رياضيات الثاني عشر علمي

تمارين على خصائص المحددات

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

تمارين على خصائص المحددات

رياضيات الثاني عشر علمي

① بدون فك المحدد أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} 1 & ل & ل^2 \\ 1 & م & م^2 \\ 1 & ن & ن^2 \end{vmatrix} = (ل-م)(م-ن)(ن-ل)$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 1 & ل & ل^2 \\ 1 & م & م^2 \\ 1 & ن & ن^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[ص_3-ص_1]{ص_2-ص_1} \begin{vmatrix} 1 & ل & ل^2 \\ 0 & م-ل & م^2-ل^2 \\ 0 & ن-ل & ن^2-ل^2 \end{vmatrix}$$

(م - ل) من الصف الثاني

(ن-ل) من الصف الثالث

$$\Rightarrow (م-ل)(ن-ل)\begin{vmatrix} 1 & ل & ل^2 \\ 0 & 1 & م+ل \\ 0 & 1 & ن+ل \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{ص_3-ص_2} (م-ل)(ن-ل)\begin{vmatrix} 1 & ل & ل^2 \\ 0 & 1 & م+ل \\ 0 & 0 & ن-م \end{vmatrix}$$

$$= (م-ل)(ن-ل)(ن-م)$$

$$= -1(ل-م) \times (ن-ل) \times -1(م-ن)$$

$$= (ل-م)(م-ن)(ن-ل) \quad \#$$

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

② حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} \text{س} & 2\text{س}+1 & 3\text{س}+2 \\ 2\text{س}+1 & 3\text{س}+2 & 4\text{س}+3 \\ 3\text{س}+3 & 5\text{س}+6 & 10\text{س}+9 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل

$$\text{ع}_2 - 2\text{ع}_1 \Leftarrow \begin{vmatrix} \text{س} & 1 & 3\text{س}+2 \\ 2\text{س}+1 & -\text{س} & 4\text{س}+3 \\ 3\text{س}+3 & -\text{س} & 10\text{س}+9 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\text{ع}_3 - 3\text{ع}_1 \Leftarrow \begin{vmatrix} \text{س} & 1 & 2 \\ 2\text{س}+1 & -\text{س} & -2\text{س} \\ 3\text{س}+2 & -\text{س} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\text{ع}_3 - 2\text{ع}_2 \Leftarrow \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \begin{vmatrix} \text{س} & 1 & 0 \\ 2\text{س}+1 & -\text{س} & 0 \\ 3\text{س}+2 & -\text{س} & 3\text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$3\text{س} \begin{vmatrix} \text{س} & 1 \\ 2\text{س}+1 & -\text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$3\text{س}\left(-\text{س}^2 - 2\text{س} - 1\right) = \text{صفر}$$

$$-3\text{س}\left(\text{س}^2 + 2\text{س} + 1\right) = \text{صفر}$$

إما $-3\text{س} = \text{صفر}$ أو $\text{س}^2 + 2\text{س} + 1 = \text{صفر} \Leftarrow (\text{س}+1)^2 = 0$

$\Leftarrow \text{س} = \text{صفر}$ $\quad$ $\text{س} = -1$

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

③ بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 12 & 15 & 17 \\ 8 & 11 & 13 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل: ص١ - ص٢ ، ص٢ - ص٣

$$\Leftarrow \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 10 & 10 & 10 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 10 \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

④ بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 - \text{ب}\,\text{جـ} \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 - \text{جـ}\,\text{أ} \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 - \text{أ}\,\text{ب} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل: ص١ - ص٢ ، ص١ - ص٣

$$\Leftarrow \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 - \text{ب}\,\text{جـ} \\ 0 & \text{أ} - \text{ب} & \text{أ}^2 - \text{ب}\,\text{جـ} - \text{ب}^2 + \text{جـ}\,\text{أ} \\ 0 & \text{أ} - \text{جـ} & \text{أ}^2 - \text{ب}\,\text{جـ} - \text{جـ}^2 + \text{أ}\,\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & \text{أ}^2 - \text{ب}^2 + \text{جـ}(\text{أ} - \text{ب}) \\ \text{أ} - \text{جـ} & \text{أ}^2 - \text{جـ}^2 + \text{ب}(\text{أ} - \text{جـ}) \end{vmatrix} + 0$$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب}) + \text{جـ}(\text{أ} - \text{ب}) \\ \text{أ} - \text{جـ} & (\text{أ} - \text{جـ})(\text{أ} + \text{جـ}) + \text{ب}(\text{أ} - \text{جـ}) \end{vmatrix}$$

$\Leftarrow$

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

* تابع س٤ /

$$= \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & (\text{أ} - \text{ب})[\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}] \\ \text{أ} - \text{جـ} & (\text{أ} - \text{جـ})[\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}] \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}) \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & \text{أ} - \text{ب} \\ \text{أ} - \text{جـ} & \text{أ} - \text{جـ} \end{vmatrix} = \text{صفر} \quad \#$$

---

⑤ استخدم خصائص المحددات لإثبات أنه:

$$\begin{vmatrix} \text{ب} + \text{جـ} & \text{أ} - 1 & 1 \\ \text{جـ} + \text{أ} & \text{ب} - 1 & 1 \\ \text{ب} + \text{أ} & \text{جـ} - 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل $ع_1 + ع_2 \Leftarrow$

$$\begin{vmatrix} \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1 & \text{أ} - 1 & 1 \\ \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1 & \text{ب} - 1 & 1 \\ \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1 & \text{جـ} - 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} - 1 & 1 \\ 1 & \text{ب} - 1 & 1 \\ 1 & \text{جـ} - 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1) \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

www.zohoralaqsa.com لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى

٦) بدون فك المحدد أثبت أنه:

$$\begin{vmatrix} س & أ & أ \\ أ & س & أ \\ أ & أ & س \end{vmatrix} = (س + ٢أ)(س - أ)^{٢}$$

الحل

$$\xrightarrow{ص_٣ + -ص_١} \begin{vmatrix} س & أ & أ \\ أ & س & أ \\ أ - س & ٠ & س - أ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{ع_١ + ع_٣} \begin{vmatrix} س + أ & أ & أ \\ ٢أ & س & أ \\ ٠ & ٠ & س - أ \end{vmatrix} \xrightarrow{ص_٢ + -ص_١}$$

$$\begin{vmatrix} س + أ & أ & أ \\ أ - س & س - أ & ٠ \\ ٠ & ٠ & س - أ \end{vmatrix} \xrightarrow{ع_١ + ع_٢} \begin{vmatrix} س + ٢أ & أ & أ \\ ٠ & س - أ & ٠ \\ ٠ & ٠ & س - أ \end{vmatrix}$$

$$= (س + ٢أ)(س - أ)^{٢} \quad \#$$

٧) برهن باستخدام خصائص المحددات أنه

$$\begin{vmatrix} ١ & -١ & ب \\ ١ - ب & ب & ب - ١ \\ ب & -ب & ١ \end{vmatrix} = ١ - ب^{٤}$$

الحل

$$\xrightarrow[-ب ص_١ + ص_٣]{(ب - ١)ص_١ + ص_٢} \begin{vmatrix} ١ & -١ & ب \\ ٠ & ١ & ب^{٤} - ١ \\ ٠ & ٠ & ١ - ب^{٢} \end{vmatrix} = ١ - ب^{٢} \quad \#$$

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

٨) أوجد قيمة ك التي تجعل (س - ١) أحد عوامل

$$\left|\begin{array}{ccc} \text{س} & ٢ & ٤ \\ \text{ك} & \text{ك}+\text{س} & \text{ك}+٥ \\ ٣ & \text{ك}+٢ & -١ \end{array}\right|$$

الحل: بـ (س - ١) أحد العوامل ⟸ س = ١ أحد جذور المحدد

$$\therefore \left|\begin{array}{ccc} ١ & ٢ & ٤ \\ ١ & \text{ك}+١ & \text{ك}+٥ \\ ٣ & \text{ك}+٢ & -١ \end{array}\right| = \text{صفر}$$

⟸ نكمل الحل ونجد أن ك = ٢ أو ك = ٣

٩) في أي مثلث أثبت أن

$$\left|\begin{array}{ccc} ١ & \text{جا}^٢\text{أ} & \text{جتا}٢\text{أ} \\ ١ & \text{جا}^٢\text{ب} & \text{جتا}٢\text{ب} \\ ١ & \text{جا}^٢\text{جـ} & \text{جتا}٢\text{جـ} \end{array}\right| = \text{صفر}$$

الطرف الأيمن =

$$\left|\begin{array}{ccc} ١ & \text{جا}^٢\text{أ} & \text{جتا}^٢\text{أ} - \text{جا}^٢\text{أ} \\ ١ & \text{جا}^٢\text{ب} & \text{جتا}^٢\text{ب} - \text{جا}^٢\text{ب} \\ ١ & \text{جا}^٢\text{جـ} & \text{جتا}^٢\text{جـ} - \text{جا}^٢\text{جـ} \end{array}\right|$$

$$\xleftarrow{\text{ع}٣ + \text{ع}٢} \left|\begin{array}{ccc} ١ & \text{جا}^٢\text{أ} & \text{جتا}^٢\text{أ} \\ ١ & \text{جا}^٢\text{ب} & \text{جتا}^٢\text{ب} \\ ١ & \text{جا}^٢\text{جـ} & \text{جتا}^٢\text{جـ} \end{array}\right| \Leftarrow \text{ع}٢ + \text{ع}٣$$

تابع ⟸

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

تابع س٩

$$= \begin{vmatrix} جا^2أ + جتا^2أ & جا^2أ & 1 \\ جا^2ب + جتا^2ب & جا^2ب & 1 \\ جا^2جـ + جتا^2جـ & جا^2جـ & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & جا^2أ & 1 \\ 1 & جا^2ب & 1 \\ 1 & جا^2جـ & 1 \end{vmatrix}$$

$= صفر$ #

(١٠) بدون فك المحدد أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} ع & س-ع & س-ص \\ س-ع & ع & س-ص \\ س+ع & س-ع & -ص \end{vmatrix} = س(٢س-ص)(٢ع-س)$$

الحل $ع_1 + ع_2 + ع_3$

$$\begin{vmatrix} ع & س-ع & ٢س-ص \\ س-ع & ع & ٢س-ص \\ س+ع & س-ع & ٢س-ص \end{vmatrix}$$

$$(٢س-ص)\begin{vmatrix} ع & س-ع & 1 \\ س-ع & ع & 1 \\ س+ع & س-ع & 1 \end{vmatrix}$$

$ع_2 + ع_3$

$$(٢س-ص)\begin{vmatrix} ع & س & 1 \\ س-ع & س & 1 \\ س+ع & ٢س & 1 \end{vmatrix}$$

يتبع

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

تابع حل

$$\Leftarrow \quad \text{س}\,(\text{٢س} - \text{ص}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{ع} \\ 1 & 1 & \text{س} - \text{ع} \\ 1 & 2 & \text{س} + \text{ع} \end{vmatrix}$$

$$\text{ع}_1 - \text{ع}_2 \Leftarrow \quad \text{س}\,(\text{٢س} - \text{ص}) \begin{vmatrix} 0 & 1 & \text{ع} \\ 0 & 1 & \text{س} - \text{ع} \\ -1 & 2 & \text{س} + \text{ع} \end{vmatrix}$$

ونفك المحدد فينتج

$$(\text{٢س} - \text{ص})(\text{س}) \times -1\,(\text{س} - \text{ع} - \text{ع})$$

$$= (\text{٢س} - \text{ص}) \times \text{س} \times (\text{٢ع} - \text{س}) \quad \#$$

(11) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} (\text{أ}+\text{ب})^2 & \text{أ}^2+\text{ب}^2 & \text{أب} \\ (\text{أ}+\text{د})^2 & \text{ج}^2+\text{د}^2 & \text{جد} \\ (\text{هـ}+\text{و})^2 & \text{هـ}^2+\text{و}^2 & \text{هـو} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل فك المربع الكامل

في $\text{ع}_1 \Leftarrow$

$$\begin{vmatrix} \text{أ}^2+\text{٢أب}+\text{ب}^2 & \text{أ}^2+\text{ب}^2 & \text{أب} \\ \text{أ}^2+\text{٢أد}+\text{د}^2 & \text{ج}^2+\text{د}^2 & \text{جد} \\ \text{هـ}^2+\text{٢هـو}+\text{و}^2 & \text{هـ}^2+\text{و}^2 & \text{هـو} \end{vmatrix}$$

www.zohoralaqsa.com لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى

تابع س ١١

$$\xrightarrow{\text{٢ع٣}} \begin{vmatrix} \text{٢أب} & \text{أ}^2+\text{ب}^2 & \text{أ}^2+\text{٢أب}+\text{ب}^2 \\ \text{٢جـد} & \text{جـ}^2+\text{د}^2 & \text{جـ}^2+\text{٢جـد}+\text{د}^2 \\ \text{٢هـو} & \text{هـ}^2+\text{و}^2 & \text{هـ}^2+\text{٢هـو}+\text{و}^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{ع}_1-(\text{ع}_2+\text{ع}_3)]{\text{ع}_3+\text{ع}_2} \begin{vmatrix} \text{٢أب} & \text{أ}^2+\text{ب}^2 & 0 \\ \text{٢جـد} & \text{جـ}^2+\text{د}^2 & 0 \\ \text{٢هـو} & \text{هـ}^2+\text{و}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

= صفر #

(١٢) أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ع}+\text{ل} & \text{س}+\text{ص} \\ \text{س} & \text{س}+\text{ل} & \text{ص}+\text{ع} \\ \text{ص} & \text{ص}+\text{ل} & \text{ع}+\text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل

$$\xrightarrow{\text{ع}_1+\text{ع}_3} \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ع}+\text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ \text{س} & \text{س}+\text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ \text{ص} & \text{ص}+\text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ع}_2-\text{ع}_3} \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ \text{س} & \text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ \text{ص} & \text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \end{vmatrix}$$

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

تابع س١٢

$$\text{ل}(\text{س}+\text{ص}+\text{ع})\begin{vmatrix} \text{ع} & 1 & 1 \\ \text{س} & 1 & 1 \\ \text{ص} & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \text{ل}(\text{س}+\text{ص}+\text{ع}) \times \text{صفر} = \text{صفر} \quad \#$$

(١٣) باستخدام خواص المحدد أثبت أنه :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{ج}^2 & \text{ب}^2 & \text{أ}^2 \\ \text{ج}^3 & \text{ب}^3 & \text{أ}^3 \end{vmatrix} = (\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{أ})(\text{أب}+\text{ب ج}+\text{ج أ})$$

الحل $\text{ع}_1 - \text{ع}_2$ ، $\text{ع}_2 - \text{ع}_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{ج}^2 & \text{ب}^2-\text{ج}^2 & \text{أ}^2-\text{ب}^2 \\ \text{ج}^3 & \text{ب}^3-\text{ج}^3 & \text{أ}^3-\text{ب}^3 \end{vmatrix}$$

* بأخذ أ-ب عامل مشترك من ع_1
* بأخذ ب-ج عامل مشترك من ع_2

$$(\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{ج})\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{ج}^2 & \text{ب}+\text{ج} & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{ج}^3 & \text{ب}^2+\text{ب ج}+\text{ج}^2 & \text{أ}^2+\text{أب}+\text{ب}^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{ج})\begin{vmatrix} \text{ب}+\text{ج} & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{ب}^2+\text{ب ج}+\text{ج}^2 & \text{أ}^2+\text{أب}+\text{ب}^2 \end{vmatrix}$$

وبفك المحدد لنحصل على

$$= (\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{أ})(\text{أب}+\text{ب ج}+\text{ج أ}) \quad \#$$

www.zohoralaqsa.com لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى

١٤) بدون فك المحدد أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & \text{ص} & \text{ص}^2 \\ 1 & \text{ع} & \text{ع}^2 \end{vmatrix} = (\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س})$$

الحل

$$\xrightarrow[\text{ص}_3-\text{ص}_2]{\text{ص}_2-\text{ص}_1} \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 0 & \text{ص}-\text{س} & \text{ص}^2-\text{س}^2 \\ 0 & \text{ع}-\text{ص} & \text{ع}^2-\text{ص}^2 \end{vmatrix}$$

مـ (ص − س) من الصف الثاني

مـ (ع − ص) من الصف الثالث

$$\Leftarrow (\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص}) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 0 & 1 & \text{ص}+\text{س} \\ 0 & 1 & \text{ع}+\text{ص} \end{vmatrix}$$

$$\Leftarrow (\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ص}+\text{س} \\ 1 & \text{ع}+\text{ص} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص})(\text{ع}+\cancel{\text{ص}}-\cancel{\text{ص}}-\text{س})$$

$$= -1 \times (\text{س}-\text{ص}) \times -1 \times (\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س})$$

$$= (\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س}) \quad \#$$

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

(١٥) أثبت بدون فك المحددات أنه

$$\begin{vmatrix} ل_1+م_1س & م_1س-ل_1 & ن_1 \\ ل_2+م_2س & م_2س-ل_2 & ن_2 \\ ل_3+م_3س & م_3س-ل_3 & ن_3 \end{vmatrix} = ٢س \begin{vmatrix} ل_1 & م_1 & ن_1 \\ ل_2 & م_2 & ن_2 \\ ل_3 & م_3 & ن_3 \end{vmatrix}$$

الحل

$$ع_1 - ع_2 \Longrightarrow \begin{vmatrix} ٢ل_1 & م_1س-ل_1 & ن_1 \\ ٢ل_2 & م_2س-ل_2 & ن_2 \\ ٢ل_3 & م_3س-ل_3 & ن_3 \end{vmatrix}$$

$$= ٢ \begin{vmatrix} ل_1 & م_1س-ل_1 & ن_1 \\ ل_2 & م_2س-ل_2 & ن_2 \\ ل_3 & م_3س-ل_3 & ن_3 \end{vmatrix}$$

$$ع_2 + ع_1 = ٢ \begin{vmatrix} ل_1 & م_1س & ن_1 \\ ل_2 & م_2س & ن_2 \\ ل_3 & م_3س & ن_3 \end{vmatrix}$$

$$= ٢س \begin{vmatrix} ل_1 & م_1 & ن_1 \\ ل_2 & م_2 & ن_2 \\ ل_3 & م_3 & ن_3 \end{vmatrix} \#$$

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

(16) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{بجـ} & \text{أجـ} & \text{أب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$$

الحل

*ملاحظة/ عند تبديل صفوف المحدد بأعمدة وأعمدة المحدد بنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{بجـ} & \text{أجـ} & \text{أب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{بجـ} \\ 1 & \text{ب} & \text{أجـ} \\ 1 & \text{جـ} & \text{أب} \end{vmatrix}$$

اضرب ص١ في $\frac{\text{أ}}{\text{أ}}$

اضرب ص٢ في $\frac{\text{ب}}{\text{ب}}$

اضرب ص٣ في $\frac{\text{جـ}}{\text{جـ}}$

$$\Leftarrow \frac{1}{\text{أبجـ}} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}^2 & \text{أبجـ} \\ \text{ب} & \text{ب}^2 & \text{أبجـ} \\ \text{جـ} & \text{جـ}^2 & \text{أبجـ} \end{vmatrix}$$

خذ أبجـ عامل مشترك من ع٣

$$\Leftarrow \frac{1}{\cancel{\text{أبجـ}}} \times \cancel{\text{أبجـ}} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}^2 & 1 \\ \text{ب} & \text{ب}^2 & 1 \\ \text{جـ} & \text{جـ}^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Leftarrow \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}^2 & 1 \\ \text{ب} & \text{ب}^2 & 1 \\ \text{جـ} & \text{جـ}^2 & 1 \end{vmatrix}$$

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

* تابع س ١٦

$$= -1 \times \left(\text{تبديل } ع_3 \text{ مع } ع_2\right) \begin{vmatrix} أ & 1 & أ^2 \\ ب & 1 & ب^2 \\ جـ & 1 & جـ^2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times -1 \left(\text{تبديل } ع_2 \text{ مع } ع_1\right) \begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 1 & ب & ب^2 \\ 1 & جـ & جـ^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 1 & ب & ب^2 \\ 1 & جـ & جـ^2 \end{vmatrix} \#$$

(١٧) استخدم خواص المحددات في إثبات أنه :-

$$\begin{vmatrix} س+ص+2 & س & ص \\ 1 & ص+2س+1 & ص \\ 1 & س & س+2ص+1 \end{vmatrix} = 2(س+ص+1)^3$$

الحل $ع_1 + ع_2 + ع_3 \longrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 2(س+ص+1) & س & ص \\ 2(س+ص+1) & ص+2س+1 & ص \\ 2(س+ص+1) & س & س+2ص+1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(س+ص+1) \begin{vmatrix} 1 & س & ص \\ 1 & ص+2س+1 & ص \\ 1 & س & س+2ص+1 \end{vmatrix}$$

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

تابع س١٧

$$\xrightarrow[\text{ص}_3-\text{ص}_1]{\text{ص}_2-\text{ص}_1} \text{٢}(\text{س}+\text{ص}+1)\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{ص} \\ 0 & \text{س}+\text{ص}+1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{س}+\text{ص}+1 \end{vmatrix}$$

$$= \text{٢}(\text{س}+\text{ص}+1)^{3} \quad \#$$

(١٨) باستخدام خواص المحددات أثبت أنه:

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix} = (\text{س}-\text{أ})(\text{س}-\text{ب})(\text{س}+\text{أ}+\text{ب})$$

الحل

$$\xrightarrow{\text{ع}_1+\text{ع}_2+\text{ع}_3} \begin{vmatrix} \text{س}+\text{أ}+\text{ب} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{س}+\text{أ}+\text{ب} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{س}+\text{أ}+\text{ب} & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ 1 & \text{س} & \text{ب} \\ 1 & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{ص}_2-\text{ص}_3]{\text{ص}_1-\text{ص}_2} (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})\begin{vmatrix} 0 & \text{أ}-\text{س} & 0 \\ 0 & \text{س}-\text{ب} & \text{ب}-\text{س} \\ 1 & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix}$$

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

تابع س ١٨

$$(\text{س}+\text{أ}+\text{ب})\begin{vmatrix} \cdot & \text{أ}-\text{س} \\ \text{ب}-\text{س} & \text{س}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$\Leftarrow (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}-\text{س})(\text{ب}-\text{س})$$

$$= (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})(\text{س}-\text{أ})(\text{س}-\text{ب}) \quad \#$$

(١٩) باستخدام خصائص المحددات أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & 1 \\ \text{أ} & \text{ب} & 1 \\ -\text{ب} & \text{أ} & 1 \end{vmatrix} = (\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}-\text{ب})$$

الحل

ص٢ − ص١ و ص٣ − ص١

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & 1 \\ \cdot & \text{ب}-\text{أ} & \cdot \\ -\text{ب}-\text{أ} & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = (\text{ب}-\text{أ})(-\text{ب}-\text{أ}) = -(\text{أ}-\text{ب}) \times -(\text{أ}+\text{ب})$$

$$= (\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}-\text{ب}) \quad \#$$

(٢٠) بدون فك المحدد أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ}^2 & \text{ب ج} \\ \text{ب}^2 & \text{ج أ} & \text{ب}^2 \\ \text{أ ب} & \text{ج}^2 & \text{ج}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ ج} & \text{أ}(\text{ب}-\text{ج}) & \text{ب}(\text{ج}-\text{أ}) \\ \text{ب ج} & \text{ج}(\text{أ}-\text{ب}) & \text{أ}(\text{ب}-\text{ج}) \\ \text{أ ب} & \text{ب}(\text{ج}-\text{أ}) & \text{ج}(\text{أ}-\text{ب}) \end{vmatrix}$$

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

الحل

الطرف الأيمن

$ع_1 + ع_2 + ع_3$ ، $ع_2 + ع_3$

$$\begin{vmatrix} \text{جـأ} & \text{أب} & \text{بجـ} \\ \text{بجـ} & \text{جـأ} & \text{أب} \\ \text{أب} & \text{بجـ} & \text{جـأ} \end{vmatrix} \xleftarrow{\substack{ص_1 \times \frac{أ}{أ} \\ ص_2 \times \frac{ب}{ب} \\ ص_3 \times \frac{جـ}{جـ}}} \frac{1}{\text{أبجـ}} \begin{vmatrix} \text{جـأ}^2 & \text{أ}^2\text{ب} & \text{أبجـ} \\ \text{ب}^2\text{جـ} & \text{أبجـ} & \text{أب}^2 \\ \text{أبجـ} & \text{بجـ}^2 & \text{جـ}^2\text{أ} \end{vmatrix}$$

عامل مشترك

$ع_1 \leftarrow أ$

$ع_2 \leftarrow ب$

$ع_3 \leftarrow جـ$

$$\xleftarrow{} \frac{1}{\cancel{\text{أبجـ}}} \times \cancel{\text{أبجـ}} \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ}^2 & \text{بجـ} \\ \text{ب}^2 & \text{أجـ} & \text{ب}^2 \\ \text{أب} & \text{جـ}^2 & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ}^2 & \text{بجـ} \\ \text{ب}^2 & \text{أجـ} & \text{ب}^2 \\ \text{أب} & \text{جـ}^2 & \text{جـ}^2 \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيسر}$$ #

www.zohoralaqsa.com لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى

(21) أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{ب}+\text{جـ} & \text{جـ}+\text{أ} & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{ل}+\text{م} & \text{م}+\text{ك} & \text{ك}+\text{ل} \\ \text{ص}+\text{ع} & \text{ع}+\text{س} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ك} & \text{ل} & \text{م} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

(الحل)

الطرف الأيمن /

$ع_1 + -ع_2 + ع_3$

$$\begin{vmatrix} 2\text{ب} & \text{جـ}+\text{أ} & \text{أ}+\text{ب} \\ 2\text{ل} & \text{م}+\text{ك} & \text{ك}+\text{ل} \\ 2\text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix}$$

2 عامل مشترك من $ع_1$

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{جـ}+\text{أ} & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{ل} & \text{م}+\text{ك} & \text{ك}+\text{ل} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix}$$

$ع_3 - ع_1$

$$2 \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{جـ}+\text{أ} & \text{أ} \\ \text{ل} & \text{م}+\text{ك} & \text{ك} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{س} \end{vmatrix}$$

$ع_2 - ع_3$

$$2 \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ك} \\ \text{ص} & \text{ع} & \text{س} \end{vmatrix}$$

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

تابع س٢١

$$= -\text{م} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} & \text{أ} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ك} \\ \text{ص} & \text{ع} & \text{س} \end{vmatrix}$$

$$= -١ \times -١ \times \text{م} \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{م} & \text{ل} & \text{ك} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$$

$$= \text{م} \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{م} & \text{ل} & \text{ك} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} \#$$

(٢٢) حل المعادلة الآتية

$$\begin{vmatrix} ٣ & \text{س} \\ ٢\text{س} & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٥ & \text{س} & ٣ \\ \text{س}+١ & ٠ & ١- \end{vmatrix}$$

(الحل) باستخدام خصائص المحددات للطرف الأيمن

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٥ & \text{س} & ٣ \\ \text{س}+٢ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} \xleftarrow{\text{ص}_٣ + \text{ص}_١} \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٥ & \text{س} & ٣ \\ \text{س}+١ & ٠ & ١- \end{vmatrix}$$

www.zohoralaqsa.com لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى

تابع س٢٢

نفك المحدد باستخدام ص٣ ⟸ (س+٢) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٠} \\ \text{٣} & \text{س} \end{vmatrix}$

= (س+٢)(س − ٠) = س² + ٢س

الطرف الأيسر

$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{٣} \\ \text{١} & \text{٢س} \end{vmatrix}$ = ٢س² − ٣

نساوي الطرف الأيمن بالأيسر

س² + ٢س = ٢س² − ٣ ⟸ س² − ٢س − ٣ = ٠

⟸ (س − ٣)(س + ١) = ٠

⟸ س = ٣ ، س = −١

(٢٣) أثبت باستخدام خصائص المحددات أنه

$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$ = (أ+٢ب)(أ−ب)²

الحل ع١ + ع٢ ، ع١ + ع٣ ⟸ $\begin{vmatrix} \text{أ+٢ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{أ+٢ب} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ+٢ب} & \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$ عامل مشترك من ع١ ⟸ (أ+٢ب) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{١} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{١} & \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$

لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى www.zohoralaqsa.com

$$= \xrightarrow[\text{ص}_3 - \text{ص}_1]{\text{ص}_2 - \text{ص}_1} (\text{أ} + ٢\text{ب}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{ب} \\ ٠ & \text{أ} - \text{ب} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{أ} - \text{ب} \end{vmatrix}$$

نفك المحدد من خلال ضرب عناصر القطر الرئيسي

$$= (\text{أ} + ٢\text{ب})\,(١)\,(\text{أ} - \text{ب})\,(\text{أ} - \text{ب})$$

$$= (\text{أ} + ٢\text{ب})\,(\text{أ} - \text{ب})^2 \quad \#$$

www.zohoralaqsa.com لتحميل المزيد زوروا موقع زهور الأقصى