا س + 1) = 0$

$جتا س = 4$ مرفوض X | $جتا س = -1 \Leftarrow \boxed{س = \pi} \in [0 ، \pi]$

$جا س = 1$

$\Leftarrow س = \frac{\pi}{2} \in [0 ، \pi]$

$م.ح = \emptyset$

حيث لا توجد قيم مشتركة

أ. هدى فرج

حلول أسئلة اختبارات
وأسئلة إضافية على درس
المصفوفة

٢٠٢٠ دورة ثانية

ما مجموعة حل المعادلة التالية $\begin{bmatrix} \text{س}^٢ & ٦ \\ \text{س}^٢ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س}+٢ & ٦ \\ -٢\text{س}+٨ & ٨ \end{bmatrix}$ ؟

الحل

$\text{س}^٢ = \text{س} + ٢ \Leftarrow \text{س}^٢ - \text{س} - ٢ = ٠ \Leftarrow (\text{س} - ٢)(\text{س} + ١) = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = ٢ \text{ ، } \text{س} = -١$

كذلك $\text{س}^٢ = -٢\text{س} + ٨ \Leftarrow \text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٨ = ٠$

$\Leftarrow (\text{س} + ٤)(\text{س} - ٢) = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = -٤ \text{ ، } \text{س} = ٢$

م.ح = $\{٢\}$ فرع (ب)

٢٠١٩

إذا كانت $\text{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ & -٣ \\ ٣ & ٧ & -٢ \end{bmatrix}$ فما قيمة $(٣\text{س}_{١٢} + ٥\text{س}_{٢١})$ ؟!

الحل

$\text{س}_{١٢} = -٢ \text{ ، } \text{س}_{٢١} = ٢$

$٣\text{س}_{١٢} + ٥\text{س}_{٢١}$

$= ٣ \times -٢ + ٥ \times ٢ = -٦ + ١٠ = ٤$ فرع (ج)

أ. هدى فرج

* إضافي (دليل تقويم الطالب ص١٠) / إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} \text{-١} & \text{٥} & \text{-٢} \\ \text{٢} & \text{٤} & \text{١} \\ \text{٣} & \text{-١} & \text{-٧} \end{bmatrix}$

فإن قيمة (أ٣١ × أ١٣)

الحل أ٣١ × أ١٣ = -٢ × ٣ = -٦ فرع (أ)

* إضافي (دليل تقويم الطالب ص١٠) / إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س+٢} & \text{٣} \\ \text{٤} & \text{س-ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٨} & \text{٣} \\ \text{٤} & \text{٢} \end{bmatrix}$

فإن قيمة س × ص ؟!

الحل س + ٢ = ٨ ⇐ $\boxed{\text{س = ٦}}$

س - ص = ٢ ⇐ ٦ - ص = ٢ ⇐ -ص = ٢ - ٦ ⇐ $\boxed{\text{ص = ٤}}$

∴ س × ص = ٦ × ٤ = ٢٤ فرع (د)

* إضافي (دليل تقويم الطالب ص١١) /

إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س}^{٢}\text{+١} & \text{٢س-١} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٢٦} & \text{س+٤} \end{bmatrix}$ فإن قيمة س تساوي؟

الحل س² + ١ = ٢٦

⇐ س² = ٢٥

⇐ س = ± ٥

٢س - ١ = س + ٤

٢س - س = ٤ + ١

⇐ $\boxed{\text{س = ٥}}$

∴ س = ٥ فرع (ب)

أ. هدى فرج

* إضافي (دليل تقويم الطالب ص ١١)

إذا كان $\begin{bmatrix} 1 & 2^{\text{س}^2-4} \\ 5 & \text{س}+\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 32 \\ \text{س}+2 & 1 \end{bmatrix}$ فإن س ص ؟!

الحل $2^{\text{س}^2-4} = 32 \Leftarrow 2^{\text{س}^2-4} = 2^5 \Leftarrow \text{س}^2 - 4 = 5$

$\Leftarrow \text{س}^2 = 5 + 4 \Leftarrow \text{س}^2 = 9 \Leftarrow \boxed{\text{س} = \pm 3}$

$5 = \text{س} + 2 \Leftarrow \text{س} = 5 - 2 \Leftarrow \boxed{\text{س} = 3}$

$\therefore \boxed{\text{س} = 3}$ ✓

$\text{س} + \text{ص} = 1 \Leftarrow 3 + \text{ص} = 1 \Leftarrow \text{ص} = 1 - 3$

$\Leftarrow \boxed{\text{ص} = -2}$

$\Leftarrow \text{س ص} = 3 \times -2 = -6$ فرع (د)

* إضافي (دليل تقويم الطالب ص ١١)

إذا كان $\begin{bmatrix} 1 & \text{س}^3 - \text{ص}^3 \\ 5 & \text{س} - \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 32 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ فإن قيمة المقدار $\text{س}^2 + \text{س ص} + \text{ص}^2$ هي

الحل $\text{س}^3 - \text{ص}^3 = 32$

$(\text{س} - \text{ص})(\text{س}^2 + \text{س ص} + \text{ص}^2) = 32$

لكن $\text{س} - \text{ص} = 8$

$\Leftarrow 8 \times (\text{س}^2 + \text{س ص} + \text{ص}^2) = 32$

$\text{س}^2 + \text{س ص} + \text{ص}^2 = \frac{32}{8}$

$\text{س}^2 + \text{س ص} + \text{ص}^2 = 4$

فرع (أ)

أ. هدى فرج

تمرين/ إذا كان $\begin{bmatrix} ٢س+٣ & صفر \\ صفر & ص-٢ \end{bmatrix} = م_٢$ ، فإن س، ص على الترتيب ؟!

(أ) -١، ٢ (ب) ٣، -٢ (ج) -١، ٣ (د) صفر، ٢

الحل

$\begin{bmatrix} ٢س+٣ & ٠ \\ ٠ & ص-٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = م_٢$

٢س + ٣ = ١ ⟸ ٢س = ١ - ٣ ⟸ ٢س = -٢ ⟸ $\boxed{س = -١}$

ص - ٢ = ١ ⟸ ص = ١ + ٢ ⟸ $\boxed{ص = ٣}$

تمرين/ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ظاس & -١ \\ ١ & جاس \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ وكانت جـ مصفوفة من الرتبة ٣×٢ حيث $جـ_{ي هـ}$ = ي - هـ ، أوجد قيمة/قيم س التي تجعل أ = جـ حيث س ∈ [٠، ٢π]

الحل

جـ = $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

∵ أ = جـ

⟸ ظاس = ٠

⟸ س = ٠، π، ٢π ∈ [٠، ٢π]

كذلك

جاس = ٠

⟸ س = ٠، π، ٢π

⟸ قيم س = {٠، π، ٢π}

أ. هدى فرج

تمرين 8: إذا كانت

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 16 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ع} - \text{ل} & |\text{هـ}| & \sqrt{\text{س}} \\ \text{ع} + \text{ل} & 1 & \text{م}^2 \\ [\text{ل} - 1] & \text{لو}_8\,\text{ن} & \text{ص}^2 - \text{ص} \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة كل من س، ص، هـ، ن، ع، ل، م

الحل: $\sqrt{\text{س}} = 4 \Leftarrow \boxed{\text{س} = 16}$

$|\text{هـ}| = 2 \Leftarrow \text{هـ} = \pm 2$

$\text{ع} - \text{ل} = 4$

$\text{ع} + \text{ل} = 0$

$2\text{ع} = 4 \Leftarrow \boxed{\text{ع} = 2}$ ، $\boxed{\text{ل} = -2}$

$\text{م}^2 = 16 \Leftarrow \boxed{\text{م} = \pm 4}$

$\text{ص}^2 - \text{ص} = 0 \Leftarrow \text{ص}(\text{ص} - 1) = 0 \Leftarrow \boxed{\text{ص} = 0 \text{ ، } \text{ص} = 1}$

$\text{لو}_8\,\text{ن} = 0 \Leftarrow 8^0 = \text{ن} \Leftarrow \boxed{\text{ن} = 1}$

$[\text{ل} - 1] = 2 \Leftarrow 2 \le \text{ل} - 1 < 3$

$\Leftarrow 3 \le \text{ل} < 4 \Leftarrow \text{ل} \in [3 \text{، } 4[$

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درس المصفوفات

إعداد: أ. هدى فرج

اختبار قصير على درس المصفوفات

١) إذا علمت أن $س = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & -٣ \\ ٣ & ٧ & -٢ \end{bmatrix}$ فإن قيمة $٣س_{١٢} + ٥س_{٢١}$

أ) -٣ ب) ٤ ج) ١ د) صفر

٢) إذا كانت $\begin{bmatrix} س-١ & ٧ \\ ص-س & س^٢+١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ٤ & ١٧ \end{bmatrix}$ فإن

قيمة ص تساوي ؟؟

أ) ٤ ب) -٤ ج) ٨ د) -٨

٣) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٠ & س^٢ \\ ص+٤ & ٠ \end{bmatrix} = م_٢$ ، فإن قيمة $س^٢ + ص^٢ =$

أ) -١٠ ب) ٥ ج) ١٠ د) -٢

٤) إذا كانت المصفوفة أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة

حيث $أ_{ي هـ} = \frac{١}{٢} |-٣ي + هـ|$ فإن $(٢ أ_{٣٢} - ٢)$ تساوي

أ) ٤ ب) -٥ ج) ١ د) ٥

٥) إذا كانت

$$\begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٦} \\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{١١} & \frac{\text{١}}{\text{٨١}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٦} \\ \text{لو}_{\text{٣}}\text{٨١} & \text{٣}^{\text{ع}} \end{bmatrix}$$

فإن قيمة س / قيم س تساوي :-

أ) $\frac{\text{هـ}^{\text{٤}} + \text{١}}{-\text{هـ}^{\text{٤}} + \text{١}}$ ب) $\frac{\text{هـ}^{\text{٤}} - \text{١}}{\text{هـ}^{\text{٤}} + \text{١}}$ جـ) $\frac{\text{هـ}^{\text{٢}} - \text{١}}{-\text{هـ}^{\text{٢}} + \text{١}}$ د) $\frac{-\text{هـ}^{\text{٤}} - \text{١}}{\text{هـ}^{\text{٤}} - \text{١}}$

٦) إذا كانت

$$\begin{bmatrix} \text{٤}^{\text{ل}-\text{٢}} & \text{٢} \\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} & \frac{\text{١}}{\text{٢٧}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\text{١}}{\text{٢}} & \text{٢ لو}\,\text{١٠} \\ \text{٢}^{\text{ع}-\text{١}} & \text{٣}^{-\text{٣}} \end{bmatrix}$$

فما قيمة ع + ل ؟!

أ) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ ب) $\frac{\text{٥}}{\text{٢}}$ جـ) $-\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ د) $-\frac{\text{٥}}{\text{٢}}$

أ. هدى فرج

* حلول أسئلة اختبار درس المصفوفة *

(١) س = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٣- \\ ٣ & ٧ & ٢- \end{bmatrix}$

٣ س١٢ + ٥ س٢١

٣×٢- + ٥×٢ = -٦ + ١٠ = ٤ فرع ب

(٢) $\begin{bmatrix} س-١ & ٧ \\ \boxed{ص-س} & ٤س+١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ \boxed{٤} & ١٧ \end{bmatrix}$

س - ١ = ٣ ⟸ $\boxed{س = ٤}$

كذلك ص - س = ٤ ⟸ ص = ٤ + ٤ ⟸ $\boxed{ص = ٨}$ فرع ج

(٣) $\begin{bmatrix} س^٢ & ٠ \\ ١ & ص+٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

س^٢ = ١ ⟸ س = ± ١ ⟸ س^٢ + ص^٢ = (١)^٢ + (-٣)^٢ = ١٠ فرع ج

كذلك ص + ٤ = ١ ⟸ ص = -٣

* وكذلك عندما س = -١

م. هدى فرج

٤) م٢٣ = $\frac{١}{٢}$ |−٣ × ٣ + ٢| = $\frac{١}{٢}$ |−٩ + ٢| = $\frac{١}{٢}$ |−٧| = $\frac{٧}{٢}$

⇐ ٢م٢٣ − ٢ = ٢ × $\frac{٧}{٢}$ − ٢ = ٧ − ٢ = $\boxed{٥}$ فرع د

٥) $\begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٣^{ع} & \boxed{لو_{٣} ٨١} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ \frac{١}{٨١} & \boxed{لو_{هـ} |س - ١|} \end{bmatrix}$

لو$_{هـ}$ هـ^{٤} = ٤

لو$_{٣}$ ٨١ = لو$_{هـ}$ |س − ١|

لو$_{٣}$ (٣)^{٤} = لو$_{هـ}$ |س − ١|

٤ = لو$_{هـ}$ |س − ١|

⇐ $\cancel{لو_{هـ}}$ هـ^{٤} = $\cancel{لو_{هـ}}$ |س − ١|

هـ^{٤} = |س − ١|

إما س − ١ = هـ^{٤} أو س − ١ = −هـ^{٤}

س = هـ^{٤} + ١ ، س = −هـ^{٤} + ١

س = هـ^{٤} + ١

س = −هـ^{٤} + ١ فرع م

٦) $\begin{bmatrix} ٢لو١٠ & \boxed{\frac{١}{٢}} \\ ٣^{-٣} & ٢^{ع-١} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & \boxed{٤^{ل-٢}} \\ \frac{١}{٢٧} & لو_{هـ} هـ \end{bmatrix}$

٢$^{ع-١}$ = لو$_{هـ}$ هـ

⇐ ٢$^{ع-١}$ = ١ ⇐ ٢$^{ع-١}$ = ٢^{٠}

⇐ ع − ١ = ٠ ⇐ $\boxed{ع = ١}$

كذلك $\frac{١}{٢}$ = ٤$^{ل-٢}$

⇐ ٢$^{-١}$ = (٢^{٢})$^{ل-٢}$

⇐ ٢$^{-١}$ = ٢$^{٢ل-٤}$

⇐ ٢ل − ٤ = −١ ⇐ $\boxed{ل = \frac{٣}{٢}}$

ع + ل = $\frac{٥}{٢}$ فرع ب

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

أ. هدى فرج

* العمليات على المصفوفات

* (Operations on Matrices)

أولاً: جمع المصفوفات Σ

تعريف/ إذا كانت أ، ب مصفوفتين من الرتبة م×ن فإن جـ = أ+ب هي مصفوفة من الرتبة م×ن مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة في كل من أ، ب أي أن $جـ_{ي هـ} = أ_{ي هـ} + ب_{ي هـ}$

* **ملاحظة:** ① عند جمع مصفوفتين يجب أن تكونا من نفس الرتبة حيث نقوم بجمع المدخلات المتناظرة فيهما.

② المصفوفة الناتجة من جمع المصفوفتين أ، ب تكون رتبتها نفس رتبة كل من أ، ب.

مثال ① إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

ع = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ جد إن أمكن ① أ+ع ② ع+أ

③ أ+ب

الحل ① أ + ع

$$\underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}} + \underset{2\times3}{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-1) & 1+2 & -1+3 \\ 3+2 & -2+(-3) & 4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} = أ+ع$$

①

② $ع + أ = \begin{bmatrix} ١- & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣- & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ١- \\ ٣ & ٢- & ٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١- + ٢ & ٢ + ١ & ٣ + (١-) \\ ٢ + ٣ & ٣- + (٢-) & ١ + ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٥- & ٥ \end{bmatrix} = ع + أ$

* لاحظ أن أ + ع = ع + أ أي أن جمع المصفوفات تبديلي :-

③ أ ، ب مختلفتان في الرتبة

رتبة أ = ٢×٣ $\neq$ رتبة ب = ٢×٢ لذلك

أ+ب غير معرفة .

* ثانياً/ ضرب المصفوفة بعدد حقيقي :-

* تعريف/ إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن ، وكان ك عدداً حقيقياً

فإن ك أ = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م×ن وتكون مدخلاتها

على النحو جـ ي هـ = ك أ ي هـ لجميع قيم ي ، هـ

* أي أنه/ عند ضرب مصفوفة في عدد حقيقي فإننا نقوم بضرب

كل مدخلة في المصفوفة بالعدد نفسه.

أ. هدى فرج

مثال ② إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ أوجد كلٍ من ① 2أ ② $\frac{1}{2}\text{أ}$ ③ $(-1)\text{أ}$ ④ $\text{أ}+(-\text{أ})$

الحل ① 2أ

$$= 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1 & 2\times-2 \\ 3\times2 & 2\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

② $\frac{1}{2}\text{أ} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times\frac{1}{2} & -2\times\frac{1}{2} \\ 3\times\frac{1}{2} & 0\times\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$

③ $(-1)\text{أ} = \begin{bmatrix} 1\times-1 & -2\times-1 \\ 3\times-1 & 0\times-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = (-\text{أ})$ وتسمى النظير الجمعي للمصفوفة أ

④ $\text{أ}+(-\text{أ}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$ و المصفوفة الصفرية

ملاحظة: $\text{أ}+(-\text{أ}) =$ و (المصفوفة الصفرية).

تسمى $(-\text{أ})$ النظير الجمعي للمصفوفة أ.

مثال ③ إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$ أوجد $5\text{أ}+3\text{ب}$

$$5\text{أ}+3\text{ب} = 5\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & 26 \\ -2 & -21 \end{bmatrix}$$

أ. هدى فرج

* ثالثاً / طرح المصفوفات :-

* **تعريف /** إذا كانت أ ، ب مصفوفتين من نفس الرتبة م × ن ، فإن

أ − ب = أ + (−ب)

* **مثال ④** إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ أوجد قيمة أ − ب ؟!

الحل

أ − ب = أ + (−ب)

= $\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٢- & ٢- \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}$

* خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي :-

إذا كانت (أ ، ب ، جـ ، و) مصفوفات من نفس الرتبة ، ك ∈ ح فإن :

① أ + ب = ب + أ (الخاصية التبديلية)

② (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) (الخاصية التجميعية)

③ أ + و = و + أ = أ (المصفوفة الصفرية المحايدة لعملية جمع المصفوفات)

④ أ + (−أ) = (−أ) + أ = و (النظير الجمعي)

⑤ ك (أ + ب) = ك أ + ك ب (توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات)

* مثال (5) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}$

ج = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣- & ٠ \end{bmatrix}$ أوجد حل المعادلة ٢س + ب = أ + ٣ج

الحل ∵ ٢س + ب = أ + ٣ج ⟸ ٢س = أ + ٣ج − ب

٢س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ + ٣ $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣- & ٠ \end{bmatrix}$ − $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}$

٢س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٩- & ٠ \end{bmatrix}$ − $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٤- & ٤ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٢- & ٤- \\ ٠ & ٢+ \end{bmatrix}$

٢س = $\begin{bmatrix} ٠ & ٤- \\ ٤- & ٦ \end{bmatrix}$ ⟸ س = $\frac{١}{٢}$ $\begin{bmatrix} ٠ & ٤- \\ ٤- & ٦ \end{bmatrix}$

⟸ س = $\begin{bmatrix} ٠ & ٢- \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix}$

* مثال (6) حل المعادلة المصفوفية س + $\begin{bmatrix} ١- & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$

الحل * بإضافة النظير الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١- & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ للطرفين.

(س + $\begin{bmatrix} ١- & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$) + $\begin{bmatrix} ١ & ٥- \\ ٢- & ٣- \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$ +

$\begin{bmatrix} ١ & ٥- \\ ٢- & ٣- \end{bmatrix}$

س + ($\underbrace{\begin{bmatrix} ١- & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٥- \\ ٢- & ٣- \end{bmatrix}}_{و}$) =

$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ١ & ٥- \\ ٢- & ٣- \end{bmatrix}$

⟸ س + و = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥- \\ ١ & ٤- \end{bmatrix}$

س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥- \\ ١ & ٤- \end{bmatrix}$

أ. هدى فرج

* مثال (٧) / حل المعادلة المصفوفية التالية :-

$$٣\left(\text{س} + \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}\right) = ٢\begin{bmatrix} ٦ & ١- \\ ٣- & ٤ \end{bmatrix}$$

الحل

$$٣\left(\text{س} + \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}\right) = ٢\begin{bmatrix} ٦ & ١- \\ ٣- & ٤ \end{bmatrix}$$

$$٣\text{س} + ٣\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٢- \\ ٦- & ٨ \end{bmatrix}$$

$$٣\text{س} + \begin{bmatrix} ١٢ & ٠ \\ ٦ & ٩- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٢- \\ ٦- & ٨ \end{bmatrix}$$

(بإضافة النظير الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١٢ & ٠ \\ ٦ & ٩- \end{bmatrix}$

$$\Leftarrow ٣\text{س} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٢- \\ ٦- & ٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٢- & ٠ \\ ٦- & ٩+ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow ٣\text{س} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢- \\ ١٢- & ١٧ \end{bmatrix} \Leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} ٠ & \frac{٢-}{٣} \\ ٤- & \frac{١٧}{٣} \end{bmatrix}$$

* س١ فرع (ب) الكتاب الوزاري ص١٠٢

إذا كانت $\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\text{د} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix}$ فبين أن $\text{جـ} + \text{د} = ٩\text{م}_٢$

الحل

$$\text{جـ} + \text{د} = \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix} = ٩\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= ٩\text{م}_٢ \ \#$$

أ. هدى فرج

* سؤال ص١٢١ من أسئلة الكتاب الوزاري :-

حل المعادلة المصفوفية $٢\begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - ٣\text{س} = \text{س} + \text{م}_{٢}$

الحل $٢\begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - \text{م}_{٢} = \text{س} + ٣\text{س}$

$\begin{bmatrix} ٢ & -١٠ \\ ١٠ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = ٤\text{س}$

$\begin{bmatrix} ١ & -١٠ \\ ١٠ & ٣ \end{bmatrix} = ٤\text{س} \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ١ & -١٠ \\ ١٠ & ٣ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{-١٠}{٤} \\ \frac{١٠}{٤} & \frac{٣}{٤} \end{bmatrix}$

* تدريب ١

أ) إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة س التي تحقق $٣\text{س} = ٤\text{أ} - ٥\text{ب}$

(ج/ $\text{س} = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٤ & ٦ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix}$)

ب) حل المعادلة المصفوفية $\text{س} + \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = ٢\text{س} + ٣\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

(ج/ $\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ١ & -٦ \end{bmatrix}$)

* س٣ ص١٠٢ من الكتاب الوزاري :-

إذا كانت $\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة أ بحيث ٢أ + جـ = و

الحل

$٢\text{أ} + \text{جـ} = \text{و}$

$٢\text{أ} + \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ (بإضافة النظير الجمعي للمصفوفة جـ للطرفين).

$٢\text{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & +٥ \\ -١ & -٣ \end{bmatrix}$

$٢\text{أ} = \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ -١ & -٣ \end{bmatrix} \Leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ -١ & -٣ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \text{أ} = \begin{bmatrix} -١ & \frac{٥}{٢} \\ \frac{-١}{٢} & \frac{-٣}{٢} \end{bmatrix}$

* س٤ ص١٠٢ من الكتاب الوزاري :-

جد قيم س، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة $\text{س}\begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \end{bmatrix} + \text{ص}\begin{bmatrix} ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ -٣ \end{bmatrix}$

الحل

$\text{س}\begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \end{bmatrix} + \text{ص}\begin{bmatrix} ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ -٣ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣\text{س} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣\text{ص} \\ ٥\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ -٣ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} ٣\text{ص} \\ ٣\text{س} + ٥\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ -٣ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ٣\text{ص} = ٩ \Leftarrow \boxed{\text{ص} = ٣}$

كذلك $٣\text{س} + ٥\text{ص} = -٣$

$٣\text{س} + ٥(٣) = -٣$

$٣\text{س} = -٣ - ١٥$

$\Leftarrow ٣\text{س} = -١٨$

$\Leftarrow \boxed{\text{س} = -٦}$

$\therefore \boxed{\text{س} = -٦ \text{ ، } \text{ص} = ٣}$

أ. هدى فرج

س٤ صـ ١١٢ من أسئلة الكتاب الوزاري :-

إذا كانت س + ٢ص = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ٣س - ص = $\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ -٥ & ٨ \end{bmatrix}$

نجد المصفوفتين س ، ص .

الحل: س + ٢ص = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١١ & -٢ \end{bmatrix}$ ← ①

٣س - ص = $\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ -٥ & ٨ \end{bmatrix}$ ← ② (× ٢ للطرفين)

ثم نجمع ① ، ② ينتج

س + $\cancel{٢ص}$ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١١ & -٢ \end{bmatrix}$

٦س - $\cancel{٢ص}$ = $\begin{bmatrix} -١٠ & ٦ \\ -١٠ & ١٦ \end{bmatrix}$

٧س + ٠ = $\begin{bmatrix} -٧ & ٧ \\ -٢١ & ١٤ \end{bmatrix}$ ⇐ ٧س = $\begin{bmatrix} -٧ & ٧ \\ -٢١ & ١٤ \end{bmatrix}$

⇐ س = $\frac{١}{٧}$ $\begin{bmatrix} -٧ & ٧ \\ -٢١ & ١٤ \end{bmatrix}$

⇐ س = $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$

لكن س + ٢ص = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١١ & -٢ \end{bmatrix}$

⇐ $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ + ٢ص = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١١ & -٢ \end{bmatrix}$

⇐ ٢ص = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١١ & -٢ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$

⇐ ٢ص = $\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٨ & -٤ \end{bmatrix}$

⇐ ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٤ & -٢ \end{bmatrix}$

*خارجي/ إذا كانت

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٢س+ص \\ ٣ص-١ & ١ \end{bmatrix}$$

جد قيمة س ، ص

الحل ٢س + ص + ٢ = ٥ ⇐ ٢س + ص = ٣ ⇐ (١)

٣ص - ١ = -٢ ⇐ ٣ص = -٢ + ١ ⇐ $\boxed{ص = \frac{-١}{٣}}$

عوض عن ص في معادلة (١) ينتج أنه

٢س - $\frac{١}{٣}$ = ٣ ⇐ ٢س = $\frac{١٠}{٣}$ ⇐ $\boxed{س = \frac{٥}{٣}}$

*خارجي/ إذا كانت

$$\begin{bmatrix} -٤ & ٩ \\ ن & ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ل \\ ل & ن \end{bmatrix}$$

أوجد قيم كل من ل ، ن ، ع

الحل ل + ٠ = ٩ ⇐ $\boxed{ل = ٩}$

ل + ٢ = ن ⇐ ٩ + ٢ = ن

⇐ $\boxed{ن = ١١}$

كذلك ن + ٣ = ع

⇐ ١١ + ٣ = ع ⇐ $\boxed{ع = ١٤}$

∴ ل = ٩ ، ن = ١١ ، ع = ١٤

أ. هدى فرج

خارجي/ إذا كانت $\begin{bmatrix} 2\text{ص} & \text{ص}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -16\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 36 \end{bmatrix}$

أوجد قيم ص ؟!

الحل

$2\text{ص} - 2 = 4 \Leftarrow 2\text{ص} = 6 \Leftarrow \boxed{\text{ص} = 3}$

$\text{ص}^2 - 16\text{ص} = 36 \Leftarrow \text{ص}^2 - 16\text{ص} - 36 = 0$

$\Leftarrow (\text{ص} - 18)(\text{ص} + 2) = 0$

$\therefore \boxed{\text{ص} = 18}$ ، $\boxed{\text{ص} = -2}$

م.ح = $\emptyset$ (لأنه لا يوجد قيم مشتركة لـ ص في الحالتين).

* خارجي/ إذا كان $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{ل} \\ 6 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} -6 \\ \text{ك} \end{bmatrix}$ وكان ٣أ = ٢ب

أوجد قيمة ل ، ك

الحل

$3\text{أ} = 2\text{ب}$

$3 \begin{bmatrix} \text{ل} \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -6 \\ \text{ك} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3\text{ل} \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 2\text{ك} \end{bmatrix}$

$\Leftarrow 3\text{ل} = -12 \Leftarrow \boxed{\text{ل} = -4}$

وكذلك $18 = 2\text{ك}$

$\Leftarrow \text{ك} = 9$

* فكري/ حل المعادلة المصفوفية ٢س + ٣ب = أ + ب

حيث $\text{أ} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\frac{1}{2}\text{ج} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، ج = ب − أ

الحل

$$\frac{1}{2}\text{ج} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ج} = 2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ج} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

لكن ج = ب − أ

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \text{ب} - \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ب} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

وبالتالي ٢س + ٣ب = أ + ب

$$2\text{س} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$2\text{س} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$2\text{س} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 9 & -21 \end{bmatrix}$$

$$2\text{س} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{س} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & -1 \\ \frac{7}{2} & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}$$

أ. هدى فرج

* رابعاً / ضرب المصفوفات :-

* تعريف / إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن ، ب مصفوفة من الرتبة ن × ل ، فإن حاصل الضرب أ.ب = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ل ، وتكون مدخلات المصفوفة جـ على النحو جـ يهـ

$= أ_{ي١} \times ب_{١هـ} + أ_{ي٢} \times ب_{٢هـ} + \cdots + أ_{ين} \times ب_{نهـ}$

* أي أنه المدخلة جـ يهـ = مجموع حواصل ضرب المدخلات المتناظرة في الصف ي من المصفوفة الأولى والعمود هـ من المصفوفة الثانية

* مثال / المدخلة $جـ_{٢١}$ هي مدخلة ناتجة من مجموع حواصل ضرب المدخلات المتناظرة في الصف الأول من المصفوفة الأولى والعمود الثاني من المصفوفة الثانية.

* مثال ① / إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٥ \\ -١ & ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٥ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

فأي العمليات الآتية معرفة ؟!

① أ . ب ② أ . جـ ③ ب . جـ

الحل ①

أ . ب

٢ × $\boxed{٣ \quad ٣}$ × ٢

العملية معرفة وينتج أ . ب من الرتبة ٢ × ٢

أ. هدى فرج

② أ . جـ ⟸ العملية غير معرفة .

٢×٣ ٢×٢

③ ب . جـ ⟸ العملية معرفة وينتج مصفوفة ب جـ من الرتبة ٣×٢

٣×٢ ٢×٢

* مثال (2) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد كل من ① أ . ب ② ب . أ (إن أمكن)

الحل ① أ . ب = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

٢×٢ ٢×٣

$$= \begin{bmatrix} 1\times2+0\times1 & 1\times3+0\times-1 & 1\times1+0\times0 \\ 2\times2+-1\times1 & 2\times3+-1\times-1 & 2\times1+-1\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} = ل$$

* لاحظ أن المدخلة ل٢١ = ٣ ناتجة من مجموع حواصل ضرب مدخلات الصف الأول في المصفوفة أ مع ما يناظرها من مدخلات العمود الثاني في المصفوفة ب

② ب . أ ⟸ عملية غير معرفة

٢×٣ ٢×٢

لأن عدد أعمدة ب ≠ عدد صفوف أ

* **مثال (3)** / إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(1) جد أب ، ب أ إن أمكن

(2) هل أب = ب أ ؟!

الحل (1) $\underset{2\times2}{\text{أ}} \cdot \underset{2\times2}{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+1 & 4-1 \\ 0-1 & 0+1 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow$ أ.ب = $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$\underset{2\times2}{\text{ب}} \cdot \underset{2\times2}{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0 & 3-2 \\ 2+0 & 1+1 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow$ ب.أ = $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{2\times2}$

(2) أب $\neq$ ب أ (أي أن عملية ضرب المصفوفات غير تبديلية).

* **مثال (9) ص١٠٥ من الكتاب الوزاري :-**

لتكن أ مصفوفة من الرتبة ٢×ن ، ب مصفوفة من الرتبة ٥×ل

فما قيم كل من ن ، ل التي تجعل أ.ب = ب.أ معرفتين ؟

الحل $\underset{2\times \boxed{n \;\; 5}\times l}{\text{أ} \cdot \text{ب}}$ $\Leftarrow$ حتى تكون أ.ب معرفة يجب أن تكون قيمة ن = ٥

أ. هدى فرج

ولكن ب . أ معرفة   ب . أ

$٥ \times \boxed{ك \quad ٢} \times ن$

يجب أن تكون قيمة ك = ٢

* **مثال ٤/** إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} -٢ & -٤ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$

أوجد س × ص

الحل س × ص = $\underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}} . \underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} -٢ & -٤ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}}$

$= \begin{bmatrix} -٦+٦ & -١٢+١٢ \\ ٦+-٦ & ١٢+-١٢ \end{bmatrix} = \underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}} =$ و

* **لاحظ أنه/** يمكن أن يكون حاصل ضرب مصفوفتين غير صفريتين مصفوفة صفرية.

* **مثال ٥** إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ج = $\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

فأوجد أب ، أج ، ماذا تستنتج ؟!

الحل أ ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٦ & ١٨ \end{bmatrix}$

أ ج = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٦ & ١٨ \end{bmatrix}$

نلاحظ أن أب = أج ولكن ب ≠ ج أي أن خاصية الاختزال غير متحققة في عملية ضرب المصفوفات.

أ. هدى فرج

* مثال (15) ص 106 من الكتاب الوزاري :-

جد ناتج $\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(الحل)

$$\begin{bmatrix} 8+3-0 & 10+6-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} 11 & 13 \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 46 \end{bmatrix}_{1\times 1}$$

* رتبة المصفوفة الناتجة 1×1

* خصائص عملية الضرب على المصفوفات :-

إذا كانت أ، ب، ج مصفوفات، حيث أن عمليتي الضرب والجمع معرفتان، م المصفوفة المحايدة، ك ∈ ح فإن

1. $(\text{أ} \cdot \text{ب}) \cdot \text{ج} = \text{أ} \cdot (\text{ب} \cdot \text{ج})$ (الخاصية التجميعية)
2. $\text{أ} \cdot (\text{ب} + \text{ج}) = (\text{أ} \cdot \text{ب}) + (\text{أ} \cdot \text{ج})$ (توزيع الضرب على الجمع من اليمين)
3. $(\text{أ} + \text{ب}) \cdot \text{ج} = (\text{أ} \cdot \text{ج}) + (\text{ب} \cdot \text{ج})$ (توزيع الضرب على الجمع من اليسار)
4. $\text{أ} \cdot \text{م} = \text{م} \cdot \text{أ} = \text{أ}$ (العنصر المحايد لعملية ضرب المصفوفات)
5. $\text{ك} (\text{أ} \cdot \text{ب}) = (\text{ك}\,\text{أ}) \cdot \text{ب} = \text{أ} \cdot (\text{ك}\,\text{ب})$

* حلول تمارين (٣-٢) كتاب وزاري ص ١٠٧ *

*س١/ إذا كانت أ ، ب ، ج مصفوفات بحيث أن أ . ب = ج

فما رتبة ب في كل مما يلي؟

(أ) أ ، ج ‎ ٢×٥ ، ٢×٤ / (ب) أ ، ج ‎ ٣×٣ ، ٣×٥

الحل (أ) أ . ب = ج ⟸ رتبة ب ٥×٤

٢×٥ $\boxed{٥×٤}$ ٢×٤

(ب) أ . ب = ج ⟸ رتبة ب ٣×٥

٣×٣ $\boxed{٣×٥}$ ٣×٥

س٢/ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، ج = $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

فجد ما يلي؟

(أ) أ . ب = $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8+35 & 24+0 & 20+20 \\ 4+7 & -12+0 & -10+4 \end{bmatrix}$

٢×٢   ٢×٣

$= \begin{bmatrix} 27 & 24 & 40 \\ 11 & -12 & -6 \end{bmatrix}$

٢×٣

(ب) ج . ب = $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & 6 & -11 \\ 29 & 18 & 35 \\ 10 & 12 & 18 \end{bmatrix}$

٣×٢   ٢×٣   ٣×٣

(جـ) $م^2 = م \cdot م = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}}$

$= \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} ٦ & ٢٥ \\ -١٠ & -٩ \end{bmatrix}} = م^2$

س٣/ جد قيم س، ص بحيث $\begin{bmatrix} ٣ & س & ٥ \\ -١ & ٤ & -٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٤ & ص \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ٦٤ \\ ٥ & -٣٤ \end{bmatrix}$

الحل $٣ \times ١ + س \times ٤ + ٥ \times ٥ = ٢٠$

$٣ + ٤س + ٢٥ = ٢٠ \Leftarrow ٤س = ٢٠ - ٢٨ \Leftarrow ٤س = -٨$

$\Leftarrow \boxed{س = -٢}$

كذلك

$-١ \times ٦ + ٤ \times ص - ٢ \times ٨ = -٣٤$

$-٦ + ٤ص - ١٦ = -٣٤ \Leftarrow ٤ص = -٣٤ + ٢٢$

$\Leftarrow \boxed{ص = -٣}$

س٤/ إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

، $ص = \begin{bmatrix} ٧ & ٨ \end{bmatrix}$ فبين أن $س = ٥ص$

الحل $س = \left(\underset{1\times3}{\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times2}{\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

$= \underset{1\times2}{\begin{bmatrix} ١١ & ١٣ \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}} = \underset{1\times2}{\begin{bmatrix} ٣٥ & ٤٠ \end{bmatrix}}$

$٥ص = ٥ \begin{bmatrix} ٧ & ٨ \end{bmatrix} = \underset{1\times2}{\begin{bmatrix} ٣٥ & ٤٠ \end{bmatrix}}$

$\Leftarrow س = ٥ص$ #

س/ إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

فبين أن $\text{أ}^2 - \text{ب}^2 \neq (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$

الحل

$$\text{أ}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -9 \end{bmatrix} \longrightarrow ①$$

$$\text{أ} - \text{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} + \text{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{2\times2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}}_{2\times2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}}_{2\times2} \longrightarrow ②$$

من الواضح أن ① $\neq$ ② أي أن $\text{أ}^2 - \text{ب}^2 \neq (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$

\#

س٦/ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، فهل يمكن إيجاد قيمة / قيم س بحيث أن $أ^٢ = ب$ ؟!

الحل

$$أ^٢ = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س^٢ & ٠ \\ س+١ & ١ \end{bmatrix}$$

$$أ^٢ = ب$$

$$\begin{bmatrix} س^٢ & ٠ \\ س+١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \Leftarrow س^٢ = ١$$

$$\Leftarrow \boxed{س = \pm ١}$$

كذلك $س + ١ = ٥ \Leftarrow \boxed{س = ٤}$

$\therefore$ م.ح $= \emptyset$ } لا يوجد قيم مشتركة لـ س }

$\Leftarrow$ لا يمكن إيجاد قيم لـ س بحيث أن $أ^٢ = ب$.

س٧/ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \sqrt{٣} & -١ \end{bmatrix}$

أ) جد المصفوفة د بحيث أن $أ + د = ب.د$

الحل أ) إفرض $د = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

$$أ + د = \begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢+س \\ -٣+ص \end{bmatrix}$$

$$ب.د = \underbrace{\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}}_{٢\times٢} . \underbrace{\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}}_{٢\times١}$$

$$ب.د = \begin{bmatrix} ٣س+٢ص \\ س \end{bmatrix}$$

$$أ + د = ب.د$$

$$\begin{bmatrix} ٢+س \\ -٣+ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣س+٢ص \\ س \end{bmatrix}$$

⇐ ٢ + س = ٣س + ٢ص

٣س + ٢ص − س = ٢

٢س + ٢ص = ٢ (÷٢)

$\boxed{س + ص = ١}$ ← (١)

كذلك −٣ + ص = س

⇐ $\boxed{س − ص = −٣}$ ← (٢)

من (١) ، (٢)

ينتج أن س = −١ ، ص = ٢

⇐ د = $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(ب) بين جـ^3 = جـ

الحل جـ^3 = $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} =$ جـ

⇐ جـ^3 = جـ #

تمارين

(١) إذا كانت س × $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ فإن المصفوفة س =

(أ) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(٢) إذا كانت س ، ص مصفوفتين من الرتبة ٢×٢ فإن ٤(س×ص)

(أ) (س × ص) × ٤ (ب) ٤س × ٤ص

(جـ) ٤س × ص (د) ٤س + ٤ص

③ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٢ & ٤ & -١ \end{bmatrix}$ وكان أ × ب = جـ

٤×٢ ن×٣

فإن ن = ؟

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) ٤

④ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ وكانت جـ = أ × ب

فإن جـ٢٢ =

(أ) ٤ (ب) -١ (جـ) -٣ (د) صفر

جـ٢٢ = ٤×-١ + ١×١ = -٤ + ١ = -٣

⑤ ناتج ضرب $\begin{bmatrix} -١ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ٤ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$ يساوي

١×٣ ٣×١

(أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١٢ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ١٩ \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} ٥ \\ ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ (د) غير معروف.

⑥ إذا كان $\begin{bmatrix} ٢ & ل \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ل \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١-٢ل \end{bmatrix}$ فما قيمة / قيم ل ؟

الحل: ل × ل + ٢ × ١ = ١ - ٢ل

ل² + ٢ = ١ - ٢ل

ل² + ٢ل + ٢ - ١ = ٠

⇐ ل² + ٢ل + ١ = ٠

⇐ (ل + ١) (ل + ١) = ٠

⇐ $\boxed{ل = -١}$

أ. هدى فرج

(٧) إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن $أ_{٣\times٢}$ ، $ب_{م\times ل}$ ، $جـ_{٤\times ن}$ وكانت س = أ + ب جـ

فأوجد قيمة المقدار ٦م − ل ن

الحل

س = أ + ب جـ

٣×٢ ، $م\times ل$ ، $٤\times ن$

ل = ٤

$م\times ن$ ، ٣×٢ ⟸ م = ٣ ، ن = ٢

⟸ ٦م − ل ن = ٦ × ٣ − ٤ × ٢ = ١٨ − ٨ = ١٠

(٨) إذا كانت جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، أ + ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix}$

فأوجد أ جـ + ب جـ = ؟؟

الحل

أ جـ + ب جـ = (أ + ب) جـ

$= \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١٦ & ١٣ \\ ٦- & ١٣- \end{bmatrix}$

٩) إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ \frac{١}{٢} & ٠ \end{bmatrix}$ أوجد $(أ)^{٥}$ ؟

الحل

إذا كان القطر الثانوي كله أصفار فإن

$$أ^{٥} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢^{٥} \\ (\frac{١}{٢})^{٥} & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣٢ \\ \frac{١}{٣٢} & ٠ \end{bmatrix}$$

١٠) إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة ٢×٢ وكان $س^{٢} = س$

، $ص = م_{٢} - س$ فإن $ص^{٢}$ تساوي ....

(أ) س (ب) $م_{٢} - ص$ (ج) س ص (د) ص

الحل $ص^{٢} = (م_{٢} - س)(م_{٢} - س) = م_{٢}^{٢} - م_{٢} س - س م_{٢} + س^{٢}$

$= م_{٢} - س - س + س^{٢}$

$= م_{٢} - ٢س + س$ ($س^{٢} = س$ معطى)

$= م_{٢} - س = ص$ #

أ. هدى فرج

حلول أسئلة اختبارات سابقة في درس العمليات في المصفوفات

* القسم الأول الاختيار من متعدد :-

٢٠. دورة ثانية | إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات من الرتب ٣×٢ ، ٢×٣ ، ٢×٢ على الترتيب ، فأي العمليات التالية صحيحة :-

أ) أ × جـ + ب   ب) ب × أ - ٢ جـ

جـ) ٣ أ × ب + ٢ جـ   د) ب × جـ + ٥ أ

١٩. إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٣ × ل ، ب مصفوفة من الرتبة ٢ × ن ، جـ مصفوفة من الرتبة ٣ × ٥ بحيث جـ = أ . ب ، فما قيم ل ، ن على الترتيب ؟

الحل

أ . ب = جـ

$3 \times ل$ ، $2 \times ن$ ، 3×5

ل = ٢

$3 \times ن = 3 \times 5 \Leftarrow ن = 5$

∴ ل = ٢ ، ن = ٥ فرع ب

أ. هدى فرج

٢٠١٩ دورة ثانية

إذا كانت أ ، ب مصفوفتان بحيث ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ & -٦ \\ ٤ & -٨ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ٢أ + ب = و ، فما العبارة الصحيحة فيما يلي؟

الحل: ب$_{٢×٣}$ ، ٢أ + ب = و

⇐ ٢أ = −ب ⇐ أ = $-\frac{١}{٢}$ب فرع (جـ)

٢٠١٩ صناعي

إذا كانت المصفوفة جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$ ، فما المصفوفة التي تساوي جـ^٢ − م$_٢$ ؟!

الحل: جـ^٢ = $\underset{٢×٢}{\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}}\underset{٢×٢}{\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}}$ = $\underset{٢×٢}{\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}}$ = م$_٢$

جـ^٢ − م$_٢$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ = و$_٢$ فرع (جـ)

* إضافي دليل تقويم الطالب ص١٠٣ / إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ فما أ^٢ = ؟!

الحل: أ^٢ = أ × أ = $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ فرع (ب)

أ. هدى فرج

* إضافي دليل تقويم الطالب ص ١٠٣ :-

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$ فإن قيمة

٣ ٣أ - ٢ ٣(أ+ب) + ١ ٣ب تساوي :-

الحل ٣ ٣أ - ٢ ٣(أ+ب) + ١ ٣ب

= ٣ ٣أ - ٢ ٣أ - ٢ ٣ب + ١ ٣ب = أ - ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} -١ & -٥ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ فرع (ب)

* إضافي دليل تقويم الطالب ص ١٠٣ :-

مجموعة قيم س التي تحقق المعادلة $\begin{bmatrix} ٢ & س \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ٣ \\ س \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١٠ \end{bmatrix}$ هي :-

الحل ٢×٣ + س×س = ١٠ ⇐ ٦ + س^{٢} = ١٠ ⇐ س^{٢} = ٤

⇐ س = ±٢ فرع (أ)

* إضافي دليل تقويم الطالب ص ١٠٣ :-

إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ١ \\ ٢ & ص \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -١ & ١٤ \\ -٢ & ١٩ \end{bmatrix}$ فإن قيم س، ص على الترتيب.

الحل ٣×-١ + ٢×٠ + ٢س = -١

-٣ + ٢س = -١ ⇐ $\boxed{س = ١}$

كذلك ٤×٢ + ٥×١ + ١×ص = ١٩

⇐ ٨ + ٥ + ص = ١٩

⇐ ص = ٦

∴ س = ١ ، ص = ٦ فرع (ج)

أ. هدى فرج

* إضافي دليل تقويم الطالب ص ١٠٣

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢×٣ ، ب من الرتبة ٣×٤ ، جـ من الرتبة ٢×٤ فأي العمليات التالية معرفة على المصفوفات ؟!

(أ) ب أ − جـ   (ب) أ جـ − ب   (جـ) جـ أ − ب   (د) أ ب − جـ

* إضافي دليل تقويم الطالب ص ١٠٣

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤ & -٣ \end{bmatrix}$ فإن قيمة أ × ب = ؟!

الحل

أ × ب = $\underset{١\times٢}{\begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix}} \times \underset{٢\times١}{\begin{bmatrix} ٤ & -٣ \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} ٣\times٤ & ٣\times-٣ \\ ٦\times٤ & ٦\times-٣ \end{bmatrix}$

$= \underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} ١٢ & -٩ \\ ٢٤ & -١٨ \end{bmatrix}}$ فرع (ب)

* إضافي ص ١١٤ دليل تقويم الطالب :-

إذا كانت ٢أ = $\begin{bmatrix} -٦ & ٤ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ فإن −أ =

الحل

٢أ = $\begin{bmatrix} -٦ & ٤ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix} \left(\times -\frac{١}{٢}\right)$

−أ = $-\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} -٦ & ٤ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix} \Leftarrow$ −أ = $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$ فرع (جـ)

أ. هدى فرج

* القسم الثاني / أجب عن الأسئلة التالية:

٢٠١٩ | إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س}^2 & \text{س ص} \\ \text{س ص} & \text{ص}^2 \end{bmatrix}$ ، بحيث $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$

أثبت أن $\text{أ}^2 = \text{أ}$

الحل: $\text{أ}^2 = \text{أ} \times \text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س}^2 & \text{س ص} \\ \text{س ص} & \text{ص}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س}^2 & \text{س ص} \\ \text{س ص} & \text{ص}^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \text{س}^4 + \text{س}^2\text{ص}^2 & \text{س}^3\text{ص} + \text{س ص}^3 \\ \text{س}^3\text{ص} + \text{س ص}^3 & \text{س}^2\text{ص}^2 + \text{ص}^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{س}^2(\underbrace{\text{س}^2 + \text{ص}^2}_{1}) & \text{س ص}(\underbrace{\text{س}^2 + \text{ص}^2}_{1}) \\ \text{س ص}(\underbrace{\text{ص}^2 + \text{س}^2}_{1}) & \text{ص}^2(\underbrace{\text{س}^2 + \text{ص}^2}_{1}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{س}^2 & \text{س ص} \\ \text{س ص} & \text{ص}^2 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

$\Leftarrow \text{أ}^2 = \text{أ}$ #

أ. هدى فرج

٢٠١٩ دورة ثانية

إذا كان $٢أ + ٣ب = \begin{bmatrix} -١٦ & ٤ \\ ١٣ & ٢ \end{bmatrix}$

$أ + ب = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ حيث أ، ب مصفوفتين

فجد (أ . ب)

الحل

$٢أ + ٣ب = \begin{bmatrix} -٦ & ٤ \\ ١٣ & ٢ \end{bmatrix} \leftarrow ①$

$أ + ب = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \leftarrow ② \quad (\times -٣)$

ينتج

$٢أ + ٣ب = \begin{bmatrix} -٦ & ٤ \\ ١٣ & ٢ \end{bmatrix}$

$-٣أ - ٣ب = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -١٥ & -٣ \end{bmatrix}$ +

$-أ + و = \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix} \Leftarrow أ = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ✓

بالتعويض في ② عن المصفوفة أ

$\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} + ب = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \Leftarrow ب = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ب = \begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ✓

$\Leftarrow أ . ب = \underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}} . \underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} ٤+٩ & -٢ \\ -٤+٦ & ٢ \end{bmatrix} = \underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} ١٣ & -٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}}$

أ. هدى فرج

إضافي دليل تقويم الطالب ص ١٠٥

كون المصفوفة $أ_{3\times3}$ بحيث $أ_{ي هـ} = \begin{cases} ي هـ & ي < هـ \\ \frac{ي}{هـ} & ي = هـ \\ ي + هـ & ي > هـ \end{cases}$

ثم جد ($أ_{21} \times أ_{23}$)

الحل

$$أ_{3\times3} = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} & أ_{13} \\ أ_{21} & أ_{22} & أ_{23} \\ أ_{31} & أ_{32} & أ_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$أ_{21} \times أ_{23} = 3 \times 6 = 18$$

إضافي دليل تقويم الطالب ص ١٠٥

أوجد قيمة س ، ص في المعادلة المصفوفية التالية :-

$$\begin{bmatrix} س & ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

الحل

$$\begin{bmatrix} س & ص \end{bmatrix}_{1\times2} \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{2\times2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3} \right) = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$\begin{bmatrix} 3س & -2ص \end{bmatrix}_{1\times2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}_{1\times3}$$

$$\begin{bmatrix} 3س - 4ص & -3س & 9س - 8ص \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

أ. هدى فرج

$٣س - ٤ص = ٤ \longrightarrow (١)$

$-٣س = -٣ \Leftarrow \boxed{س = ١}$

عوض عن س في معادلة (١) $\Leftarrow ٣ - ٤ص = ٤ \Leftarrow \boxed{ص = \frac{١}{٤}}$

* إضافي ص ١٠٥ دليل تقويم الطالب /

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} س & ١ \\ ص & ١ \end{bmatrix}$ جد كلاً من س، ص

التي تحقق $أب = ب أ$

الحل

$أب = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س & ١ \\ ص & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢س - ص & ٢ - ١ \\ ٢س + ٣ص & ٢ + ٣ \end{bmatrix}$

$أب = \begin{bmatrix} ٢س - ص & ١ \\ ٢س + ٣ص & ٥ \end{bmatrix}$ ✓

$ب أ = \begin{bmatrix} س & ١ \\ ص & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢س + ٢ & -س + ٣ \\ ٢ص + ٢ & -ص + ٣ \end{bmatrix}$ ✓

$أب = ب أ$

$\begin{bmatrix} ٢س - ص & ١ \\ ٢س + ٣ص & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢س + ٢ & -س + ٣ \\ ٢ص + ٢ & -ص + ٣ \end{bmatrix}$

$-س + ٣ = ١$

$-س = -٢$

$\Leftarrow \boxed{س = ٢}$

وكذلك

$-ص + ٣ = ٥$

$-ص = ٢$

$\Leftarrow \boxed{ص = -٢}$

أ. هدى فرج

* إضافي دليل تقويم الطالب ص ١٠٥

إذا كان $\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ 0 & \text{ع} \end{bmatrix}$ وكان $\text{ب}^2 = \text{أ}$

جد قيم س، ص، ع الموجبة

الحل

$$\text{ب}^2 = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ 0 & \text{ع} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ 0 & \text{ع} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{س}^2 & \text{س ص} + \text{ص ع} \\ 0 & \text{ع}^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب}^2 = \text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س}^2 & \boxed{\text{س ص} + \text{ص ع}} \\ 0 & \text{ع}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنها $\text{س}^2 = 1 \Leftarrow \text{س} = \pm 1$ (-1 مرفوض)

$\Leftarrow \boxed{\text{س} = 1}$

كذلك $\text{ع}^2 = 1 \Leftarrow \text{ع} = \pm 1$ (-1 مرفوض)

$\Leftarrow \boxed{\text{ع} = 1}$

$\text{س ص} + \text{ص ع} = 1 \Leftarrow 2\text{ص} = 1 \Leftarrow \boxed{\text{ص} = \frac{1}{2}}$

تمرين/ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{جتاس} & \text{جاس} \\ \text{جاس} & \text{جتاس} \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} \text{جا٢س} & ٠ \\ ٠ & \text{جا٢س} \end{bmatrix}$

أثبت أن $\text{أ}^{٢} - \text{ب} = \text{م}_{٢}$

الحل

$\text{أ}^{٢} = \begin{bmatrix} \text{جتاس} & \text{جاس} \\ \text{جاس} & \text{جتاس} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{جتاس} & \text{جاس} \\ \text{جاس} & \text{جتاس} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \text{جاس جتاس + جتاس جاس} & \text{جا}^{٢}\text{س + جتا}^{٢}\text{س} \\ \text{جتا}^{٢}\text{س + جا}^{٢}\text{س} & \text{جتاس جاس + جاس جتاس} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \text{جا٢س} & ١ \\ ١ & \text{جا٢س} \end{bmatrix}$

$\text{أ}^{٢} - \text{ب} = \begin{bmatrix} \text{جا٢س} & ١ \\ ١ & \text{جا٢س} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{جا٢س} & ٠ \\ ٠ & \text{جا٢س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

$= \text{م}_{٢}$ #

* تمرين/ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ع مصفوفات

$\text{أ}_{\text{ن}\times٣} \times \text{ب}_{\text{م}\times\text{ل}} - \text{جـ}_{٢\times\text{ل}} = \text{ع}_{\text{ن}\times٤}$

جد ناتج ٥ن + م − ل

الحل

$\text{أ}_{\text{ن}\times٣} \times \text{ب}_{\text{م}\times\text{ل}} - \text{جـ}_{٢\times\text{ل}} = \text{ع}_{\text{ن}\times٤}$

م = ٣

ل = ٤

ن × ل = ٢ × ل

ن = ٢

← ٥ن + م − ل
= ٥ × ٢ + ٣ − ٤
= ٩ #

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار

درس العمليات على المصفوفات

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

* اختبار درس العمليات على المصفوفات *

① إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً لأي مصفوفتين أ، ب

أ) أ × ب = ب × أ ب) أ − ب = ب − أ

ج) أ + ب = ب + أ د) أ = − ب

② إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -١ & ٥ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

فإن ٥٠س + ٥٠ص − ٤٨ (س + ص)

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٨ & -٢ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -٢ & ٨ \\ -٤ & -٤ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & -٨ \\ ٤ & -٤ \end{bmatrix}$

③ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} \end{bmatrix}$ ، س^2 = $\begin{bmatrix} \text{ن} & \text{م} \\ \text{م} & \text{ن} \end{bmatrix}$ فإن

أ) م = أ^2 + ب^2 ، ن = أ^2 − ب^2 ب) م = أ^2 + ب^2 ، ن = ٢أب

ج) م = أ^2 + ب^2 ، ن = أب د) م = ٢أب ، ن = أ^2 + ب^2

④ حل المعادلة المصفوفية ٢س + س $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

أ) س = $\begin{bmatrix} \frac{٣}{٤} & \frac{١}{٢} \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) س = $\begin{bmatrix} ١ & -\frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٤} & ٠ \end{bmatrix}$

ج) س = $\begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{١}{٤} \\ \frac{٣}{٤} & ٠ \end{bmatrix}$ د) س = $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

⑤ جاهـ $\begin{bmatrix} \text{جاهـ} & \text{-جتاهـ} \\ \text{جتاهـ} & \text{جاهـ} \end{bmatrix}$ + جتاهـ $\begin{bmatrix} \text{جتاهـ} & \text{جاهـ} \\ \text{-جاهـ} & \text{جتاهـ} \end{bmatrix}$ =

(أ) $\begin{bmatrix} \text{جا}^2\text{هـ}+1 & 1 \\ 1 & \text{جتا}^2\text{هـ}+1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(جـ) م^2 (د) و^2

⑥ حل المعادلة $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ 2 \\ \text{ص} \end{bmatrix}$

(أ) س $= \frac{2}{3}$ ، ص $= -1$ (ب) س $= \frac{-2}{3}$ ، ص $= 2$

(جـ) س $= 2$ ، ص $= \frac{-2}{3}$ (د) س $= 1$ ، ص $= -1$

أ. هدى فرج

حلول أسئلة اختبار درس

* العمليات على المصفوفات *

(١) أ + ب = ب + أ   فرع (ج)

(٢) ٥٠ س + ٥٠ ص − ٤٨ (س + ص)

= ٥٠ س + ٥٠ ص − ٤٨ س − ٤٨ ص

= ٢ س + ٢ ص = $٢ \begin{bmatrix} ١- & ٥ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} + ٢ \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ١٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$ فرع (أ)

(٣) س^{٢} = س × س = $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} \text{أب} + \text{بأ} & \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} \\ \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} & \text{بأ} + \text{أب} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\text{أب} & \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} \\ \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} & ٢\text{أب} \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} \text{ن} & \text{م} \\ \text{م} & \text{ن} \end{bmatrix}$

⟸ م = أ^{٢} + ب^{٢} و ن = ٢أب   فرع (ب)

أ. هدى فرج

٤) حل المعادلة $2\text{س}^{ن} + \text{س}^{ن} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$2\text{ن} = 2\text{م}$

$$\text{س}^{ن} \left(2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{س}^{ن} \times \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{س}^{ن} \times 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$4\,\text{س}^{ن}\,\text{م} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$4\,\text{س}^{ن} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Leftarrow \text{س}^{ن} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{س}^{ن} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$ فرع (و)

٥) $\text{جاهـ} \begin{bmatrix} \text{جاهـ} & -\text{جتاهـ} \\ \text{جتاهـ} & \text{جاهـ} \end{bmatrix} + \text{جتاهـ} \begin{bmatrix} \text{جتاهـ} & \text{جاهـ} \\ -\text{جاهـ} & \text{جتاهـ} \end{bmatrix}$

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} \text{جا}^2\text{هـ} & -\text{جاهـ جتاهـ} \\ \text{جاهـ جتاهـ} & \text{جا}^2\text{هـ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{جتا}^2\text{هـ} & \text{جاهـ جتاهـ} \\ -\text{جاهـ جتاهـ} & \text{جتا}^2\text{هـ} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{جا}^2\text{هـ} + \text{جتا}^2\text{هـ} & 0 \\ 0 & \text{جا}^2\text{هـ} + \text{جتا}^2\text{هـ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{م}_2$$ فرع (جـ)

⑥ حل المعادلة

$$\left(\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}=\underset{٣\times٢}{\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}}\times\underset{٢\times٣}{\begin{bmatrix}\text{س}\\ ٢\\ \text{ص}\end{bmatrix}}$$

الحل

$$\underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}}\times\underset{٢\times١}{\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}}=\underset{٢\times١}{\begin{bmatrix}-2+\text{ص}\\ \text{س}+\text{ص}\end{bmatrix}}$$

$$\Leftarrow\ \underset{٢\times١}{\begin{bmatrix}3\text{س}+\text{ص}\\ 4\text{س}+2\text{ص}\end{bmatrix}}=\underset{٢\times١}{\begin{bmatrix}-2+\text{ص}\\ \text{س}+\text{ص}\end{bmatrix}}$$

$$\Leftarrow\ 3\text{س}+\cancel{\text{ص}}=-2+\cancel{\text{ص}}\ \Leftarrow\ \boxed{\text{س}=\frac{-2}{3}}$$

كذلك $4\text{س}+2\text{ص}=\text{س}+\text{ص}$

$$\Leftarrow\ 3\text{س}+\text{ص}=0\ \Leftarrow\ 3\times\left(\frac{-2}{3}\right)+\text{ص}=0$$

$$\Leftarrow\ -2+\text{ص}=0\ \Leftarrow\ \boxed{\text{ص}=2}$$

$\therefore$ $\text{س}=\frac{-2}{3}$ ، $\text{ص}=2$ فرع (ب)

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

المـحـددات

Determinants

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

أ. هدى فرج

المحددات Determinants

* **تعريف/** إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإننا نرمز لمحددها بالرمز |أ|

① إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} \end{bmatrix}$ فإن $|\text{أ}| = \text{أ}_{11}$

② إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \end{bmatrix}$ فإن $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \end{vmatrix}$

$= \text{أ}_{11} \times \text{أ}_{22} - \text{أ}_{12} \times \text{أ}_{21}$

③ إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{23} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{bmatrix}$

فإن $|\text{أ}| = \text{أ}_{11} \begin{vmatrix} \text{أ}_{22} & \text{أ}_{23} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} - \text{أ}_{12} \begin{vmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{23} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} + \text{أ}_{13} \begin{vmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} \end{vmatrix}$

* **مثال ①** إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ ، $\text{جـ} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

نجد |أ| ، |ب| ، |ب + جـ|

الحل $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 8 - 5 \times 3 = 16 - 15 = 1$

$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 3 \times -4 - 7 \times 0 = -12 - 0 = -12$

|ب + جـ|

$\text{ب} + \text{جـ} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

$|\text{ب} + \text{جـ}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times -4 - 5 \times 5 = -8 - 25 = -33$

أ. هدى فرج

* **نظرية**/ إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة ، فإنه يمكن إيجاد |أ| بدلالة مدخلات أي صف ، أو أي عمود وذلك بضربها بالمحدد الناتج من تصور شطب الصف ي والعمود هـ ، وإعطاء إشارة لحاصل الضرب وفق القاعدة $(-1)^{ي+هـ}$

* **ملاحظة**/ يمكن استخدام أي صف أو أي عمود لإيجاد قيمة المحدد وفق النظرية السابقة.

* **مثال 2**/ أوجد $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

الحل

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1(-3-5) - (-2)(2-4) + 2(-10-12)$$

$$= -8 + 2\times-2 + 2\times-22 = -8-4-44$$

$$= \boxed{-56}$$

* **مثال 3**/ أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ (1) باستخدام عناصر الصف الثاني (2) باستخدام عناصر العمود الثالث

الحل (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(5)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(6)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3}(4)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

أ. هدى فرج

$$= -5(18-21) + 6(9-6) - 4(7-4)$$

$$= -5\times -3 + 6\times 3 - 4\times 3 = \boxed{21}$$

② $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(3)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(4)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(9)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 3(35-12) - 4(7-4) + 9(6-10)$$

$$= 3\times 23 - 4\times 3 + 9\times -4 = 69 - 12 - 36$$

$$= \boxed{21}$$

* لاحظ المحدد في الفرع ① والفرع ② متساويان.

* مثال ③ ص١١ من الكتاب الوزاري :-

جد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & س & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 20$

الحل: نجد المحدد باستخدام مدخلات الصف الثالث لأنه يحتوي أصفار

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & س & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(5)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & س \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & س \end{vmatrix}$$

$$= 5(س - 4) = 20$$

$$\Leftarrow 5س - 20 = 20$$

$$\Leftarrow \boxed{س = 8}$$

* بعض خصائص المحددات /

(١) عند تبديل صف مكان صف أو عمود مكان آخر فإن قيمة المحدد تضرب بـ (-١)

مثلاً /
$$\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = (-١) \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}$$

(٢) عند تبديل صف بعمود أو عمود بصف بنفس الترتيب فقيمة المحدد لا تتأثر

مثلاً /
$$\begin{vmatrix} ١- & ٥ & ٢ \\ ٢- & ٣ & ٠ \\ ١ & ٤ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٢- & ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ & ١- \end{vmatrix} = ٢٢$$

(٣) إذا كانت مدخلات أي صف (أو عمود) كلها أصفار فإن قيمة المحدد = صفر .

مثلاً /
$$\begin{vmatrix} ١- & ٢ & ٨ \\ ٣ & ٤ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \text{صفر} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ٠ \\ ١ & ٥ & ٠ \\ ٢ & ٣ & ٠ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(٤) إذا كان أحد الصفوف (الأعمدة) من مضاعفات صف (عمود) آخر فإن محدد تلك المصفوفة = صفر .

مثلاً /
$$\begin{vmatrix} ٦ & ٤- & ٢ \\ ١- & ٥ & ٢ \\ ٣ & ٢- & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$
(لاحظ أن ص١ = ٢ص٣)

(٥) إذا أضيف لمدخلات أي صف، أو أي عمود مضاعفات نظائرها في صف آخر، أو عمود آخر، فلا تتغير قيمة المحدد.

مثال/
$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢+٤\times٥ & ٣+٤\times٦ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix}$$

مثال آخر/
$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٥ & -١ \\ ١ & -٢ & ٣ \end{vmatrix} = ١٣ \quad ، \quad \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٤ & ١ & ٥ \\ ١ & -٢ & ٣ \end{vmatrix} = ١٣$$

$\times٢ \quad \times٢ \quad \times٢$

حيث أضيف إلى الصف الثاني ضعف الصف الثالث.

(٦) إذا تساوت المدخلات المتناظرة في صفين أو عمودين في مصفوفة فإن محددها يساوي صفراً.

مثال/
$$\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ٨ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٣ & ٦ & ٨ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(٧) إذا كانت المصفوفة مصفوفة مثلثية علوية فإن محددها يساوي حاصل ضرب المدخلات في القطر الرئيس

مثال/
$$م = \begin{bmatrix} م_{١١} & م_{١٢} & م_{١٣} \\ ٠ & م_{٢٢} & م_{٢٣} \\ ٠ & ٠ & م_{٣٣} \end{bmatrix}$$ فإن $|م| = م_{١١} \times م_{٢٢} \times م_{٣٣}$

(٨) $|م| = ١$ مهما اختلفت رتبة م

أ. هدى فرج

* نشاط (٢) ص١١ من الكتاب الوزاري

إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ فإن قيمة $|أ|$ ، $|2أ|$ ، $|-3أ|$

الحل $|أ| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

$|2أ| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 24 = -8 =$

حل آخر

$\boxed{(2)^2 |أ| = 4|أ| = 4 \times -2 = -8}$

$|-3أ| = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \end{vmatrix} = 36 - 54 = -18 =$

حل آخر

$\boxed{(-3)^2 |أ| = +9 \times -2 = -18}$

* قاعدة (١) / إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن ، فإن $|لأ| = ل^ن |أ|$ ، حيث $ل \in ح$

مثال (٤) ص١١ كتاب وزاري/

إذا كانت أ مصفوفة مربعة وكان $|أ| = 5$ ، $|2أ| = 40$ ، فما رتبة المصفوفة أ ؟

الحل $|أ| = 5$ ، $|2أ| = 40 \Leftarrow 2^ن |أ| = 40$

$2^ن \times 5 = 40 \Leftarrow 2^ن = 8$

$\Leftarrow 2^ن = 2^3$

$\Leftarrow \boxed{ن = 3}$

(أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة)

قاعدة ② / إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة ن فإن

|أ . ب| = |أ| × |ب|

*** مثال ⑤ ص ١١٢ /** إذا كان أ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & -٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$

جد |أ . ب|

الحل |أ| = ١٠ - ١٢ = -٢ ، |ب| = ٢ - ١٢ = -١٠

ومنه |أ . ب| = |أ| × |ب| = -٢ × -١٠ = ٢٠

*** ملاحظة /** |أ^٣| = |أ . أ . أ| = |أ| × |أ| × |أ| = |أ|^٣

⟸ |أ^ن| = |أ|^ن حيث أ مصفوفة مربعة

*** نشاط ③ ص ١١٢ كتاب وزاري /** إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$

أوجد |س . ص| ، |ص . س|

الحل س . ص = [٢٣] ⟸ |س . ص| = |٢٣| = ٢٣

ص . س = $\begin{bmatrix} ٨ & ١٠ \\ ١٢ & ١٥ \end{bmatrix}$ ⟸ |ص . س| = ٨ × ١٥ - ١٢ × ١٠
= صفر

نلاحظ أن |س . ص| ≠ |ص . س|

أ. هدى فرج

* حلول أسئلة الكتاب الوزاري ص ١١٣ *

(١) جد قيمة كل من المحددات التالية :-

(أ) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4(10-3) - 3(12+4) + 2(18+20)$

$= -4\times7 - 3\times16 + 2\times38 = -28 - 48 + 76$

$= -76 + 76 =$ صفر

أو الصف الأول = الصف الثالث ← $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$ صفر

(ب) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2\times8 - (4\times-4) = 16+16 = 32$

(جـ) $|5\,\text{م}_3| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5\times5\times5 = 125$

أو $|5\,\text{م}_3| = (5)^3\,|\text{م}| = 125\times1 = 125$

(٢) حل المعادلة التالية :-

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & \text{س} & 5 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & -1 \\ 1 & \text{س} \end{vmatrix}$

الحل: $2(3\text{س} - 30) + 1(12-5) + 3(24 - \text{س}) = \text{س}^2 + 1$

$6\text{س} - 60 + 7 + 72 - 3\text{س} - \text{س}^2 - 1 = 0$

← $\text{س}^2 - 3\text{س} - 18 = 0$ ← $(\text{س} - 6)(\text{س} + 3) = 0$

← $\text{س} = 6$ ، $\text{س} = -3$

③ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية بحيث أن

|٣أ| = ٥٤ ، |أ.ب| = -١٢ ، فما قيمة |٢أ| + |٥ب| ؟

الحل

$|٣أ| = ٥٤ \Leftarrow (٣)^٢|أ| = ٥٤ \Leftarrow |أ| = \frac{٥٤}{٩} = ٦$

$\Leftarrow \boxed{|أ| = ٦}$

$|أ.ب| = |أ| \times |ب| = -١٢$

$\Leftarrow ٦ \times |ب| = -١٢ \Leftarrow |ب| = \frac{-١٢}{٦} \Leftarrow |ب| = -٢$

$|٢أ| + |٥ب| = (٢)^٢|أ| + (٥)^٢|ب|$

$= ٤ \times ٦ + ٢٥ \times -٢ = ٢٤ - ٥٠ = \boxed{-٢٦}$

④ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^٣| = ١٢٥$ ، فما قيمة / قيم س ؟

الحل

$|أ| = \begin{vmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{vmatrix} = س^٢ - ٤$

$|أ^٣| = |أ.أ.أ| = |أ| \times |أ| \times |أ| = ١٢٥$

$(س^٢ - ٤)^٣ = ١٢٥ \Leftarrow (س^٢ - ٤)^٣ = ٥^٣ \Leftarrow س^٢ - ٤ = ٥$

$\Leftarrow س^٢ = ٩$

$\Leftarrow \boxed{س = \pm ٣}$ ✓

حل آخر / $|أ^٣| = |أ|^٣ = ١٢٥ \Leftarrow |أ|^٣ = ٥^٣ \Leftarrow |أ| = ٥$

$|أ| = س^٢ - ٤ = ٥ \Leftarrow س^٢ = ٩ \Leftarrow \boxed{س = \pm ٣}$ ✓

أ. هدى فرج

(٥) إذا علمت أن معادلة المستقيم في المستوى والمار بالنقطة $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ ، $(\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢)$ تعطى بالقاعدة

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & ١ \\ \text{س}_١ & \text{ص}_١ & ١ \\ \text{س}_٢ & \text{ص}_٢ & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

فاستخدم القاعدة في إيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٢)، (٥، ٧)

(الحل) باستخدام القاعدة

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٧ & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \text{س}(٢-٧) - \text{ص}(٣-٥) + ١(٢١-١٠) = ٠$$

$$-٥\text{س} + ٢\text{ص} + ١١ = \text{صفر} \Leftarrow ٢\text{ص} = ٥\text{س} - ١١$$

$$\Leftarrow \text{ص} = \frac{١}{٢}(٥\text{س} - ١١)$$

(٦) أذكر خاصية/خصائص المحددات التي استخدمت في كل من المتساويات الآتية:

(أ)
$$\begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ١ & ١٠ \end{vmatrix}$$

(الحل)
$$\begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٥-٤ & ٢+٨ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ١ & ١٠ \end{vmatrix}$$

ضرب الصف الأول في (−٢) وإضافة للصف الثاني

$$\boxed{-٢\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}$$

(ب)
$$\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٥ & ١٥ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٥ & ١٥ \end{vmatrix} = ٢ \times ٥ \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ١٠ \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

(إخراج عامل مشترك في كل من الصفين)

(جـ) $\begin{vmatrix} ٧ & ٦ \\ ٩ & ١١ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٦ & ٧ \\ ١١ & ٩ \end{vmatrix}$

تبديل عمود ① مكان عمود ② فتضرب قيمة المحدد في (سالب ١)

٧) باستخدام خصائص المحددات أثبت مايلي :-

(أ) $\begin{vmatrix} ب+جـ & أ & ١ \\ أ+ب & جـ & ١ \\ أ+جـ & ب & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

الحل

$\begin{vmatrix} ب+جـ & أ & ١ \\ أ+ب & جـ & ١ \\ أ+جـ & ب & ١ \end{vmatrix} \xrightarrow{ع_١ + ع_٢ + ع_٣} \begin{vmatrix} ب+جـ+أ & أ & ١ \\ أ+ب+جـ & جـ & ١ \\ أ+جـ+ب & ب & ١ \end{vmatrix}$

إخراج (أ+ب+جـ) عامل مشترك من العمود الأول

$(أ+ب+جـ) \begin{vmatrix} ١ & أ & ١ \\ ١ & جـ & ١ \\ ١ & ب & ١ \end{vmatrix} \xrightarrow{ع_١ = ع_٣} (أ+ب+جـ) \times \text{صفر}$

$= \text{صفر}$ #

(ب) $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & ١٠ \end{vmatrix}$ مصفوفة قطرية علوية قيمة محددها = حاصل

ضرب مدخلات القطر الرئيسي $= ٥ \times -٤ \times ١٠$

$= -٢٠٠$ #

أ. هدى فرج

* حلول أسئلة اختبارات وأسئلة إضافية

على درس المحددات *

٢٠٢٠ دورة ثانية

أيٌّ من الآتية تساوي $\begin{vmatrix} 1 & \text{جاس} \\ \text{جتاس} & 0 \end{vmatrix}$ ؟

تذكر
* جا٢س = ٢جاس جتاس
* ½ جا٢س = جاس جتاس

الحل

$\begin{vmatrix} 1 & \text{جاس} \\ \text{جتاس} & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - \text{جاس} \times \text{جتاس}$

$= -\text{جاس جتاس} = -\frac{1}{2}\,\text{جا٢س}$ فرع (د)

٢٠١٩

إذا كان $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix} = 5$ فما قيمة $\begin{vmatrix} \text{٣ب} & \text{٢أ} \\ \text{٢جـ} & \text{٣د} \end{vmatrix} = $ ؟

الحل

$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix} = \text{أد} - \text{ب جـ} = 5$ ⟸ $\boxed{\text{ب جـ} - \text{أد} = -5}$ ← (١)

$\begin{vmatrix} \text{٣ب} & \text{٢أ} \\ \text{٢جـ} & \text{٣د} \end{vmatrix} = \text{٣ب} \times \text{٢جـ} - \text{٢أ} \times \text{٣د}$

$= \text{٦ب جـ} - \text{٦أد} = 6(\text{ب جـ} - \text{أد})$

$= 6 \times -5 = -30$ فرع (د)

٢٠١٩ صناعي

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ وكانت ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية بحيث $|\text{٢أب}| = 24$ فما قيمة $|\text{ب}|$ ؟

الحل

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 10 = -3$

$|\text{٢أب}| = 4\,|\text{أ}| \times |\text{ب}| = 24$

⟸ $4 \times -3 \times |\text{ب}| = 24$

⟸ $|\text{ب}| = \frac{24}{-12} = -2$ فرع (ب)

أ. هدى فرج

* إضافي/ دليل تقويم الطالب ص ١٠٧ :-

إذا كان $\begin{vmatrix} ٤ & \text{س} \\ ١٢ & ٩ \end{vmatrix} = ٠$ فإن قيمة س تساوي

الحل

$\begin{vmatrix} ٤ & \text{س} \\ ١٢ & ٩ \end{vmatrix} = ٤ \times ٩ - ١٢\text{س} = ٠$

$\Leftarrow ٣٦ - ١٢\text{س} = ٠ \Leftarrow -١٢\text{س} = -٣٦$

$\Leftarrow \boxed{\text{س} = ٣}$ فرع ج

* إضافي ص ١٠٧ / دليل تقويم الطالب :-

إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ \text{س} & ٣ \end{bmatrix}$ ، $|٢أ| = ١٢$ فإن قيمة س ؟!

الحل $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ \text{س} & ٣ \end{vmatrix} = \boxed{٦ - ٣\text{س}} \rightarrow (١)$

$|٢أ| = ٤|أ| = ١٢ \Leftarrow \boxed{|أ| = ٣} \rightarrow (٢)$

$\Leftarrow$ من (١) ، (٢)

$٦ - ٣\text{س} = ٣ \Leftarrow -٣\text{س} = ٣ - ٦ \Leftarrow \boxed{\text{س} = ١}$ فرع ب

* اضافي ص ١٠٧ / دليل تقويم الطالب :-

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن بحيث $|٢أ| = ٣٢٠$ ، $|أ| = ١٠$
فإن قيمة ن ؟!

الحل $|٢أ| = ٢^{ن} |أ| = ٣٢٠$

$\Leftarrow ٢^{ن} \times ١٠ = ٣٢٠$

$\Leftarrow ٢^{ن} = ٣٢$

$\Leftarrow ٢^{ن} = ٢^{٥} \Leftarrow \boxed{ن = ٥}$

أ. هدى فرج

* إضافي دليل تقويم الطالب ص١٠٧ :-

إذا ضربت جميع عناصر محدد من الرتبة الثالثة قيمته م في العدد ٢ فإن قيمة المحدد الناتج تساوي ؟

الحل قيمة المحدد الناتج $= (٢)^٣$ م $=$ ٨م فرع د

* إضافي دليل تقويم الطالب ص١٠٨ :-

إذا كان
$$\begin{vmatrix} س-١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & س^٢+س+١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٩$$
، فإن $س^٦ =$ ؟!

الحل نوجد المحدد باستخدام الصف الأول لاحتوائه على عنصرين أصفار

$$\begin{vmatrix} س-١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & س^٢+س+١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = (س-١)(س^٢+س+١) = ٩$$

$$= س^٣ + س^٢ + س - س^٢ - س - ١ = ٩$$

$$\Leftarrow س^٣ = ١٠ \Leftarrow (س^٣)^٢ = (١٠)^٢$$

$$\Leftarrow س^٦ = ١٠٠$$ فرع د

* إضافي / دليل تقويم الطالب ص١٠٨ :-

$$\begin{vmatrix} جاهـ & جتاهـ \\ -جتاهـ & جاهـ \end{vmatrix} = ؟!$$

الحل $=$ جا^{٢}هـ $+$ جتا^{٢}هـ $= ١$ فرع د

أ. هدى فرج

* إضافي / دليل تقويم الطالب ص ١٠٦ :-

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية بحيث

$|-2أ \times ب| = 48$ ، وكان $|ب| = 2$ ، فإن قيمة $|أ| = $ ؟

الحل $|-2أ \times ب| = 48$

$\Leftarrow |-2أ| \times |ب| = 48$

$\Leftarrow (-2)^2 |أ| \times |ب| = 48$

$\Leftarrow 4|أ| \times 2 = 48$

$\Leftarrow |أ| = \frac{48}{8}$

$\Leftarrow |أ| = 6$ فرع (ج)

* مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & س & 0 \\ س & 7 & 5 \end{vmatrix} = $ صفر

الحل نستخدم العمود الثالث لأنه يحتوي على مدخلتين = صفر

$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & س & 0 \\ س & 7 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} (5) (2س - 20) = 0$

$\Leftarrow 5(2س - 20) = 0$

$\Leftarrow 10س - 100 = 0 \Leftarrow س = 10$

$\therefore$ م.ح $= \{10\}$ فرع (د)

* أجب عن الأسئلة التالية :-

(٢٠٢٠) جد قيم س التي تجعل

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & 2 \\ \text{س} & 3 & \text{س} \\ 4 & \text{س} & 5 \end{vmatrix} = -9$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & 2 \\ \text{س} & 3 & \text{س} \\ 4 & \text{س} & 5 \end{vmatrix} = 1(15 - \text{س}^2) - \text{س}(5\text{س} - 4\text{س}) + 2(\text{س}^2 - 12) = -9$$

$\Leftarrow 15 - \text{س}^2 - 5\text{س}^2 + 4\text{س}^2 + 2\text{س}^2 - 24 = -9$

$\Leftarrow -9 = -9$ (صحيحة لكل $\text{س} \in$ ح)

$\therefore$ قيم س التي تجعل العلاقة صحيحة $\text{س} \in$ ح .

(٢٠٢٠ دورة ثانية) إذا كان

$$\begin{vmatrix} \text{س} & -3 & 1 \\ 2\text{س} & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 13$$

أوجد قيمة س ؟

الحل

$$\begin{vmatrix} \text{س} & -3 & 1 \\ 2\text{س} & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \text{س}(-35 - 12) + 3(14\text{س} - 2) + 1(12\text{س} + 5) = 13$$

$\Leftarrow -47\text{س} + 42\text{س} - 6 + 12\text{س} + 5 = 13$

$\Leftarrow -5\text{س} + 12\text{س} - 1 = 13 \Leftarrow 7\text{س} = 14 \Leftarrow \boxed{\text{س} = 2}$

أ. هدى فرج

* إضافي/ دليل تقويم الطالب ص١١١ :-

أثبت أنه
$$\begin{vmatrix} س & ص & ٣ \\ ٢ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٥ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$$
هي معادلة مستقيم يمر بالنقطتين (٢،١) ، (-٥،٥)

الحل
$$\begin{vmatrix} \overset{+}{س} & \overset{-}{ص} & \overset{+}{٣} \\ ٢ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٥ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$$

$\Leftarrow$ س (-٤ - ١٠) - ص (٨ - ١) + ٣ (١٠ + ١٠) = صفر

$\Leftarrow$ -١٤ س - ٨ ص + ٣٠ = ٠ $\Leftarrow$ -١٤ س = ٨ ص - ٣٠

$\Leftarrow$ $\boxed{س = \frac{-٤}{٧} ص + \frac{١٥}{٧}}$ $\leftarrow$ ①

* كذلك معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢،١) ، (-٥،٥) هي

م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٥ - ١}{-٥ - ٢}$ = $\frac{٤}{-٧}$

معادلة المستقيم ص - ص١ = م (س - س١)

(ص - ١) = $\frac{-٤}{٧}$ (س - ٢)

ص = $\frac{-٤}{٧}$ س + $\frac{٨}{٧}$ + ١

$\boxed{ص = \frac{-٤}{٧} س + \frac{١٥}{٧}}$ $\leftarrow$ ②

من ① ، ②

نلاحظ أنه
$$\begin{vmatrix} س & ص & ٣ \\ ٢ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$$
هي معادلة مستقيم يمر بالنقطتين (٢،١) ، (-٥،٥) #

*** خارجي/** إذا كان $\begin{vmatrix} -١ & \text{س} \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} & ١ \\ -٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٧$ ، فما قيمة س ؟

الحل

$$\begin{vmatrix} -١ & \text{س} \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} & ١ \\ -٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٧$$

$\Leftarrow (\text{س} + ٣) + (-٢ - ٢\text{س}) = ٧$

$\Leftarrow \text{س} + ٣ - ٢ - ٢\text{س} = ٧ \Leftarrow -\text{س} + ١ = ٧ \Leftarrow \boxed{\text{س} = -٦}$

*** خارجي/** جد قيمة س التي تجعل $\begin{vmatrix} ٢ & \text{جاس} & ١ \\ \text{جتاس} & ١ & \text{جاس} \\ ١ & \text{جتاس} & ٠ \end{vmatrix} = \frac{١}{٢}$

س $\in [٠ ، \pi]$

الحل

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{٢} & \overset{-}{\text{جاس}} & \overset{+}{١} \\ \text{جتاس} & ١ & \text{جاس} \\ ١ & \text{جتاس} & ٠ \end{vmatrix} = \frac{١}{٢}$$

$\Leftarrow ١(١ - \text{جتا}^٢\text{س}) - \text{جاس}(\text{جاس} - ٠) + ٢(\text{جاس جتاس} - ٠) = \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow \cancel{\text{جا}^٢\text{س}} - \cancel{\text{جا}^٢\text{س}} + ٢\text{جاس جتاس} = \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow \text{جا}٢\text{س} = \frac{١}{٢}$

* $١ - \text{جتا}^٢\text{س} = \text{جا}^٢\text{س}$

* $٢\text{جاس جتاس} = \text{جا}٢\text{س}$

جا٢س موجبة في الربع الأول

$٢\text{س} = ٣٠^\circ$

$\Leftarrow \text{س} = ١٥^\circ \in [٠ ، \pi]$

الثاني $٢\text{س} = ١٨٠^\circ - ٣٠^\circ$

$٢\text{س} = ١٥٠^\circ \Leftarrow \text{س} = ٧٥^\circ \in [٠ ، \pi]$

م.ح $= \{١٥^\circ ، ٧٥^\circ\}$

تمرين/ إذا كانت أ ، ب ، ج مصفوفات من الرتبة نفسها وجميعها مصفوفات مربعة حيث |أ×ب| = ٤ ، |أ×ج| = ٨ وكان |ب| = $|\text{ج}|^{\text{٢}}$ - ٣ أوجد قيمة كل من |أ| ، |ب| ، |ج|

الحل

|أ×ب| = |أ|×|ب| = ٤ ← (١)

|أ×ج| = |أ|×|ج| = ٨ ← (٢)   قسم (١) على (٢) ينتج أن

$\frac{|\text{ب}|}{|\text{ج}|} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ⇐ |ب| = ٢|ج|

⇐ $|\text{ج}|^{\text{٢}}$ - ٣ = ٢|ج| (|ب| = $|\text{ج}|^{\text{٢}}$ - ٣ معطى)

⇐ $|\text{ج}|^{\text{٢}}$ - ٢|ج| - ٣ = صفر

⇐ (|ج| - ٣)(|ج| + ١) = صفر

⇐ |ج| = ٣ أو |ج| = -١

⇐ |ب| = ٦ ⇐ |ب| = -٢

⇐ |أ|×٣ = ٨ ⇐ |أ|×-١ = ٨

⇐ |أ| = $\frac{\text{٨}}{\text{٣}}$ ⇐ |أ| = -٨

أ. هدى فرج

وزاري/ إذا كان ق(س) = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & جاس & -جتاس \\ ٠ & جاس & جتاس \end{vmatrix}$

أوجد أكبر قيمة للاقتران ق(س) في الفترة [٠ ، π]

الحل

$١ \begin{vmatrix} جاس & -جتاس \\ جاس & جتاس \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ٠ & جاس \\ ٠ & جتاس \end{vmatrix}$

= جاس جتاس + جاس جتاس

⇐ ق(س) = ٢جاس جتاس = جا٢س

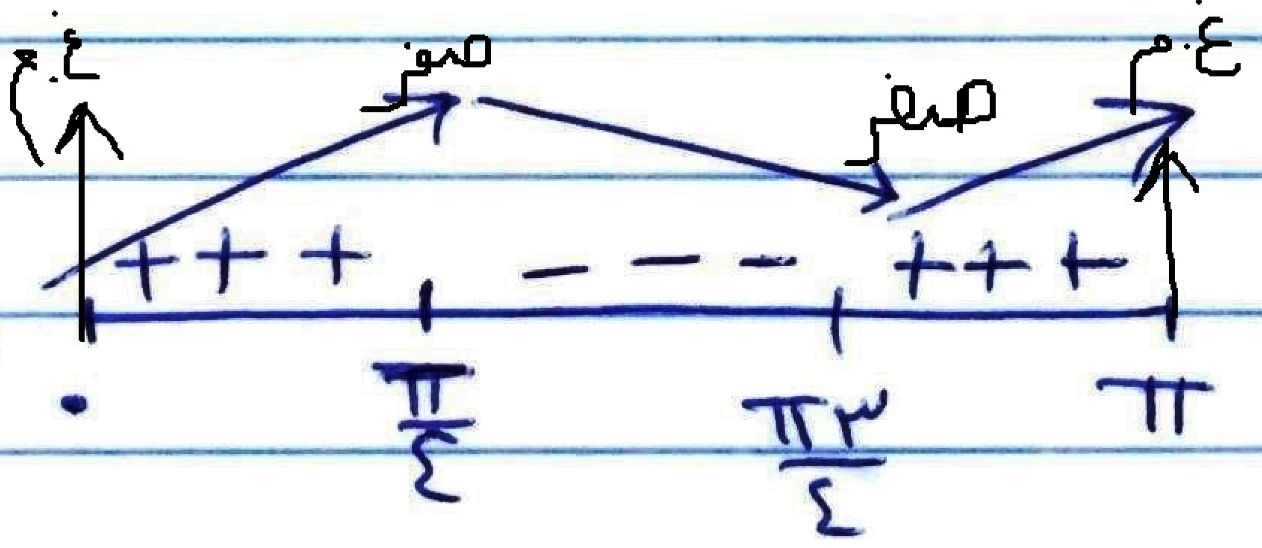
ق'(س) = ٢جتا٢س

ق'(س) = ٠ ⇐ ٢جتا٢س = ٠ ⇐ جتا٢س = ٠

⇐ ٢س = $\frac{\pi}{٢}$ ، ٢س = $\frac{٣\pi}{٢}$

⇐ س = $\frac{\pi}{٤}$ ∈ [٠ ، π] ، س = $\frac{٣\pi}{٤}$ ∈ [٠ ، π]

إشارة ق'(س)



توجد قيمة عظمى لـ ق(س) عند س = $\frac{\pi}{٤}$ وقيمتها ق($\frac{\pi}{٤}$) = ١

توجد قيمة عظمى لـ ق(س) عند س = π قيمتها ق(π) = ٠

⇐ أكبر قيمة للاقتران ق(س) هي عند س = $\frac{\pi}{٤}$ قيمتها ١

أ. هدى فرج

فارجي/ أثبت أن (س-٥) أحد عوامل

$$\begin{vmatrix} ٦ & س+٢ & ٣ \\ ٢س-٢ & ٩ & (س-٣)^٢ \\ ١٠ & -٢ & س \end{vmatrix}$$

الحل (س-٥) أحد عوامل المحدد أي أن تعويض س = ٥ في المحدد ١ تجعل قيمة المحدد تساوي صفر

$$\therefore \begin{vmatrix} \overset{+}{٦} & \overset{-}{٧} & \overset{+}{٣} \\ ٨ & ٩ & ٤ \\ ١٠ & -٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٣(٩٠+١٦) - ٧(٤٠-٤٠) + ٦(-٨-٤٥)$$

$$= (٣ \times ١٠٦) - \text{صفر} + ٦ \times -٥٣$$

$$= ٣١٨ - ٣١٨ = \text{صفر}$$

$\therefore$ (س-٥) أحد عوامل المحدد #

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درس المحددات

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس

المحددات

(١) لأي مصفوفتين مربعتين أ ، ب من الرتبة الثالثة ، ك ∈ ح إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً :-

(أ) |أ − ب| = |أ| − |ب|

(ب) |أ + ب| = |أ| + |ب|

(ج) |ك(أ × ب)| = ك^{٣} |أ| × |ب|

(د) |ك(أ + ب)| = ك^{٣} |أ| × |ب|

(٢) إذا كانت أ = [قاس ظاس ؛ ظاس قاس] فإن |٣أ| =

(أ) −٩ (ب) ٩ (ج) ٣ (د) ١

(٣) قيمة س التي تجعل س^{٢} + | ٣ ١ ؛ ١ ٢ | س = صفر

(أ) س = ٠ ، ٥ (ب) س = ٠ ، −٥ (ج) س = ١ ، ٣ (د) س = −١ ، −٣

(٤) قيم س التي تجعل | س −١ ؛ ٣ س−١ | = | ٠ س ؛ −٣ ٨ |

(أ) س = ٥ ، ٣ (ب) س = −٥ ، −٣ (ج) س = −٣ ، ١ (د) س = ١ ، ٣

(٥) إذا كانت س = [−٤ ٥] ، ص = [١ ؛ −١] فإن قيمة |س × ص|

(أ) −٩ (ب) ٩ (ج) −١ (د) ١

٦) إذا كانت أ، ب مصفوفتين من الرتبة الثالثة بحيث |أ| = ٢ ،
|ب| = ٣ فإن قيمة محدد (|أ| ب^٢ − ٣ ب^٢) = ؟

أ) −٨ ب) −٩ ج) ٩ د) ٦

٧) معتمداً على الفرع أ أجب عن جميع الأسئلة التالية ؟

أ) إذا كان ق(س) = $\begin{vmatrix} س & ١ & ١ \\ ١ & س & ١ \\ ١ & ١ & س \end{vmatrix}$

فإن مجالات تزايد الاقتران ق(س)

أ)]−٢، ١] و [١، ∞[ب)]−∞، −٢]

ج)]−٢، ١[د)]١، ∞[

ب) ق(س) < ٠ عندما س ∈

أ)]−٢، ١[ب) [−٢، ١] ج)]−٢، ١] د)]−∞، −٢[

ج) ق(س) مقعر لأعلى في الفترة

أ)]−∞، −١[و]١، ∞[ب)]١، ∞[

ج)]−∞، −١] و [١، ∞[د)]−١، ١[

٧) ع يوجد لـ د(س) قيمة صغرى محلية عند النقطة

أ) (١ ، د(١))   ب) (-١ ، د(-١))   جـ) (-٢ ، د(-٢))   د) (٠ ، د(٠))

حلول أسئلة اختبار درس المحددات

أ. هدى فرج

① (ج) $|ك(أ\times ب)| = ك^3 |أ| \times |ب|$

② $أ = \begin{bmatrix} قاس & ظاس \\ ظاس & قاس \end{bmatrix}$ فإن $|3أ|$

$|أ| = قا^2 س - ظا^2 س$

$= 1 + ظا^2 س - ظا^2 س = 1$

$\Leftarrow |3أ| = 3^2 |أ| = 9 \times 1 = 9$ فرع (ب)

③ $س^2 + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} س = صفر$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$

$س^2 + 5س = 0 \Leftarrow س(س+5) = 0$

$\Leftarrow س = 0 ، -5$ فرع (ب)

④ $\begin{vmatrix} س & -1 \\ 3 & س-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & س \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$

$\Leftarrow س(س-1)+3 = 0 + 3س \Leftarrow س^2 - س + 3 = 3س$

$\Leftarrow س^2 - 4س + 3 = 0$

$\Leftarrow (س-3)(س-1) = 0$

$\Leftarrow س = 3 ، س = 1$ فرع (د)

أ. هدى فرج

٥) س = [-٤ ٥] ، ص = $\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$

|س × ص|

س × ص = [-٤ ٥] $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ = [-٩]

٢×١   ١×٢   ١×١

|س × ص| = |-٩| = -٩ فرع (أ)

٦) |أ| = ٢ ، |ب| = ٣

محدد (|أ| $ب^{٢}$ - ٣ $ب^{٢}$)

= محدد (٢$ب^{٢}$ - ٣$ب^{٢}$) = |-$ب^{٢}$| = $(-1)^{٣}$ $|ب|^{٢}$

= -1 × ٩ = -٩ فرع (ب)

٧) ق(س) = $\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$

$$\begin{vmatrix} س & 1 & 1 \\ 1 & س & 1 \\ 1 & 1 & س \end{vmatrix}$$

ق(س) = س($س^{٢}$ - 1) - 1(س - 1) + (1 - س)

ق(س) = $س^{٣}$ - س - س + 1 + 1 - س = $س^{٣}$ - ٣س + ٢

ق(س) = صفر ⇐ $س^{٣}$ - ٣س + ٢ = ٠

⇐ ($س^{٢}$ - ٢س + 1)(س + ٢) = ٠

⇐ (س - 1)(س - 1)(س + ٢) = ٠

⇐ س = 1 ، س = -٢

(س + ٢)) $س^{٣}$ - ٣س + ٢   الناتج: $س^{٢}$ - ٢س + 1

-$س^{٣}$ ∓ ٢$س^{٢}$

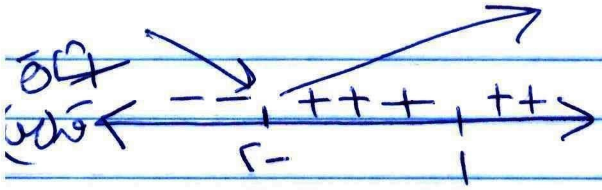
-٢$س^{٢}$ - ٣س + ٢

± ٢$س^{٢}$ ± ٤س

س + ٢

-س ∓ ٢

5



قيم س الحرجة هي {١ ، -٢}

* ق(س) متزايد في الفترة [-٢ ، ١] و [١ ، ∞[

أو [-٢ ، ∞[

أ. هدى فرج

* ق(س) متناقص في]-∞ ، -٢]

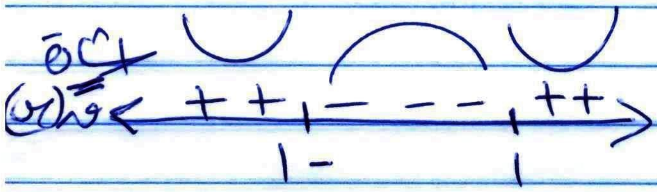
(أ) مجالات تزايد الاقتران ق(س) فرع (أ)

(ب) ق'(س) < ٠ عندما س ∈]-∞ ، -٢[فرع (د)

(د) (-٢ ، ق(-٢)) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س) من الرسم السابق.

(ج) ق''(س) = ٣س² - ٣

ق''(س) = ٠ عندما ٣س² = ٣ ⟸ س = ±١



* ق(س) مقعر للأعلى في]-∞ ، -١[و]١ ، ∞[

* ق(س) مقعر للأسفل في]-١ ، ١[

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

النظير الضربي للمصفوفة المربعة

Inverse of a Square Matrix

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

أ. هدى فرج

درس النظير الضربي للمصفوفة المربعة

* Inverse of a Square Matrix *

تعريف/ تسمى المصفوفة المربعة أ مصفوفة غير منفردة إذا وجدت مصفوفة مربعة ب من نفس الرتبة بحيث أ . ب = ب . أ = م ، وتسمى المصفوفة ب نظيراً ضربياً للمصفوفة أ ، ونرمز لها بالرمز $أ^{-1}$ ونكتب ($ب = أ^{-1}$) ويكون $أ . أ^{-1} = أ^{-1} . أ = م$

مثال (١) بين أن المصفوفة $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

الحل

$$أ . ب = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = م_٢$$

$$ب . أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = م_٢$$

بـ أ . ب = ب . أ = $م_٢$ ⟸ $ب = أ^{-1}$ وكذلك $أ = ب^{-1}$

* **مثال (2)** أثبت أن المصفوفة $\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي

الحل / نفرض أن المصفوفة أ لها نظير ضربي $\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix}$

$\therefore \text{أ}\,\text{أ}^{-1} = \text{أ}^{-1}\,\text{أ} = \text{م}$

$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix} = \text{م}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} 2\text{س}+\text{ع} & 2\text{ص}+\text{ل} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لكن $0 \neq 1$

$\therefore$ لا يوجد للمصفوفة أ نظير ضربي #

* **تعريف /** المصفوفة المربعة التي ليس لها نظير ضربي تسمى مصفوفة منفردة والمصفوفة المربعة التي لها نظير ضربي تسمى مصفوفة غير منفردة.

* يمكن تمييز المصفوفة المنفردة من خلال المحدد.

نظرية / تكون المصفوفة المربعة أ منفردة إذا وفقط إذا كان $|\text{أ}| =$ صفر

المصفوفة المربعة

منفردة (أ)	غير منفردة
- ليس لها نظير ضربي	- لها نظير ضربي
- محددها يساوي صفر	- محددها $\neq$ صفر

*** مثال 3** أي المصفوفات التالية منفردة .

أ) $أ = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \\ 7 & 14 & 13 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 11 \\ 5 & 8 & 13 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

الحل / أ) $|أ| = \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9 \times 4 - 3 \times 11 = 36 - 33 = 3 \neq 0$.

$\Leftarrow$ أ مصفوفة غير منفردة .

ب) $|ب| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 8 - 6 \times 4 = 24 - 24 =$ صفر

$\Leftarrow$ ب مصفوفة منفردة .

جـ) $|جـ| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \\ 7 & 14 & 13 \end{vmatrix} = 3(8 \times 13 - 7 \times 14) - 5(4 \times 13 - 7 \times 7)$

$+ 6(4 \times 14 - 8 \times 7) = 3 \neq 0$.

$\Leftarrow$ جـ مصفوفة غير منفردة .

د) $|د| = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 11 \\ 5 & 8 & 13 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 7(8 \times 9 - 3 \times 13) - 4(5 \times 9 - 6 \times 13)$

$+ 11 \times (5 \times 3 - 6 \times 8) =$ صفر

$\Leftarrow$ د مصفوفة منفردة .

أ. هدى فرج

*** مثال (٤) ص ١١٦ من الكتاب الوزاري :-**

جد قيمة س التي تجعل المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & (س+١) \end{bmatrix}$ منفردة.

الحل

$\because$ أ مصفوفة منفردة $\therefore$ $|أ| = $ صفر

$\Leftarrow |أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & (س+١) \end{vmatrix} = $ صفر

$\Leftarrow ٢(س+١) - ٣ \times ٨ = ٠ \Leftarrow ٢س + ٢ - ٢٤ = ٠$

$\Leftarrow ٢س = ٢٢ \Leftarrow \boxed{س = ١١}$

*** خصائص النظير الضربي :-**

إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعتين وغير منفردتين، ومن نفس الرتبة وكان ك عدد حقيقي $\neq ٠$، فإنه :

(١) $(أ^{-١})^{-١} = أ$ (٢) $(ك أ)^{-١} = \frac{١}{ك} (أ^{-١})$

(٣) $(أ.ب)^{-١} = ب^{-١} . أ^{-١}$

*** مثال (5)** أوجد النظير الضربي للمصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل نفرض $أ^{-١} = \begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix}$

$\because أ.أ^{-١} = أ^{-١}.أ = م$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} ٣س+٢ع & ٣ص+٢ل \\ س+٢ع & ص+٢ل \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

من تساوي المصفوفات ينتج أنه

$$٣\text{س} + ٢\text{ع} = ١ \leftarrow (١) \qquad\qquad ٣\text{س} + \cancel{٢\text{ع}} = ١$$

$$\text{س} + ٢\text{ع} = ٠ \xleftarrow{(-١)\times} (٢) \Rightarrow \quad -\text{س} - \cancel{٢\text{ع}} = ٠$$

$$\boxed{\text{س} = \frac{١}{٢}} \Leftarrow ٢\text{س} = ١$$

$$\boxed{\text{ع} = \frac{-١}{٤}} \Leftarrow ٠ = ٢\text{ع} + \frac{١}{٢} \Leftarrow$$

كذلك

$$٣\text{ص} + ٢\text{ل} = ٠ \leftarrow (٣) \qquad\qquad ٣\text{ص} + \cancel{٢\text{ل}} = ٠$$

$$\text{ص} + ٢\text{ل} = ١ \xleftarrow{(-١)\times} (٤) \Rightarrow \quad -\text{ص} - \cancel{٢\text{ل}} = -١$$

$$\boxed{\text{ص} = \frac{-١}{٢}} \Leftarrow ٢\text{ص} = -١$$

$$\frac{١}{٢} + ١ = ٢\text{ل} \Leftarrow ١ = ٢\text{ل} + \frac{-١}{٢} \Leftarrow$$

$$\boxed{\text{ل} = \frac{٣}{٤}} \Leftarrow$$

$$\therefore \text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{٣}{٤} & \frac{-١}{٤} \end{bmatrix}$$

تعميم/ إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \end{bmatrix}$ مصفوفة غير منفردة فإنه

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \begin{bmatrix} -\text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{١١} & -\text{أ}_{١٢} \end{bmatrix}$$

أي أنه/ $\text{أ}^{-١}$ تنتج من ضرب المصفوفة أ بمعكوس محددها بعد تبديل أماكن مدخلات القطر الرئيسي وتغيير إشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة أ.

أ. هدى فرج

* مثال (٦) ص ١١٨ كتاب وزاري :-

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ فجد $س^{-١}$ (إن أمكن)

الحل

$|س| = -٢ - ٦ = -٨ \neq$ صفر (المصفوفة لها نظير ضربي)

$س^{-١} = \frac{١}{-٨} \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{١}{٨} \\ \frac{-١}{٤} & \frac{٣}{٨} \end{bmatrix}$

* قاعدة / إذا كانت ا مصفوفة غير منفردة

$\Leftarrow |ا^{-١}| = \frac{١}{|ا|}$

مثال / إذا كان $|ا| = ٣ \Leftarrow |ا^{-١}| = \frac{١}{٣}$

$|ا| = ٥ \Leftarrow |ا^{-١}| = \frac{١}{٥}$ وهكذا ...

مثال (٧) / إذا كانت ا = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٧ & ٤ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix}$

فأوجد (١) $(ا+ب)^{-١}$

(٢) $(٢ا - ٣ب)^{-١}$

الحل $(ا+ب) = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٧ & ٤ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٥ \\ -٩ & ٨ \end{bmatrix}$

$|ا+ب| = \begin{vmatrix} ٩ & ٥ \\ -٩ & ٨ \end{vmatrix} = ٥ \times -٩ - ٩ \times ٨ = -٤٥ - ٧٢ = \boxed{-١١٧}$

$(ا+ب)^{-١} = \frac{١}{-١١٧} \begin{bmatrix} -٩ & -٩ \\ ٥ & -٨ \end{bmatrix}$

② $(2\text{أ} - 3\text{ب})^{-1}$

الحل/ $2\text{أ} - 3\text{ب} = 2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -5\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}4 & 7\\ 6 & -4\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & -10\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}12 & 21\\ 18 & -12\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-10 & -17\\ -14 & 2\end{bmatrix}$

$|2\text{أ} - 3\text{ب}| = \begin{vmatrix}-10 & -17\\ -14 & 2\end{vmatrix} = -20 - 238 = \boxed{-258}$

$(2\text{أ} - 3\text{ب})^{-1} = \dfrac{1}{-258}\begin{bmatrix}2 & 17\\ 14 & -10\end{bmatrix}$

* حلول تمارين (٣-٤) كتاب وزاري ص ١١٩ *

① فرع (ب) بين أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي.

$\begin{bmatrix}\text{جاس} & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$\boxed{-1 \le \text{جاس} \le 1}$

الحل $\begin{vmatrix}\text{جاس} & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix} = \text{جاس} + 3 \neq 0$

$\Leftarrow \begin{bmatrix}\text{جاس} & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ لها نظير ضربي (غير منفردة)

③ ماقيم ك التي تجعل كلاً من المصفوفات الآتية منفردة ؟!

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{ك} & \text{ك} \\ \text{٢ك} & \text{٤} \end{bmatrix}$$

الحل

أ منفردة إذا كان |أ| = صفر

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{ك} & \text{ك} \\ \text{٢ك} & \text{٤} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

⇐ ٢ك² − ٤ك = ٠

⇐ ٢ك (ك − ٢) = صفر

⇐ ك = صفر أو ك = ٢

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{٤} & \text{ك} \\ \text{ك} & \text{١} \end{bmatrix}$$

ب منفردة إذا كان |ب| = صفر

$$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} \text{٤} & \text{ك} \\ \text{ك} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

⇐ ك² − ٤ = ٠

⇐ ك² = ٤

⇐ ك = ±٢

④ إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{٥} & \text{س} \\ \text{٣} & \text{٢} \end{bmatrix}$ ، وكان |أ⁻¹| = $\frac{١}{٥}$ ، فما قيمة س ؟!

الحل

|أ⁻¹| = $\frac{١}{٥}$ ⇐ |أ| = ٥

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{٥} & \text{س} \\ \text{٣} & \text{٢} \end{vmatrix} = \text{٣س} - \text{١٠} = \text{٥}$$

⇐ ٣س = ١٥

⇐ $\boxed{\text{س} = \text{٥}}$

أ. هدى فرج

(٣) إذا كانت $\text{م} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ نجد (أ) (م^{-1}) أي معكوس (ب) $(\text{م}^{-1})^{-1}$

الحل (أ)

$$|\text{م}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$$

$$\text{م}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ب) $$|\text{م}^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \times 2 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(\text{م}^{-1})^{-1} = \frac{1}{|\text{م}^{-1}|}\begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}\begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \text{م}$$

أ. هدى فرج

٥) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -٣ & س \\ ص & ١ \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^{-١}| = |أ|$ فما قيمة/قيم المقدار (س ص) ؟

الحل/ $\because |أ| = |أ^{-١}| \Leftarrow |أ| = \frac{١}{|أ|}$

$\Leftarrow |أ|^٢ = ١$

$\Leftarrow (س ص + ٣)^٢ = ١$

$\Leftarrow (س ص)^٢ + ٦ س ص + ٩ = ١$

$\Leftarrow (س ص)^٢ + ٦ س ص + ٨ = ٠$

$(س ص + ٤)(س ص + ٢) = ٠$

إما $س ص = -٤$ ، $س ص = -٢$

٦) إذا علمت أنه $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ وكانت

$أ . ج = ب$ ، نجد $ج^{-١}$

الحل $أ . ج = ب$

$أ^{-١} . أ . ج = أ^{-١} ب$

$م ج = أ^{-١} ب$

$\Leftarrow ج = أ^{-١} ب$

$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٢ - ١٢ = -١٠$

$أ^{-١} = \frac{١}{-١٠} \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}$

$ج = \frac{-١}{١٠} \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

$ج = \frac{-١}{١٠} \begin{bmatrix} -٦ & -٥ \\ -٨ & -٥ \end{bmatrix}$

$ج = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{١}{٢} \\ \frac{٤}{٥} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

أ. هدى فرج

$$|ج| = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

$$ج^{-1} = \frac{1}{|ج|} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= 10 \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

(٧) إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعتين وكانت أ مصفوفة غير منفردة بحيث أ.ب = أ.جـ فأثبت أن ب = جـ ، بحيث جـ مصفوفة

الحل أ مصفوفة غير منفردة ⟸ $أ^{-1}$ موجودة.

أ.ب = أ.جـ ($\times أ^{-1}$ من اليمين للطرفين)

$أ^{-1}$.أ.ب = $أ^{-1}$.أ.جـ ($أ^{-1}أ = م$)

م ب = م جـ ⟸ ب = جـ #

أ. هدى فرج

تمارين/ حل المعادلات المصفوفية التالية :-

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - 3\text{م}_2 = \text{ص} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \text{ص} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \text{ص} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad \text{ص} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{أ}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}}_{\text{ب}}$$

$$\text{ص} \cdot \text{أ} = \text{ب} \qquad (\times\ \text{أ}^{-1}\ \text{للطرفين من اليسار})$$

$$\text{ص} \cdot \text{أ} \cdot \text{أ}^{-1} = \text{ب} \cdot \text{أ}^{-1}$$

$$\text{ص} = \text{ب} \cdot \text{أ}^{-1}$$

$$|\text{أ}| = 4$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ص} = \text{ب} \cdot \text{أ}^{-1}$$

$$\text{ص} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ص} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 24 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ص} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 6 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

أ. هدى فرج

* **حاولي/** إذا كانت $\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ، $\text{أ ب} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

أوجد ب

الحل $\text{أ ب} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{أ}^{-1} . \text{أ} . \text{ب} = \text{أ}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{ب} = \text{أ}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ -3 & 18 \end{bmatrix}$

حاولي/ إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $(\text{أ ب})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

أوجد ب^{-1}

الحل $(\text{أ ب})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\text{ب}^{-1} \text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\text{ب}^{-1} . \text{أ}^{-1} . \text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} . \text{أ}$

$\text{ب}^{-1} \text{م} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{ب}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

أ. هدى فرج

أثبت أن / (أ) إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وغير منفردة ، ك عدد حقيقي لا يساوي صفراً فأثبت أن $(\text{ك أ})^{-1} = \frac{1}{\text{ك}}(\text{أ}^{-1})$

البرهان

افرض أن $(\text{ك أ})^{-1} = \text{س}$ (اضرب الطرفين من اليمين في (ك أ))

$(\text{ك أ})(\text{ك أ})^{-1} = \text{ك أ س}$

$\text{م} = \text{ك أ س}$ (اضرب الطرفين في أ^{-1} من اليمين)

$\text{أ}^{-1}\text{م} = \text{أ}^{-1} = \text{أ}^{-1}\text{ك أ س}$

$\Leftarrow \text{أ}^{-1} = \text{ك أ}^{-1}\text{أ س}$

$\Leftarrow \text{أ}^{-1} = \text{ك س} \Leftarrow \text{س} = \frac{1}{\text{ك}}(\text{أ}^{-1})$

$\Leftarrow (\text{ك أ})^{-1} = \frac{1}{\text{ك}}(\text{أ}^{-1})$ #

(ب) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية وغير منفردتين فأثبت أن $(\text{أ ب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\text{أ}^{-1}$

البرهان نفرض أن $(\text{أ ب})^{-1} = \text{س}$

(نضرب الطرفين في (أ ب) من اليمين)

$(\text{أ ب})(\text{أ ب})^{-1} = \text{أ ب س}$

$\Leftarrow \text{م} = \text{أ ب س}$

(اضرب الطرفين في أ^{-1} من اليمين)

$\text{أ}^{-1}\text{م} = \text{أ}^{-1}\text{أ ب س}$

$\Leftarrow \text{أ}^{-1} = \text{م ب س} = \text{ب س}$

(اضرب الطرفين في ب^{-1})

$\text{ب}^{-1}\text{أ}^{-1} = \text{ب}^{-1}\text{ب س}$

$\text{ب}^{-1}\text{أ}^{-1} = \text{م س} = \text{س}$

$\text{ب}^{-1}\text{أ}^{-1} = (\text{أ ب})^{-1}$ #

أ. هدى فرج

حلول أسئلة اختبارات وأسئلة إضافية

{ درس النظير الضربي للمصفوفة المربعة }

* القسم الأول/ اختر الإجابة الصحيحة لكل من الأسئلة التالية :-

س١: إذا كانت أ، ب، جـ ثلاث مصفوفات مربعة غير منفردة وكان أ × ب = جـ فأي المصفوفات التالية تمثل ب$^{-1}$ ؟!

الحل أ × ب = جـ (اضرب في جـ$^{-1}$ من اليمين للطرفين)

جـ$^{-1}$ أ ب = جـ$^{-1}$ جـ

جـ$^{-1}$ أ ب = م (اضرب في ب$^{-1}$ للطرفين من اليسار).

جـ$^{-1}$ أ ب ب$^{-1}$ = م ب$^{-1}$ ⟸ جـ$^{-1}$ أ م = ب$^{-1}$ ⟸ جـ$^{-1}$ أ = ب$^{-1}$ فرع (أ)

س٢: إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٣×٣ وكان |أ| = -٢ فما قيمة

$\left|\left(\frac{1}{2}\text{أ}\right)^{-1}\right|$

الحل $\left|\left(\frac{1}{2}\text{أ}\right)^{-1}\right| = \left|2(\text{أ})^{-1}\right| = 2^3\left|\text{أ}^{-1}\right| = 8 \times \frac{1}{|\text{أ}|} = 8 \times \frac{-1}{2}$

$= -4$ فرع (ب)

س٣: إذا كانت ص = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \text{جـ} \end{bmatrix}$ ، ص$^{-1}$ = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ فما قيمة الثابت جـ ؟!

الحل ∵ ص ص$^{-1}$ = م

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \text{جـ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2-\text{جـ} & -1+\text{جـ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

⟸ ٢ - جـ = ٠

⟸ $\boxed{\text{جـ} = 2}$

وكذلك -١ + جـ = ١ ⟸ $\boxed{\text{جـ} = 2}$

أ. هدى فرج

٢٠١٠ | ما قيمة س التي تجعل من المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{جاس} & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة

علماً أنه س ∈ $[0 \text{ ، } \frac{3\pi}{2}]$

الحل

∵ المصفوفة منفردة ← محددها = صفر

$\begin{vmatrix} \text{جاس} & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ = صفر ← ٢جاس + ١ = ٠

← ٢جاس = -١ ← جاس = $\frac{-1}{2}$

جا سالبة في الربع الثالث والرابع   Shift Sin $\frac{1}{2} = 30^\circ$

في الربع الثالث	في الربع الرابع
س = ٣٠ + ١٨٠ = ٢١٠°	س = ٣٦٠ - ٣٠ = ٣٣٠°
∈ $[0 \text{ ، } \frac{3\pi}{2}]$	∉ $[0 \text{ ، } \frac{3\pi}{2}]$

فقيم س هي {٢١٠°}

٢٠١٠ دورة ثانية | إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{س} & 1 \\ \text{س}+4 & 4 \end{bmatrix}$ ، $أ^{-1}$ = $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ \text{س}-5 & 1 \end{bmatrix}$

فما قيمة س ؟!

الحل أ $أ^{-1}$ = م

$\begin{bmatrix} \text{س} & 1 \\ \text{س}+4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ \text{س}-5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \text{٢س + س - ٥} & 0 \\ 0 & \text{-}\frac{1}{2}\text{س - ٢ + ٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

٣س - ٥ = ١

← ٣س = ٦

← $\boxed{\text{س} = 2}$ فرع ب

٢٠٢٠ دورة ثانية

إذا كانت س ، ص مصفوفتان غير منفردتان من الرتبة ن×ن حيث $|٢س ص^{-١}| = ٨$ ، $|س| = ٣$ ، $|ص| = ١٢$ ، فما قيمة ن ؟!

الحل

$|٢س ص^{-١}| = ٨$

$٢^ن |س| |ص^{-١}| = ٨$

$٢^ن \times ٣ \times \frac{١}{١٢} = ٨$

$\Leftarrow ٢^ن \times \frac{١}{٤} = ٨$

$\Leftarrow ٢^ن = ٣٢$

$\Leftarrow ٢^ن = ٢^٥ \Leftarrow ن = ٥$

فرع (ج)

٢٠١٩ دورة ثانية

إذا كانت $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$ فما يساوي المقدار $(أب)^{-١}$

الحل

$(أب)^{-١} = ب^{-١} أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -١٣ & -٢ \end{bmatrix}$ فرع (ج)

٢٠١٩ صيفي

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة ، فأي مما يلي لا يمكن إيجاده ؟!

الحل

أ) $|أ^{-١}|$ ← يمكن إيجادها إذا كان للمصفوفة أ نظير ضربي.

ب) $|أ + ب|$ ← لا يمكن إيجادها لأن $أ_{٢\times٢}$ ، $ب_{٣\times٣}$ (×)

ج) $|٢ب|$ ← يمكن إيجادها.

د) $|أ| + |ب| + ٦$ ← يمكن إيجادها.

أ. هدى فرج

* إضافي ص ١١٢ دليل تقويم الطالب :-

جميع المصفوفات لها معكوس ضربي ماعدا المصفوفة

الحل: مصفوفة لها معكوس ضربي ⟸ محددها ≠ صفر

أ) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٤ - ٦ = -٢ ≠ صفر (لها نظير)

ب) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = ١ - ٠ = ١ ≠ صفر (لها نظير)

ج) $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = ٥ - ٤ = ١ ≠ صفر (لها نظير)

د) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix}$ = ٦ - ٦ = صفر (ليس لها نظير) فرع د

* إضافي ص ١١٢ دليل تقويم الطالب :-

أ مصفوفة من الرتبة م × ن ، فإن إحدى العبارات التالية صحيحة :-

أ) للمصفوفة أ نظير ضربي (×) لأنه المصفوفة المربعة فقط هي التي لها نظير ضربي.

ب) يمكن إيجاد المصفوفة أ × أ (×) أ م×ن ــــ أ م×ن

ج) يمكن تنفيذ العملية ٤ + أ (×) عملية غير معروفة

د) للمصفوفة أ نظير جمعي (✓) لكل مصفوفة مهما اختلفت رتبتها نظير جمعي.

أ. هدى فرج

* إضافي دليل تقويم الطالب ص ١١٢ :-

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٧- \\ ١٧ & ٤٦- \end{bmatrix}$ وكان $أ \times جـ = ب$

فإن جـ تساوي :

الحل

$أ \times جـ = ب$

$أ^{-١} أ جـ = أ^{-١} ب$

$م جـ = أ^{-١} ب$

$\boxed{جـ = أ^{-١} ب}$

$|أ| = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ٦ - ٢٥$
$= \boxed{-١٩}$

$أ^{-١} = \frac{١}{-١٩} \begin{bmatrix} ٥- & ٣ \\ ٢ & ٥- \end{bmatrix}$

$جـ = \frac{١}{-١٩} \begin{bmatrix} ٥- & ٣ \\ ٢ & ٥- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٧- \\ ١٧ & ٤٦- \end{bmatrix}$

$جـ = \begin{bmatrix} ٤ & ١١- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ فرع (ب)

* إضافي دليل تقويم الطالب ص ١١٣ :-

قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & س-١ \\ س+١ & ٤ \end{bmatrix}$ منفردة هي :-

الحل المصفوفة منفردة ← محددها = صفر

$\begin{vmatrix} ٢ & س-١ \\ س+١ & ٤ \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow (س-١)(س+١) - ٨ = ٠$

$س^{٢} - ١ - ٨ = ٠ \Leftarrow س^{٢} = ٩$

$\Leftarrow س = \pm ٣$ فرع (ج)

أ. هدى فرج

* إضافي ص ١١٣ دليل تقويم الطالب :-

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين من الرتبة الثانية

فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً :-

أ) $|أ . ب| = |ب| \, |أ|$ ✓

ب) $|ب . أ^{-1}| = \frac{|ب|}{|أ|}$ ✓ والسبب / $|ب . أ^{-1}| = |ب| \, |أ^{-1}| = |ب| \times \frac{1}{|أ|}$

$= \frac{|ب|}{|أ|}$

ج) $|\frac{1}{3} أ| = \frac{1}{9} |أ|$ ✓

د) جميع ما سبق ←

* إضافي ص ١١٣ دليل تقويم الطالب :-

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -3 & س \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ ، $أ^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & س \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ فإن قيمة س

الحل

$\because$ $أ . أ^{-1} = م$

$$\begin{bmatrix} -3 & س \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & س \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -15 + 4س & 0 \\ 0 & 4س - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow -15 + 4س = 1$

$\Leftarrow 4س = 1 + 15$

$\Leftarrow \boxed{س = 4}$ فرع (ج)

أ. هدى فرج

إضافي ص ١١٣ دليل تقويم الطالب

إذا كانت $٢أ = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -14 & 6 \end{bmatrix}$ فإن $أ^{-1} =$ ؟

الحل $أ = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -14 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

$|أ| = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -15 + 14 = -1$

$أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ فرع (ج)

* إضافي دليل تقويم الطالب ص ١١٣ : المصفوفة المنفردة من بين المصفوفات التالية :

(أ) $\begin{bmatrix} س & -1 \\ 1 & س \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} س & -1 \\ 1 & س \end{vmatrix} = س^2 + 1 \neq 0$ (غير منفردة)

(ب) $\begin{vmatrix} جاس & جتاس \\ -جتاس & جاس \end{vmatrix} = جا^2س + جتا^2س = 1 \neq 0$. (غير منفردة).

(ج) $\begin{vmatrix} 1 & قا^2س \\ 1 & ظا^2س + 1 \end{vmatrix} = ظا^2س + 1 - قا^2س$

$= قا^2س - قا^2س = صفر$ (منفردة) ✓

(د) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6 \neq صفر$ (غير منفردة)

أ. هدى فرج

* القسم الثاني/ أجب عن الأسئلة التالية:-

٢٠٢٠

إذا كان م = $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٨ \\ ٩ \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة جـ

بحيث أن م جـ = ب ـ جـ

الحل/ م جـ = ب ـ جـ

م جـ + جـ = ب

(م + م) جـ = ب

$\left(\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \right)$ جـ = ب

$\underbrace{\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}}_{س}$ جـ = ب

س . جـ = ب

$س^{-1}$ س . جـ = $س^{-1}$ ب

جـ = $س^{-1}$ ب

|س| = $\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix}$ = ١٥

$س^{-1} = \frac{١}{١٥} \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

جـ = $س^{-1}$ ب

$= \frac{١}{١٥} \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٨ \\ ٩ \end{bmatrix}$

٢×٢ ٢×١

جـ = $\frac{١}{١٥} \begin{bmatrix} ١٥ \\ ٤٥ \end{bmatrix}$

جـ = $\begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \end{bmatrix}$ #

٢٠٢٠ دورة ثانية

إذا كانت م = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب^{-1} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٤ & -٨ \end{bmatrix}$ أوجد $(م ب)^{-1}$ + ٢م

الحل $(م ب)^{-1}$ + ٢م = $ب^{-1} م^{-1}$ + ٢م

|م| = $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٦ ـ ٤ = ٢

$م^{-1} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

$ب^{-1} م^{-1}$ + ٢م

$= \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٤ & -٨ \end{bmatrix} \times \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

$= \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ١٦ & -٢٠ \\ ٢٠ & -٣٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

أ. هدى فرج

$= \begin{bmatrix} ٨ & -١٠ \\ ١٠ & -١٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & -٢ \\ ١٢ & -١٠ \end{bmatrix}$

س١٩: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٣ & -٤ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ أوجد

① المصفوفة $أ^{-١} . ب - ٢٤ م_٢$ ② $|\frac{١}{٣} ب^٢|$

الحل ① $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} = ٦ - ٥ = ١$

$أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \Leftarrow أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

$أ^{-١} . ب - ٢٤ م_٢$

$\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ & -٤ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix} - ٢٤ \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} ٢٤ & ٣٧ \\ ١٥ & ٢٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢٤ & ٠ \\ ٠ & -٢٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣٧ \\ ١٥ & -١ \end{bmatrix}$ ✓

② $|\frac{١}{٣} ب^٢| = (\frac{١}{٣})^٢ |ب^٢| = \frac{١}{٩} |ب|^٢$

$|ب| = \begin{vmatrix} -٣ & -٤ \\ ٦ & ٩ \end{vmatrix} = -٢٧ + ٢٤ = -٣$

$\Leftarrow |\frac{١}{٣} ب^٢| = \frac{١}{٩} \times (-٣)^٢ = ١$ ✓

أ. هدى فرج

إضافي دليل تقويم الطالب ص ١١٤ :-

إذا كان $\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\text{أ ب} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$ أوجد $\text{ب}^{-١}$

الحل

$\text{أ ب} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

$\text{أ}^{-١}\,\text{أ ب} = \text{أ}^{-١} \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

$\text{ب} = \text{أ}^{-١} \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

$\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

$\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = -٣ + ٢$
$= -١$

$\text{ب}^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

$\text{ب}^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$

إضافي دليل تقويم الطالب ص ١١٤ :-

إذا كان $(\text{أ ب})^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ أوجد ب !!

الحل

$(\text{أ ب})^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

$\text{ب}^{-١}\,\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

$\text{ب}^{-١}\,\text{أ}^{-١}\,\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \text{أ}$

$\text{ب}^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

$\text{ب}^{-١} = \begin{bmatrix} ٦ & -٤ \\ ٧ & -٤ \end{bmatrix}$

لإيجاد ب نوجد النظير الضربي لـ $\text{ب}^{-١}$ حيث $(\text{ب}^{-١})^{-١} = \text{ب}$

$|\text{ب}^{-١}| = ٦ \times -٤ - -٤ \times ٧$
$= -٢٤ + ٢٨ = ٤$

$(\text{ب}^{-١})^{-١} = \text{ب} = \frac{١}{٤} \begin{bmatrix} -٤ & ٤ \\ -٧ & ٦ \end{bmatrix}$

#

أ. هدى فرج

* إضافي دليل تقويم الطالب ص115 :-

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

برهن أن س ص = 2ع$^{-1}$

الإثبات/ س ص = $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ← 1

|ع| = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ = 4 − 2 = 2

ع$^{-1}$ = $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2ع$^{-1}$ = $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ← 2 ، من 1 ، 2 ينتج أن س ص = 2ع$^{-1}$

#

* إضافي دليل تقويم الطالب ص115 :-

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين غير منفردتين وكان أ ب = ب أ أثبت أن

$\boxed{\text{أ}^{-1}\,\text{ب} = \text{ب}\,\text{أ}^{-1}}$ ؟!

الحل أ ب = ب أ (نضرب في أ$^{-1}$ للطرفين من اليمين)

أ$^{-1}$ أ ب = أ$^{-1}$ ب أ

ب = أ$^{-1}$ ب أ (نضرب في أ$^{-1}$ للطرفين من اليسار).

ب أ$^{-1}$ = أ$^{-1}$ ب أ أ$^{-1}$

$\boxed{\text{ب}\,\text{أ}^{-1} = \text{أ}^{-1}\,\text{ب}}$ #

أ. هدى فرج

أسئلة إثرائية على درس

{ النظير الضربي للمصفوفة المربعة }

① إذا كانت س، ص = ص، س = م حيث س، ص مصفوفتان مربعتان من نفس الرتبة فإن العبارة الصحيحة دائماً فيما يلي:

(أ) $س^{-1} = ص$ ✓ (ب) ص مصفوفة منفردة (ج) س = ص

(د) س = −ص

② إذا كان $(٣س)^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ فاقيمة $س_{١٢}$ = ؟؟

(أ) ٣- (ب) ٢ (ج) ١ (د) $\frac{١}{٣}$

الحل: $((٣س)^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}^{-1}$

$٣س = \frac{١}{٩-} \begin{bmatrix} ٣- & ٦ \\ ٣ & ٩- \end{bmatrix}$ ⇐ $س = \frac{١}{٢٧-} \begin{bmatrix} ٣- & ٦ \\ ٣ & ٩- \end{bmatrix}$

⇐ $س = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٢٧} & \frac{٦-}{٢٧} \\ \frac{٣-}{٢٧} & \frac{٩}{٢٧} \end{bmatrix}$ ⇐ $س_{١٢} = \frac{٩}{٢٧} = \frac{١}{٣}$

③ إذا كانت أ، ب مصفوفتان من الرتبة الثانية فأي مما يلي لا يمكن إيجاده دائماً

(أ) |أ+ب| (ب) $(أ \times ب)^{-1}$ (ج) |أ| + |ب| + ٤

(د) |٢ب| − |أ|

← حيث (أ×ب) مصفوفة قد تكون منفردة ليس لها نظير.

أ. هدى فرج

④ إذا كانت س ، ص ، ع مصفوفات من الرتبة الثانية ، |ع| ≠ صفر

فما العبارة الصحيحة دائماً فيما يلي ؟

أ) إذا كان س ص = ص ع فإن س = ع (X) خاصية الاختزال غير متحققة

ب) إذا كانت س ص = و$_2$ فإن س = و$_2$ أو ص = و$_2$ (X) لا إلا إذا كانت ص مصفوفة غير منفردة (لها نظير ضربي)

حيث يمكن أن يكون س ص = و لكن س ≠ و وكذلك ص ≠ و.

ج) س^2 - ص^2 = (س - ص)(س + ص) (X)

د) |(٢ع)$^{-1}$| = $\frac{1}{4|ع|}$ (✓)

السبب/ |(٢ع)$^{-1}$| = |$\frac{1}{2}$(ع)$^{-1}$| = $\frac{1}{4}$|ع$^{-1}$| = $\frac{1}{4}$ × $\frac{1}{|ع|}$

= $\frac{1}{4|ع|}$

⑤ إذا كان أ ، ب مصفوفتان مربعتان غير صفريتان بحيث أن

أ.ب = و ، أثبت أن إحدى المصفوفتين على الأقل ليس لها

نظير ضربي.

الحل أ.ب = و

⟸ |أ.ب| = |و|

⟸ |أ| |ب| = |و|

⟸ |أ|.|ب| = صفر

⟸ إما |أ| = صفر أو |ب| = صفر

أي أنه على الأقل المصفوفة أ

أو المصفوفة ب ليس لها نظير (منفردة).

أ. هدى فرج

⑥ إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين فإن إحدى العبارات الآتية صحيحة:

أ) $|\tfrac{1}{2}\text{أ}| = \tfrac{1}{4}|\text{أ}|$ ب) $|\text{ب} \times \text{أ}^{-1}| = \dfrac{|\text{ب}|}{|\text{أ}|}$ جـ) $|\text{أ} + \text{ب}| = |\text{أ}| + |\text{ب}|$

د) أ، ب معاً

⑦ جد المصفوفة س من الرتبة الثانية حيث $|\text{س}| = \tfrac{1}{2}$ وتحقق

المعادلة $\text{س} + \text{س}^{-1} = \begin{bmatrix} 2\tfrac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

الحل: نفرض المصفوفة $\text{س} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$

$$\text{س}^{-1} = \frac{1}{|\text{س}|}\begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{س}^{-1} = 2\begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\text{د} & -2\text{ب} \\ -2\text{جـ} & 2\text{أ} \end{bmatrix}$$

$$\because \text{س} + \text{س}^{-1} = \begin{bmatrix} 2\tfrac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\text{د} & -2\text{ب} \\ -2\text{جـ} & 2\text{أ} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\tfrac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} \text{أ}+2\text{د} & \text{ب}-2\text{ب} \\ \text{جـ}-2\text{جـ} & \text{د}+2\text{أ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\tfrac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$-\text{ب} = -1 \Leftarrow \boxed{\text{ب} = 1}$

كذلك $-\text{جـ} = 0 \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = 0}$

$\text{أ} + 2\text{د} = 2\tfrac{1}{2} \rightarrow ①$

$2\text{أ} + \text{د} = 2 \rightarrow ② \; (\times -2)$

من ①، ② ينتج أن

$\boxed{\text{أ} = \tfrac{1}{2}}$

$\boxed{\text{د} = 1}$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(٨) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين غير منفردتين من الرتبة ن × ن

وكان $(\text{أ}^{-1} \times \text{ب})^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ وكانت $\text{ب} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

أوجد أ − ٣ب

الحل

$(\text{أ}^{-1} \times \text{ب})^{-1} = \text{ب}^{-1} \times (\text{أ}^{-1})^{-1} = \text{ب}^{-1}\text{أ} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \text{ب}\,\text{ب}^{-1}\text{أ} = \text{ب} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \text{أ} = \text{ب} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Leftarrow \text{أ} = \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -27 & 10 \end{bmatrix}$

$\therefore \text{أ} - 3\text{ب} = \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -27 & 10 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -27 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -12 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -15 & -11 \end{bmatrix}$

(٩) إذا كانت $\text{س} = \begin{bmatrix} \text{أ} & 3 \\ \text{ب} & \text{جـ} \end{bmatrix}$ وكان $\text{س}^{-1} = \text{س}$ ، جد قيمة أ + جـ

الحل

$\text{س}^{-1} = \text{س}$

$\Leftarrow \text{س} \times \text{س}^{-1} = \text{س} \times \text{س}$

$\text{م} = \text{س} \times \text{س}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ} & 3 \\ \text{ب} & \text{جـ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{أ} & 3 \\ \text{ب} & \text{جـ} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ}^2 + 3\text{ب} & 3\text{أ} + 3\text{جـ} \\ \text{أب} + \text{ب جـ} & 3\text{ب} + \text{جـ}^2 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow 3\text{أ} + 3\text{جـ} = 0$

$\Leftarrow 3(\text{أ} + \text{جـ}) = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{أ} + \text{جـ} = \text{صفر}$ #

أ. هدى فرج

(15) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} \text{س} & -3 \\ 1 & \text{ص} \end{bmatrix}$ وكان $|أ^{-1}| = |أ|$ فما قيمة المقدار س ص ؟

الحل $|أ^{-1}| = |أ|$

$\frac{1}{|أ|} = \frac{|أ|}{1}$

$|أ|^2 = 1$

$\Leftarrow |أ| = \pm 1$

$|أ| = \begin{vmatrix} \text{س} & -3 \\ 1 & \text{ص} \end{vmatrix}$

$= \text{س ص} + 3$

عندما $|أ| = +1$

$\text{س ص} + 3 = 1$

$\Leftarrow \text{س ص} = -2$

عندما $|أ| = -1$

$\text{س ص} + 3 = -1$

$\Leftarrow \text{س ص} = -4$

$\therefore \text{س ص} = -2$ ، -4

(11) إذا كانت $\text{س}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ جد المصفوفة ع حيث $\text{س ع}^{-1} = \text{ص}$

الحل $\text{س ع}^{-1} = \text{ص}$

$\text{س}^{-1}\text{س ع}^{-1} = \text{س}^{-1}\text{ص}$

$\text{ع}^{-1} = \text{س}^{-1}\text{ص}$

$\text{ع}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \text{ع}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\text{ع} = (\text{ع}^{-1})^{-1}$

$|\text{ع}^{-1}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$(\text{ع}^{-1})^{-1} = \frac{1}{|\text{ع}^{-1}|} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$(\text{ع}^{-1})^{-1} = \text{ع} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

أ. هدى فرج

(١٢) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب المصفوفة $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

جد المصفوفة س بحيث (٢ س أ)$^{-١}$ = ب

الحل (٢ س أ)$^{-١}$ = ب

((٢ س أ)$^{-١}$)$^{-١}$ = ب$^{-١}$

٢ س أ = ب$^{-١}$

٢ س أ أ$^{-١}$ = ب$^{-١}$ أ$^{-١}$

٢ س = ب$^{-١}$ أ$^{-١}$

س = $\frac{١}{٢}$ (أ ب)$^{-١}$

أ ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

← |أ ب| = ٣

(أ ب)$^{-١}$ = $\frac{١}{٣}$ $\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$

س = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٣}$ $\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$

= $\frac{١}{٦}$ $\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$

(١٣) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين من الرتبة الثانية

بحيث كان |أ ب| = ١٨ ، |أ| + |ب| = ١١ ، |أ| > |ب| فما |٢أ| = ؟

الحل |أ ب| = ١٨ ← |أ| × |ب| = ١٨ ← (١)

|أ| + |ب| = ١١ ← |أ| = ١١ − |ب| ← (٢)

نعوض من (٢) في (١) ينتج

(١١ − |ب|) |ب| = ١٨

١١ |ب| − |ب|^{٢} − ١٨ = صفر

← |ب|^{٢} − ١١ |ب| + ١٨ = ٠

← (|ب| − ٩) (|ب| − ٢) = ٠

← |ب| = ٩ ، |ب| = ٢

← |أ| = ١١ − ٩ = ٢ ، |أ| = ١١ − ٢ = ٩

× مرفوض

← |٢أ| = ٤ |أ| = ٤ × ٢ = ٨ (٦)

أ. هدى فرج

(١٤) إذا كانت س مصفوفة من الرتبة الثانية جد المصفوفة $(س + س^{-1})$

علماً بأنه:

$$\left(س \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\right)^{-1} + س \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \times س^{-1} + س \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \times س^{-1} + س \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \left(س^{-1} + س\right) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$س^{-1} + س = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$س^{-1} + س = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ س^{-1} + س = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 26 & 16 \end{bmatrix}$$

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درس النظير الضربي للمصفوفة المربعة

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

* اختبار درس النظير الضربي للمصفوفة المربعة *

(١) إذا كانت $ص^{-1} = ٢س$ حيث س ، ص مصفوفتان مربعتان من الرتبة الثانية فإن $|س ص|$

أ) ٤ ب) -٤ جـ) $\frac{١}{٤}$ د) $-\frac{١}{٤}$

(٢) إذا كانت أ ، ب مصفوفتان مربعتان من نفس الرتبة فأي العبارات التالية صحيحة دائماً.

أ) إذا كانت أ ، ب غير صفريتين فإن أ × ب مصفوفة غير صفرية.

ب) إذا كانت أ ، ب منفردتين فإن أ × ب مصفوفة منفردة.

جـ) $(٣ أ ب)^{-1} = ٣ ب^{-1} أ^{-1}$

د) إذا كان أ ب = أ جـ فإن ب = جـ

(٣) إذا كانت $(\frac{١}{٢} ب)^{-1} = \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ فإن $ب^{-1} =$

أ) $\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٤) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{هـ} & ٠ \\ ١ & -\text{هـ} \end{bmatrix}$ فإن قيمة $\text{لو}_{\text{هـ}} |أ^{-1}|$

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) -٤ جـ) ٢ د) -٢

٥) إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكان $|أ^{-1}| = ٢$

، $|(ل+١)\,أ| = ٨$ فإن قيمة / قيم ل = ؟

أ) ل = -٣ ، ٥ ب) ل = -٣ ، -٥ جـ) ل = -٥ ، ٣ د) ل = ±٣

٦) إذا كانت $أ^{-1} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ فإن $(٢أ)^{-1}$ =

أ) $\begin{bmatrix} ٤ & \frac{٣}{٢} \\ \frac{١١}{٢} & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & -\frac{٣}{٢} \\ -\frac{١١}{٢} & ٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} -٤ & \frac{١١}{٢} \\ \frac{٣}{٢} & -٢ \end{bmatrix}$ د) ٢أ

٧) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & \text{ظاس} \\ \text{ظاس} & -١ \end{bmatrix}$ فإن $أ^{-1}$ = ؟

أ) $\begin{bmatrix} \text{جتا}^{٢}\text{س} & \frac{١}{٢}\text{جا٢س} \\ -\frac{١}{٢}\text{جا٢س} & -\text{جتا}^{٢}\text{س} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -\text{جتا}^{٢}\text{س} & \frac{١}{٢}\text{جا٢س} \\ \frac{١}{٢}\text{جا٢س} & \text{جتا}^{٢}\text{س} \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} -\text{جتا}^{٢}\text{س} & -\frac{١}{٢}\text{جا٢س} \\ -١ & -\text{جتا}^{٢}\text{س} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} \text{جتا}^{٢}\text{س} & -١ \\ -\frac{١}{٢}\text{جا٢س} & \text{جتا}^{٢}\text{س} \end{bmatrix}$

(٨) إذا كانت أ، ب، جـ مصفوفات بحيث أب $= (٢جـ)^{-1}$ فإن

$\left(\frac{١}{٢}\left(أب + (٢جـ)^{-1}\right)\right)^{-1} =$

(أ) $أ^{-1} ب^{-1}$ (ب) $م_٢$ (جـ) $ب^{-1} أ^{-1}$ (د) $١٢ م_٢$

(٩) إذا كان $(أ + أ \times ب)^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $أ^{-1} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

حيث أ + أب مصفوفة غير منفردة فإن ب =

(أ) $\begin{bmatrix} -٢ & ٦ \\ -٧ & ١٨ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٧ & -١٨ \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} ١٨ & ٢ \\ -٦ & -٧ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٧ & -١٨ \end{bmatrix}$

(١٠) إذا كانت أ مصفوفة مربعة غير منفردة من الرتبة الثانية وكان

$|-٢أ^{-1}| = ٨$ فما قيمة $|أ أ^{-1}|$ ؟؟

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) -١ (د) صفر

أ. هدى فرج

حلول أسئلة اختبار درس

* النظير الضربي للمصفوفة المربعة *

① $ص^{-1} = ٢س$

$\Leftarrow ص\,ص^{-1} = ٢\,س\,ص$

$\Leftarrow م = ٢\,س\,ص \quad \Leftarrow \frac{١}{٢}م = س\,ص \quad \Leftarrow \left|\frac{١}{٢}م\right| = |س\,ص|$

$\Leftarrow |س\,ص| = \frac{١}{٤}|م|$

$= \frac{١}{٤}(١) = \frac{١}{٤}$ فرع ج

② فرع ب

③ $\left(\frac{١}{٢}ب\right)^{-1} = ٢ب^{-1} = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \Leftarrow ب^{-1} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ب^{-1} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فرع ج

④ $|أ| = هـ^{٢}$

$أ^{-1} = \frac{١}{هـ^{٢}}\begin{bmatrix} -هـ & ١ \\ ٠ & هـ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{هـ} & \frac{١}{هـ^{٢}} \\ ٠ & \frac{١}{هـ} \end{bmatrix}$

$|أ^{-1}| = \frac{١}{هـ^{٢}} \times ٠ + \frac{١}{هـ^{٢}} = \frac{١}{هـ^{٢}}$

$\therefore لو_{هـ}|أ^{-1}| = لو_{هـ}\frac{١}{هـ^{٢}} = لو_{هـ}هـ^{-٢} = -٢$ فرع د

أ. هدى فرج

⑤ $8 = |م(1+ل)| \Leftarrow 8 = |م|(1+ل)^2$

$\Leftarrow 8 = \frac{1}{|م^{-1}|} \times (1+ل)^2$

$\Leftarrow 8 = \frac{1}{2} \times (1+ل)^2$

$\Leftarrow 16 = (1+ل)^2$

$\Leftarrow ل^2 + 2ل + 1 = 16$

$\Leftarrow ل^2 + 2ل - 15 = 0 \Leftarrow (ل+5)(ل-3) = 0$

$\Leftarrow ل = -5$ ، $ل = 3$ فرع (جـ)

⑥ $(2م^2)^{-1} = \frac{1}{2}(م^2)^{-1} = \frac{1}{2}(م \times م)^{-1} = \frac{1}{2} م^{-1} \times م^{-1}$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ 2 & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$

فرع (أ)

⑦ $|م| = ظا^2س + 1 = قا^2س$

$م^{-1} = \frac{1}{قا^2س}\begin{bmatrix} ظاس & -1 \\ 1 & ظاس \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ظاس}{قا^2س} & \frac{-1}{قا^2س} \\ \frac{1}{قا^2س} & \frac{ظاس}{قا^2س} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{جاس}{جتاس} \times جتا^2س & -جتا^2س \\ جتا^2س & \frac{جاس}{جتاس} \times جتا^2س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}جا2س & -جتا^2س \\ جتا^2س & \frac{1}{2}جا2س \end{bmatrix}$

⑤

أ. هدى فرج

$1 + \text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س}$

$\text{جاس جتاس} = \frac{1}{2}\,\text{جا}٢\text{س}$

$\frac{1}{\text{قا}^2\text{س}} = \text{جتا}^2\text{س}$

(٧) ← فرع (ب)

في س٦ استخدمنا المتطابقات

(٨) $\left(\frac{1}{٢}\left(\text{أب} + (٢\text{جـ})^{-1}\right)\right)^{-1}$

$= \left(\frac{1}{٢}\left(\text{أب} + \text{أب}\right)\right)^{-1} = ٢\left(٢\text{أب}\right)^{-1} = ٢ \times \frac{1}{٢}\left(\text{أب}\right)^{-1}$

$= \text{ب}^{-1}\text{أ}^{-1}$ فرع (جـ)

(٩) $(\text{أ} + \text{أ} \times \text{ب})^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$

$\left((\text{أ} + \text{أب})^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}^{-1}$

$\text{أ} + \text{أب} = -١ \begin{bmatrix} -٣ & ٧ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$

$\text{أ} + \text{أب} = \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$(\text{أ}^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}^{-1}$

$\text{أ} = \frac{1}{٤}\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & -٤ \end{bmatrix}$

$\text{أ} = \begin{bmatrix} \frac{1}{٤} & \frac{1}{٢} \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$

$\text{أب} = \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix} - \text{أ}$

$\text{أب} = \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{٤} & \frac{1}{٢} \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$

$\text{أب} = \begin{bmatrix} \frac{١١}{٤} & -\frac{١٥}{٢} \\ -٢ & ٦ \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{أ}^{-1}\text{أب} = \text{أ}^{-1}[\quad]}$

$\text{ب} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{١١}{٤} & -\frac{١٥}{٢} \\ -٢ & ٦ \end{bmatrix}$

$\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٧ & -١٨ \end{bmatrix}$ فرع (ب)

أ. هدى فرج

(١٠) حل (١)

$|-٢\,\text{م}^{-١}| = ٨$

$\Leftarrow (-٢)^{٢}\,|\text{م}^{-١}| = ٨ \Leftarrow ٤\,|\text{م}^{-١}| = ٨$

$\Leftarrow |\text{م}^{-١}| = ٢$

$|\text{م}\,\text{م}^{-١}| = |\text{م}|\,|\text{م}^{-١}| = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١$

حل (٢) أكمل $|\text{م}\,\text{م}^{-١}| = |\text{م}| \times |\text{م}^{-١}|$

$= \cancel{|\text{م}|} \times \frac{١}{\cancel{|\text{م}|}} = ١$ فرع (ب)

رياضيات الثاني عشر العلمي

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات

Solving Systems of Linear Equations

أولًا: طريقة النظير الضربي

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات

(Solving Systems of Linear Equations)

* من التطبيقات المهمة في المصفوفات استخدامها في حل أنظمة المعادلات الخطية وهناك ثلاثة طرق هي :-

1) طريقة النظير الضربي.
2) طريقة كريمر
3) طريقة جاوس

* يمكن تمثيل نظام من المعادلات في شكل معادلة مصفوفية باستخدام ثلاث مصفوفات هي مصفوفة المعاملات أ ، ومصفوفة المتغيرات ك ومصفوفة الثوابت جـ

* **مثال:** إذا كان لدينا النظام التالي من المعادلات الخطية

$$٤س + ٣ص = ١٠$$
$$-٢س + ٢ص = -٣$$

✓ مصفوفة المعاملات هي $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ \end{bmatrix}$

✓ مصفوفة المتغيرات هي $ك = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

✓ مصفوفة الثوابت هي $جـ = \begin{bmatrix} ١٠ \\ -٣ \end{bmatrix}$

وعليه يمكن تمثيل النظام السابق من المعادلات الخطية بمعادلة مصفوفية

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ \\ -٣ \end{bmatrix}$$

أ. هدى فرج

انتبه يجب أن تكون المتغيرات مرتبة على الشكل التالي

$$\text{أ}_١\text{س} + \text{ب}_١\text{ص} = \text{جـ}_١$$

$$\text{أ}_٢\text{س} + \text{ب}_٢\text{ص} = \text{جـ}_٢$$

حيث $\text{أ}_١ ، \text{أ}_٢$ ، $\text{ب}_١ ، \text{ب}_٢$ ، $\text{جـ}_١ ، \text{جـ}_٢ \in \text{ح}$

مثلاً في النظام التالي :-

$$-٢\text{ص} + ٤\text{س} = ٥$$

$$-\text{س} + ١٠\text{ص} = -١$$

① نعيد ترتيب النظام كما يلي :- ⟸

$$٤\text{س} - ٢\text{ص} = ٥$$

$$-\text{س} + ١٠\text{ص} = -١$$

② ثم نكتب المعادلة المصفوفية ⟸

$$\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -١ \end{bmatrix}$$

* سنقتصر في هذا الدرس على حل نظام من معادلتين خطيتين :-

أولاً / طريقة النظير الضربي /

مثال ① حل النظام التالي باستخدام طريقة النظير الضربي .

$$٣\text{س} + ٥\text{ص} = ١$$

$$٢\text{س} + ٣\text{ص} = ٠$$

الحل ① نكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} \cdot \text{ك} = \text{و}$$

* $|\text{أ}| = ٣×٣ - ٢×٥$
$= ٩ - ١٠ = -١ \neq \text{صفر}$ ⟸ يمكن استخدام طريقة النظير الضربي.

أ ل = ج (أ مصفوفة غير منفردة)

أ^-١ أ ل = أ^-١ ج

⇐ ل = أ^-١ ج

|أ| = -١ ⇐ $أ^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

لكن ل = أ^-١ ج

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}}_{٢×٢} \underbrace{\begin{bmatrix} ١ \\ ٠ \end{bmatrix}}_{٢×١}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -٣ \\ ٢ \end{bmatrix}}_{٢×١}$ ⇐ $\boxed{\begin{matrix} س = -٣ \\ ص = ٢ \end{matrix}}$

* ملاحظات هامة/

① في النظام أ . ل = ج ، إذا كانت أ مصفوفة منفردة (|أ| = صفر) فلا يمكن استخدام طريقة النظير الضربي وفي هذه الحالة إما أن يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول أو ليس له حل.

② لا تتأثر قيم المتغيرات عند تغيير ترتيب المعادلات (الصفوف)

لاحظ المثال التالي:

مثال ③ ص ١٢١ من الكتاب الوزاري :-

حل النظام التالي من المعادلات بطريقة النظير الضربي :-

٢س + ص = -١

٤س + ص = ١

الحل

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ١ \end{bmatrix}$$

$$أ \cdot ك = ج \Leftarrow ك = أ^{-١} ج$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٢ - ٤ = -٢ \neq \text{صفر}$$ (يمكن استخدام طريقة النظير)

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$ك = أ^{-١} ج$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{-٢} \underbrace{\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}}_{٢\times٢} \underbrace{\begin{bmatrix} -١ \\ ١ \end{bmatrix}}_{٢\times١} \Leftarrow \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{-١}{٢} \begin{bmatrix} -٢ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٣ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow س = ١ \text{ ، } ص = -٣$$

* عند تغيير ترتيب المعادلتين في مثال ③ السابق

٤س + ص = ١

٢س + ص = -١ ⇐ نكتب المعادلة المصفوفية بهذا الشكل

$$\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -١ \end{bmatrix} \Leftarrow ك = أ^{-١} ج$$

$$أ \cdot ك = ج$$

$|أ| = ٤ - ٢ = ٢$

$أ^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$

لكن $ل = أ^{-١} . ج$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ \\ -١ \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢ \\ -٦ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٣ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow س = ١ \text{ ، } ص = -٣$

* لاحظ قيم س ، ص نفسها في الحالتين.

* مثال (3) حل النظام التالي بطريقة النظير الضربي :-

$س - ٥ = ٢ص - ٤س$

$ص + س - ٤ = ٥ + ٣س$

الحل نعيد ترتيب النظام كالتالي :-

$٥س - ٢ص = ٥$

$-٢س + ص = ٩$

$\begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٩ \end{bmatrix}$

$أ . ل = ج$

$\Leftarrow ل = أ^{-١} ج$

$|أ| = ٥ - ٤ = ١ \neq$ صفر

$أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$ل = أ^{-١} . ج$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ \\ ٩ \end{bmatrix}$

أ. هدى فرج

$\Leftarrow \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٣ \\ ٥٥ \end{bmatrix} \Leftarrow$ س $= ٢٣$ ، ص $= ٥٥$

* مثال ⑨ نشاط ② ص ١٢٢ كتاب وزاري:-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام طريقة النظير الضربي.

٣س − ب ص = ٣

ب س − ٣ص = ب

$\Leftarrow \begin{bmatrix} ٣ & -ب \\ ب & -٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ب \end{bmatrix}$

حيث ب ≠ ٣

أ . ل = ج

$\Leftarrow$ ل = أ$^{-1}$ ج

|أ| = −٩ + ب^2 ، |أ| ≠ صفر حيث ب ≠ ٣

$أ^{-1} = \frac{1}{-٩+ب^2} \begin{bmatrix} -٣ & ب \\ -ب & ٣ \end{bmatrix}$

لكن ل = أ$^{-1}$ ج

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{1}{-٩+ب^2} \underbrace{\begin{bmatrix} -٣ & ب \\ -ب & ٣ \end{bmatrix}}_{٢\times٢} \underbrace{\begin{bmatrix} ٣ \\ ب \end{bmatrix}}_{٢\times١}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{1}{-٩+ب^2} \underbrace{\begin{bmatrix} -٩+ب^2 \\ ٠ \end{bmatrix}}_{٢\times١}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٠ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow$ س = ١ ، ص = ٠

أ. هدى فرج

تدريب ختامي /

① حل س١ أ، ب صـ ١٢٥ من الكتاب الوزاري.

② حل كل من الأنظمة التالية باستخدام طريقة النظير الضربي

أ) ٢ص − ٨ = −٣س

٥س − ٣ص = ٧

(ح/ س = ٢
ص = ١)

ب) ٤س − ٣ص − ٧ = ٠

٢ص − ٥س = ٠

(ح/ س = −٢
ص = −٥)

7

رياضيات الثاني عشر العلمي

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات

Solving Systems of Linear Equations

ثانيًا: طريقة كريمر

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

أ. هدى فرج

*ثانياً/ طريقة كريمر :-

درسنا في طريقة النظير الضربي أن أي نظام من المعادلات الخطية يمكن كتابته على شكل معادلة مصفوفية على النحو أ . ك = جـ

حيث أ مصفوفة المعاملات (غير منفردة) ، ك مصفوفة المتغيرات ، جـ مصفوفة الثوابت فإذا كان النظام يتضمن س ، ص فإننا نجدهم على النحو التالي :-

$$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} \quad ، \quad ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$$ حيث $|أ| \neq$ صفر

حيث $أ_س$ / المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات س بعمود الثوابت .

$أ_ص$ / المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات ص بعمود الثوابت

مثال (1) باستخدام طريقة كريمر حل النظام التالي من المعادلات

$$س + ص = 5$$
$$2س - ص = 1$$

الحل (1) نمثل النظام بالمعادلة المصفوفية التالية ،

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$أ \cdot ك = جـ$$

$$|أ| = -1 - 2 = -3 \neq \text{صفر}$$

$$|أ_س| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 1 = -6$$

$$|أ_ص| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 10 = -9$$

$$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-9}{-3} = 3$$

أ. هدى فرج

* **مثال ②** / س٢ فرع (ب) ص١٢٥ كتاب وزاري

حل النظام التالي من المعادلات $\text{س} + \text{ص} = -3$ ، $2\text{ص} + \text{س} = -2$ بطريقة كريمر

الحل ① نعيد ترتيب النظام

$$\text{س} + \text{ص} = -3$$
$$\text{س} + 2\text{ص} = -2$$

② المعادلة المصفوفية التي تمثل النظام هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} \cdot \text{ك} = \text{ج}$$

$$|\text{أ}| = 2 - 1 = 1$$

$$|\text{أ}_\text{س}| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 2 = -4$$

$$|\text{أ}_\text{ص}| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$$

$$\text{س} = \frac{|\text{أ}_\text{س}|}{|\text{أ}|} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$\text{ص} = \frac{|\text{أ}_\text{ص}|}{|\text{أ}|} = \frac{1}{1} = 1$$

تدريب/ حل الأنظمة التالية من المعادلات الخطية بطريقة كريمر.

أ) $٢ص - س = ١$
$٢س + ص - ٨ = ٠$

ج) $٣س + ٢ص = ٠$
$س + ص - ١ = ٠$

ب) $٢ص - ٤س = ٢$
$٥س + ص = ٨$

* **مثال 3:** في نظام من معادلتين خطيتين كانت

$|أ| = ١١$ ، $|أ_س| = ٣٣$ ، $|أ_ص| = ١١$ أوجد قيم س، ص

الحل

$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{٣٣}{١١} = ٣$

$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{١١}{١١} = ١$

* **مثال ٤/** في نظام من معادلتين خطيتين على الصورة $أس + ب ص + جـ =$ كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١١ & ٣ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة المعادلات ، $ب = \begin{bmatrix} -٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة الثوابت

أ) أكتب المعادلتين الخطيتين بدلالة س، ص

الحل

$س + ٢ص = -٢ \Leftarrow س + ٢ص + ٢ = ٠$

$٣س + ١١ص = ٩ \quad\quad ٣س + ١١ص - ٩ = ٠$

أ. هدى فرج

ب) استخدم طريقة كريمر لحل النظام

$|أ| = ١١ - ٦ = ٥$

$|أ_س| = \begin{vmatrix} ٢ & -٢ \\ ١١ & ٩ \end{vmatrix} = -٢٢ - ١٨ = -٤٠$

$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٩ \end{vmatrix} = ٩ + ٦ = ١٥$

$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-٤٠}{٥} = -٨$

$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

* مثال 5 / س٣ ص١٢٥ من الكتاب الوزاري :-

عند حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بالمتغيرين س، ص بطريقة كريمر وجد أن $أ = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، $أ_س = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$ نجد س، ص

الحل $|أ| = ٢ - ٣ = -١$

$|أ_س| = ٥ - ٩ = -٤$

$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-٤}{-١} = ٤$

$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & -٣ \end{vmatrix} = -٦ + ٥ = -١$

$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-١}{-١} = ١$

س = ٤ ، ص = ١

أ. هدى فرج

* ٢٠١٩ | استخدم محمد طريقة كرايمر لحل نظام مكون من معادلتين خطيتين في متغيرين س ، ص وجد أن

$|\text{أ}_{\text{س}}| = |-2\text{أ}| = \frac{1}{3}|\text{أ}_{\text{ص}}|$ ، $|\text{أ}| \neq 0$ فما قيمة س ، ص على الترتيب ؟!

الحل $|\text{أ}_{\text{س}}| = (-2)^2|\text{أ}| = \frac{1}{3}|\text{أ}_{\text{ص}}|$

$\Leftarrow |\text{أ}_{\text{س}}| = 4|\text{أ}|$

وكذلك $|\text{أ}_{\text{ص}}| = 12|\text{أ}|$

$\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{4\cancel{|\text{أ}|}}{\cancel{|\text{أ}|}} = 4$

$\text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{12\cancel{|\text{أ}|}}{\cancel{|\text{أ}|}} = 12$

$\Leftarrow$ س $= 4$ ، ص $= 12$ فرع (أ)

٢٠٢٠ دورة ثانية | عند حل نظام يتكون من معادلتين خطيتين بالمتغيرين س ، ص بطريقة كريمر وجد أن

$\text{أ}_{\text{س}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، أوجد قيمتي س ، ص

الحل $\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$|\text{أ}| = 9 - 10 = -1$

$|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$

$|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$

$\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{3}{-1} = -3$

$\text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-2}{-1} = 2$

أ. هدى فرج

٢٠٢) إذا كانت س + ٢ص = ١٢ ، إحدى المعادلتين الخطيتين بمتغيرين وعند استخدام طريقة كريمر للحل وجد أنه:

|٢ أ‌س| = ٨ − ٨ |أ‌ص| ، فما قيمة |أ| ، حيث |أ| ≠ ٠ .

الحل

|٢ أ‌س| = ٨ − ٨ |أ‌ص|

⇐ ٤ |أ‌س| = ٨ − ٨ |أ‌ص| ÷ |أ| للطرفين

$$\frac{\text{٤ |أس|}}{\text{|أ|}} = \frac{\text{٨}}{\text{|أ|}} - \frac{\text{٨ |أص|}}{\text{|أ|}}$$

$$\text{٤س} = \frac{\text{٨}}{\text{|أ|}} - \text{٨ص} \Leftarrow \boxed{\text{٤س} + \text{٨ص} = \frac{\text{٨}}{\text{|أ|}}} \leftarrow (١)$$

لكن س + ٢ص = ١٢ (معطى)

(×٤) ⇐ ٤س + ٨ص = ٤٨ ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنه $\frac{\text{٨}}{\text{|أ|}} = \text{٤٨}$

$$\Leftarrow \frac{\text{٨}}{\text{|أ|}} = \text{٤٨} \Leftarrow \text{|أ|} = \frac{\text{١}}{\text{٦}}$$ ✓

أ. هدى فرج

* إضافي دليل تقويم الطالب ص ١١٦ ؟ —

عند حل نظام مكون من معادلتين خطيتين في متغيرين س، ص

وجد أن $|أ_س| = ٢|أ| = \frac{-١}{٢} |أ_ص|$ فإن قيمة ص، س على الترتيب

الحل $|أ_س| = ٢|أ| \Leftarrow س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{٢\cancel{|أ|}}{\cancel{|أ|}} = ٢$

$|أ_ص| = -٤|أ| \Leftarrow ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-٤\cancel{|أ|}}{\cancel{|أ|}} = -٤$

∴ ص = -٤ ، س = ٢ فرع ب

* إضافي دليل تقويم الطالب ص ١١٦ ؟ —

عند حل نظام من المعادلات الخطية باستخدام كرايمر وجد أنه

س = -٢ ، $|أ_س| = ٤$ ، $|أ_ص| = -٦$ فإن قيمة ص هي!

الحل $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} \Leftarrow -٢ = \frac{٤}{|أ|} \Leftarrow -٢|أ| = ٤ \Leftarrow |أ| = -٢$

$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$ فرع جـ

أ. هدى فرج

إضافي | دليل تقويم الطالب ص ١١٨ ، ب

عند حل نظام من المعادلات الخطية باستخدام كرايمر وجد أنه

$س = ٢$ ، $ص = ٤$ ، $|أ_س| |أ_ص| = ٣٢$ أوجد $|أ|$

الحل $|أ_س| |أ_ص| = ٣٢$ $\div |أ|^٢$

$$\frac{|أ_س|}{|أ|} \cdot \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{٣٢}{|أ|^٢}$$

$$س \cdot ص = \frac{٣٢}{|أ|^٢}$$

$$٨ = \frac{٣٢}{|أ|^٢} \Leftarrow |أ|^٢ = ٤ \Leftarrow \boxed{|أ| = \pm ٢}$$

وزاري | في نظام حل معادلات بطريقة كرايمر وجد أنه

$|أ_س| = ١٥$ ، $ص = ٢٧$ ، $|أ_ص| = ٩$ أوجد س ؟!

الحل $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} \Leftarrow س = \frac{١٥}{|أ|} \leftarrow ①$

$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} \Leftarrow ٢٧ = \frac{٩}{|أ|} \Leftarrow |أ| = \frac{١}{٣}$

* بالتعويض في ①

$$\therefore س = \frac{١٥}{|أ|} = \frac{١٥}{\frac{١}{٣}} = \boxed{٤٥}$$

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول التمارين العامة

الوحدة الثالثة " المصفوفات والمحددات "

أ. هدى أسامة فرج

أ. هدى فرج

* حلول ورقة عمل (٢) الوحدة المتمازجة الفترة الثانية ص ٤١ *

① إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ وكان $|أ^٣| = ١٢٥$ ، فما قيمة / قيم س ؟

الحل $|أ| = س^٢ - ٤$

$|أ^٣| = |أ|^٣ = ١٢٥ \Leftarrow |أ|^٣ = ٥^٣ \Leftarrow |أ| = ٥$

$|أ| = س^٢ - ٤ \Leftarrow س^٢ - ٤ = ٥ \Leftarrow س^٢ = ٩$

$\Leftarrow س = \pm ٣$

② إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣٧ & ١- \end{bmatrix}$

الحل جد المصفوفة د بحيث أن أ + د = ب . د

$$\underset{١\times٢}{\begin{bmatrix} ٢+ \\ ٣- \end{bmatrix}} + \underset{١\times٢}{\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}} = \underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}} \underset{١\times٢}{\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}}$$

$$\underset{١\times٢}{\begin{bmatrix} ٢ + س \\ ٣- + ص \end{bmatrix}} = \underset{١\times٢}{\begin{bmatrix} ٣س + ٢ص \\ س \end{bmatrix}}$$

$٢ + س = ٣س + ٢ص \Leftarrow ٢ + س - ٣س - ٢ص = ٠ \Leftarrow \boxed{س + ص = ١} \leftarrow ①$

كذلك $٣- + ص = س \Leftarrow \boxed{س - ص = ٣-} \leftarrow ②$

بحل معادلة ① ، ② ينتج أن س = ١- ، ص = ٢

$\therefore د = \begin{bmatrix} ١- \\ ٢ \end{bmatrix}$

أ. هدى فرج

(٣) جد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة

$$\begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \end{bmatrix} س + \begin{bmatrix} ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} ص = \begin{bmatrix} ٩ \\ ٣- \end{bmatrix}$$

الحل

$$\begin{bmatrix} ٠ \\ ٣س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ص \\ ٥ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ ٣- \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} ٣ص \\ ٣س + ٥ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ ٣- \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow$ ٣ص = ٩ $\Leftarrow$ $\boxed{ص = ٣}$

كذلك ٣س + ٥ص = -٣ $\Leftarrow$ ٣س + ١٥ = -٣

$\Leftarrow$ ٣س = -١٨ $\Leftarrow$ $\boxed{س = -٦}$

(٤) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٢- \\ ٥ & ٣- & ٦ \end{bmatrix}$ ، فجد المصفوفة ب من الرتبة ٣×٢

بحيث إن $أ_{يه} = ب_{هي}$ لجميع قيم ي ، هـ

الحل

$$ب = \begin{bmatrix} ب_{١٢} & ب_{١١} \\ ب_{٢٢} & ب_{٢١} \\ ب_{٣٢} & ب_{٣١} \end{bmatrix}_{٣\times٢} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢- \\ ٣- & ٥ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}_{٣\times٢}$$

(٥) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣- & س \\ ص & ١ \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^{-١}| = |أ|$ فما قيمة / قيم (س ص)؟

الحل

$|أ| = س ص + ٣$

$|أ^{-١}| = |أ|$

$\frac{١}{|أ|} = |أ|$

$\Leftarrow |أ|^{٢} = ١ \Leftarrow |أ| = \pm ١$

✓ عندما $|أ| = ١$

س ص + ٣ = ١ $\Leftarrow$ س ص = -٢

✓ عندما $|أ| = -١$

س ص + ٣ = -١ $\Leftarrow$ س ص = -٤

* حلول أسئلة التمارين العامة ص ١٢٦ من الكتاب الوزاري *

(١) اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي :-

(١) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & -١ & ٤ \\ ٩ & -٣ & ٦ \\ -١ & ٧ & ٢ \end{bmatrix}$ فما قيمة أ١٢ - أ٣١ ؟!

الحل أ١٢ - أ٣١ = ٦ - ٥ = ١ فرع (ج)

(٢) إذا كانت $\begin{bmatrix} \boxed{س} & ٣ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{٢} & ٣ \\ ٥ & س^٢ + س \end{bmatrix}$ فما مجموعة قيم س ؟

الحل س = ٢ (من تساوي المصفوفتين).

كذلك س² + س = ٦ ⟸ س² + س - ٦ = ٠ ⟸ (س + ٣) (س - ٢) = ٠

⟸ س = -٣ ، س = ٢

قيم س هي {٢} فرع (ج)

(٣) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٦ & ١ \end{bmatrix}$ فما قيمة

٢٢أ - ٥(أ + ٢ب) + ٢٧ب ؟!

الحل ٢٢أ - ٥أ - ١٠ب + ٢٧ب = ١٧أ + ١٧ب = ١٧ (أ + ب)

$= ١٧ \left(\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٦ & ١ \end{bmatrix} \right)$

$= ١٧ \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ -٣٤ & ٥١ \end{bmatrix}$ فرع (ج)

أ. هدى فرج

٤) إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين ، فما العبارة الصحيحة دائماً فيما يأتي ؟

أ) $|\text{٢أ}| = \text{٤}|\text{أ}|$ ← صحيحة فقط عندما تكون أ من الرتبة الثانية.

ب) $|\text{أ}+\text{ب}| = |\text{أ}| + |\text{ب}|$ ← المحدد لا يوزع في حال الجمع للمصفوفات

ج) $\text{أ}.\text{ب} = \text{ب}.\text{أ}$ ← الضرب ليس إبدالي في المصفوفات

د) $|\text{ب}.\text{أ}^{-1}| = |\text{ب}||\text{أ}^{-1}| = \frac{|\text{ب}|}{|\text{أ}|}$ ✓

٧) إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فما المصفوفة التي تساوي $\text{أ}^{-1} + \text{أ}$

حيث أ^{-1} هي النظير الضربي للمصفوفة أ ؟!

الحل $|\text{أ}| = ١٠ - ٩ = ١$

$$\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\text{أ}^{-1} + \text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٠ \\ ٠ & ٧ \end{bmatrix} = ٧\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$= \boxed{٧\text{م}_٢}$

فرع د

أ. هدى فرج

(٩) إذا علمت أن أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة أ^٢ ـ أ ؟!

الحل أ^٢ = أ . أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$

أ^٢ ـ أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٨ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix}$ = $\boxed{٨ م_٢}$

فرع (د)

(٢) إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & س \\ ٢ & ص \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -١ & ص \\ -٤ & س \end{vmatrix} = ٧$ ، فما قيم س ، ص ؟!

الحل ٢س ـ ص = ٧ ⟵ (١)

ـ س + ٤ص = ٧ ⟵ (٢) (× ٢)

٢س ـ ص = ٧

ـ٢س + ٨ص = ١٤

٧ص = ٢١ ⟵ $\boxed{ص = ٣}$ بالتعويض في (١) نحصل على $\boxed{س = ٥}$

(٣) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ نجد

(أ) |أ| أ$^{-١}$

الحل (أ) |أ| = ـ١٢ + ١٠ = (ـ٢) ⟸ أ$^{-١}$ = $\frac{١}{-٢}$ $\begin{bmatrix} -٥ & ٤ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$

|أ| أ$^{-١}$ = ـ٢ × $\frac{١}{-٢}$ $\begin{bmatrix} -٥ & ٤ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & ٤ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$

أ. هدى فرج

ب) $|٣أ| = (٣)^{٢}|أ| = ٩ \times -٢ = -١٨$

جـ) $(-٢أ)^{-١} = -\frac{١}{٢}\, أ^{-١} = -\frac{١}{٢} \times -\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

$= \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{-٥}{٤} \\ \frac{١}{٢} & \frac{-٣}{٤} \end{bmatrix}$

٤) جد قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} ١ & س & ٢ \\ س & ٣ & س \\ ٤ & س & ٥ \end{vmatrix} = -٩$

الحل: $١(١٥ - س^{٢}) - س(٥س - ٤س) + ٢(س^{٢} - ١٢) = -٩$

$١٥ - س^{٢} - ٥س^{٢} + ٤س^{٢} + ٢س^{٢} - ٢٤ + ٩ = ٠$

$\Leftarrow ٠ = ٠$ صحيحة لكل س $\in$ ح .

٥) حل المعادلات المصفوفية التالية:-

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ (باستخدام النظير الضربي)

الحل

$أ \cdot ل = جـ$

$أ^{-١} أ \cdot ل = أ^{-١} جـ$

$ل = أ^{-١} جـ$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}^{-١} \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{-١}{٢}\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = -\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ١٠ \\ -٨ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٤ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow س = -٥$
$ص = ٤$

(ب) $\begin{bmatrix} س & ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ & ١١ \end{bmatrix}$

الحل

$\underset{١\times٢}{\begin{bmatrix} س & ص \end{bmatrix}} \underset{٢\times٣}{\begin{bmatrix} ٣ & -٣ & ٩ \\ -٤ & ٠ & -٨ \end{bmatrix}} = \underset{١\times٣}{\begin{bmatrix} ٤ & -٣ & ١١ \end{bmatrix}}$

$\begin{bmatrix} ٣س-٤ص & -٣س & ٩س-٨ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ & ١١ \end{bmatrix}$

$-٣س = -٣ \Leftarrow \boxed{س = ١}$

$٣س - ٤ص = ٤ \Leftarrow ٣ - ٤ص = ٤ \Leftarrow -٤ص = ١$
$\Leftarrow ص = \frac{-١}{٤}$

(٨) عند حل المعادلتين $ن س - ص = ٥$ ، $ل س + ص = ٣$ ، ن ، ل عددان حقيقيان لا يساويان صفر
باستخدام طريقة كريمر ، إذا كانت $\begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ تمثل محدد ص
جد قيمة (أ) ن ، ل (ب) س ، ص

الحل (أ) $أص = \begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ن & ٥ \\ ل & ٣ \end{bmatrix} \Leftarrow ن = ٦ ، ل = ٢$

حيث $أ = \begin{bmatrix} ن & -١ \\ ل & ١ \end{bmatrix}$ ومصفوفة الثوابت $= \begin{bmatrix} ٥ \\ ٣ \end{bmatrix}$

أ. هدى فرج

ي) $أ = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $أ_س = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، $أ_ص = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$|أ| = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 2 = 8$

$|أ_س| = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 3 = 8 \Leftarrow س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{8}{8} = 1$

$|أ_ص| = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8 \Leftarrow ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{8}{8} = 1$

9) إذا كانت $أ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، جد $(أ^2)^{-1}$ ، $(أ^{-1})^2$ ، ماذا تلاحظ؟!

الحل

$أ = (أ^{-1})^{-1}$

$|أ^{-1}| = 3 - 2 = 1 \Leftarrow (أ^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = أ$

$أ^2 = أ . أ = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

$|أ^2| = \begin{vmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 33 - 32 = 1$

$\Leftarrow (أ^2)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$ (*)

$(أ^{-1})^2 = أ^{-1} . أ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$ (**)

من (*) و (**) نلاحظ أنه $(أ^2)^{-1} = (أ^{-1})^2$

8

أ. هدى فرج

(١٠) استخدم طريقة كريمر لحل نظام المعادلات ٣س + ٢ص = ٤

٥ص + س = ٣

الحل

(١) نعيد ترتيب المعادلات ٣س + ٢ص = -٤

س + ٥ص = ٣

(٢) تكون المعادلة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

أ . و = ج

$$|أ| = 15 - 2 = 13$$

$$|أ_س| = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 6 = -26$$

$$|أ_ص| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13$$

$$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-26}{13} = -2$$

$$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{13}{13} = 1$$

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار

وحدة المصفوفات والمحددات

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

أ. هدى فرج

* اختبار على وحدة المصفوفات والمحددات *

① إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث |أ| = ٢ ، |٣أ| = ٥٤

فإن رتبة المصفوفة أ هي

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٥ (د) ٤

② إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية بحيث أن |أس| = -٣

، |٢أص| = ٣٦ ، وكان |$\frac{1}{3}$ أ| = -١ فإن س ، ص على الترتيب

(أ) -١ ، -٣ (ب) ١ ، -٣ (ج) ٣ ، -٣ (د) ١ ، ٣

③ إذا كانت (أ×ب)×ج تمثل مصفوفة من الرتبة ٣×٤ وكانت

رتبة أ هي ٣×٥ ورتبة ج هي ٢×٤ فإن رتبة المصفوفة ب هي

(أ) ٣×٥ (ب) ٢×٥ (ج) ٥×٢ (د) ٢×٤

④ عند حل نظام من المعادلات باستخدام كريمر وجد أن

أ × أس = $\begin{bmatrix} ٠ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، أس × أص = $\begin{bmatrix} ٢٦ & ٦ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

فإن قيمة ص = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (ج) ٦ (د) ٢

أ. هدى فرج

٥) ما قيمة / قيم س الموجبة التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} س-١ & ٤ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ منفردة.

أ) ٤ ب) ٢ ، ٣ جـ) ٧ د) ١

٦) إذا كانت $٤\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & س \end{bmatrix} - ٣\begin{bmatrix} ٤ & ص \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -١ \\ ٩ & -٣ \end{bmatrix}$

فإن ص - س = ؟

أ) ٣ ب) -٥ جـ) ٤ د) -١

٧) أ ، ب مصفوفتان من الرتبة الثانية ، $ب^{-١} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

، $ب أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ أوجد أ

أ) $\begin{bmatrix} -\frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٤}{٣} & \frac{٥}{٣} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٢}{٣} & -\frac{٥}{٣} \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٤}{٣} & \frac{٥}{٣} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -\frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} \\ -\frac{٤}{٣} & \frac{٥}{٣} \end{bmatrix}$

٨) إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

فإن قيمة $\left| ٢س - (س + ص) \right| =$

أ) صفر ب) ١ جـ) -١ د) ٢

أ. هدى فرج

(٩) إذا كانت $(\frac{1}{4}\text{أ})^{-1} = \begin{bmatrix} ٦ & -٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ فإن أ =

(أ) $\begin{bmatrix} \frac{٢}{٣} & \frac{٨}{٣} \\ ٠ & -٤ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \frac{٢}{٣} & \frac{٨}{٣} \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٠ & \frac{٢}{٣} \end{bmatrix}$ (د) $\text{أ}^{٢}$

(١٠) أ مصفوفة من الرتبة الثانية وكان $|ل\text{أ} \times \text{أ}^{-1}| = ٩$ ، ل ∈ ح

فإن ل = ؟؟

(أ) $\pm \frac{١}{٣}$ (ب) ± ٩ (جـ) ± ٣ (د) $\pm \frac{١}{٩}$

(١١) حل المعادلة المصفوفية $٢(٣س + \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}) = س + \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$

(أ) $\begin{bmatrix} \frac{-٢}{٥} \\ \frac{٤}{٥} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \frac{-٢}{٥} \\ \frac{-٤}{٥} \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} \frac{٤}{٥} \\ \frac{٢}{٥} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} \frac{-٤}{٥} \\ \frac{-٢}{٥} \end{bmatrix}$

(١٢) قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} س & ٣ \\ ٧ & س \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٣ \\ -١ & س & -٢ \\ ٠ & -١ & ٤ \end{vmatrix}$

(أ) -٢ ، -١٠ (ب) ٢ ، -١٠ (جـ) -٢ ، ١٠ (د) صفر

أ. هدى فرج

* حلول أسئلة اختبار وحدة المصفوفات والمحددات *

(١) |٣أ| = ٣^ن |أ| = ٥٤

⇐ ٣^ن × ٢ = ٥٤ ⇐ ٣^ن = ٢٧

⇐ ٣^ن = ٣^٣ ⇐ $\boxed{\text{ن} = ٣}$ فرع (ب)

(٢) |٢أص| = ٤ |أص| = ٣٦ ⇐ |أص| = ٩

|$\frac{١}{٢٧}$ أ| = −١ ⇐ $\left(\frac{١}{٢٧}\right)^{٢}$ |أ| = −١ ⇐ $\frac{١}{٣}$ |أ| = −١

⇐ |أ| = −٣

س = $\frac{|\text{أس}|}{|\text{أ}|}$ = $\frac{-٣}{-٣}$ = ١

ص = $\frac{|\text{أص}|}{|\text{أ}|}$ = $\frac{٩}{-٣}$ = −٣

س = ١ ، ص = −٣ فرع (ب)

(٣) أ × ب × ج

٣×٥ ٥×٢ ٢×٤

٣×٢

٣×٤

⇐ رتبة ب ٥×٢ فرع (ج)

(4)

أ. هدى فرج

④ الحل: $|أ \times أس| = \begin{vmatrix} ٠ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢$

$\therefore |أ| \times |أس| = ١٢ \longleftarrow (١)$

$|أس \times أص| = \begin{vmatrix} ٣٦ & ٦ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} = ٢٤$

$\therefore |أس| \times |أص| = ٢٤ \longleftarrow (٢)$

$ص = \dfrac{|أص|}{|أ|}$ (نضرب في $\dfrac{|أس|}{|أس|}$)

$ص = \dfrac{|أص||أس|}{|أس||أ|} = \dfrac{٢٤}{١٢} = ٢$ فرع (د)

⑤ $\begin{vmatrix} ٤ & س-١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow ٤س - ٤ - ١٢ = صفر$

$\Leftarrow ٤س - ١٦ = ٠ \Leftarrow ٤س = ١٦$

$\Leftarrow \boxed{س = ٤}$ فرع (أ)

⑥ $\begin{bmatrix} ٢٠ & ٨ \\ ٤س & ١٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ص & ١٢ \\ ١٥ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & -٤ \\ -٣ & ٩ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٢٠-٣ص & -٤ \\ ٤س-١٥ & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & -٤ \\ -٣ & ٩ \end{bmatrix}$

$٢٠ - ٣ص = -١$ ، $٤س - ١٥ = -٣$

$-٣ص = -٢١$ ، $٤س = ١٢$

$\Leftarrow \boxed{ص = ٧}$ ، $\Leftarrow \boxed{س = ٣}$

$\therefore ص - س = ٧ - ٣ = ٤$ فرع (ج)

(٧) الحل

$\text{ب}\,\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

$\text{ب}^{-1}\,\text{ب}\,\text{أ}^{-1} = \text{ب}^{-1} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

$\text{أ}^{-1} = \text{ب}^{-1} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

$\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$

$(\text{أ}^{-1})^{-1} = \text{أ}$

$|\text{أ}^{-1}| = \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ٤ & -١ \end{vmatrix} = -٥ + ٨ = ٣$

$(\text{أ}^{-1})^{-1} = \text{أ} = \frac{١}{٣} \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix} \Leftarrow \text{أ} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٣} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{-٤}{٣} & \frac{٥}{٣} \end{bmatrix}$

ج (د)

(٨) $|٢\text{س} - (\text{س} + \text{ص})| = |٢\text{س} - \text{س} - \text{ص}| = |\text{س} - \text{ص}|$

$\text{س} - \text{ص} = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -٥ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

$|\text{س} - \text{ص}| = \begin{vmatrix} ٠ & -٥ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٠ - ٠ = \text{صفر}$ ج (أ)

(٩) $\left(\frac{١}{٤}\text{أ}\right)^{-١} = \begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

$\left(\left(\frac{١}{٤}\text{أ}\right)^{-١}\right)^{-١} = \begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}^{-١} \Leftarrow \frac{١}{٤}\text{أ} = \frac{١}{٦}\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \text{أ} = \frac{٤}{٦}\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix} \Leftarrow \text{أ} = \begin{bmatrix} \frac{١٦}{٦} & \frac{٤}{٦} \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

$\therefore \text{أ} = \begin{bmatrix} \frac{٨}{٣} & \frac{٢}{٣} \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ فرع (ب)

(١٠) $|\text{ل أ} \times \text{أ}^{-١}| = |\text{ل أ}| \times |\text{أ}^{-١}| = ٩$

$\Leftarrow \cancel{|\text{أ}|}\,\text{ل}^{٢} \times \frac{١}{\cancel{|\text{أ}|}} = ٩ \Leftarrow \text{ل}^{٢} = ٩$

$\therefore \text{ل} = \pm ٣$ فرع (ج)

(١١) $٢\left(٣\text{س} + \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}\right) = \text{س} + \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$

$٦\text{س} + \begin{bmatrix} ٤ \\ ٨ \end{bmatrix} = \text{س} + \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$

$٦\text{س} - \text{س} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ \\ ٨ \end{bmatrix}$

$٥\text{س} = \begin{bmatrix} -٢ \\ -٤ \end{bmatrix} \Leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} \frac{-٢}{٥} \\ \frac{-٤}{٥} \end{bmatrix}$ فرع (ب)

أ. هدى فرج

١٢

$$\begin{vmatrix} \text{س} & 3 \\ 7 & \text{س} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & \text{س} & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{س}^2 - 21 = 2(4\text{س} - 2) + 3(1 - 0)$$

$$\Leftarrow \text{س}^2 - 21 = 8\text{س} - 4 + 3 \Leftarrow \text{س}^2 - 8\text{س} - 20 = 0$$

$$\Leftarrow (\text{س} - 10)(\text{س} + 2) = 0$$

$$\Leftarrow \text{س} = 10 \text{ أو } -2$$ فرع (ج)