رياضيات الثاني عشر علمي

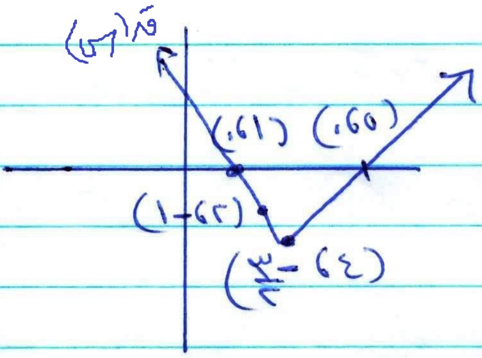
اختبار الوحدة الثانية (تطبيقات التفاضل)

مراجعات دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الثانية (تطبيقات التفاضل)

مراجعات دفعة 2004



① إذا كان ق(س) يحقق شروط رول على [١، ٦] معتمدًا على الشكل المجاور فإن قيمة/ قيم جـ الناتجة عن النظرية

أ) ٢، ٤   ب) ١، ٥   جـ) ١، ٢، ٤، ٥   د) ٥

② إذا كان ق(س) = س^{٢} - ٣س - ب يحقق شروط نظرية رول على الفترة [-٢، ب] فإن قيمة الثابت ب

أ) ١   ب) ٢   جـ) ٤   د) ٥

③ أي الاقترانات التالية تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على [-٢، ٢]

أ) ق(س) = [س + ٢]   ب) ق(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}$

جـ) ق(س) = |س^{٢} + ٢س + ١| د) ق(س) = (٢س - ١)$^{\frac{١}{٣}}$

④ إذا كانت قيمة جـ التي تعينها نظرية القيمة المتوسطة للاقتران

ق(س) = $(\text{لو}_{هـ} س)^2$ − $\text{لو}_{هـ}$ س في الفترة [١ ، ب] تساوي

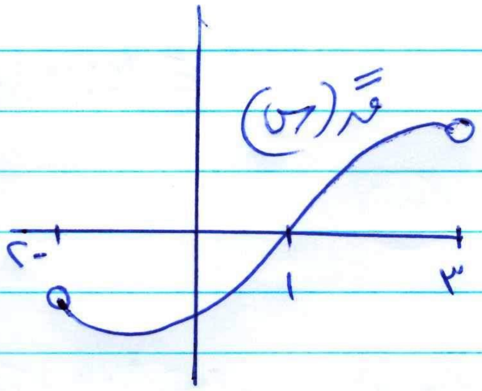
$\sqrt{هـ}$ فإن قيمة ب =

أ) هـ   ب) $هـ^2$ جـ) ٢هـ   د) −هـ

⑤ بالاعتماد على منحنى قَ(س) المجاور

حيث ق(س) متصل في [−٢ ، ٣]

وقَ(−١) = قَ(٢) = ٠ جد:



أ) ق(س) مقعر للأعلى في الفترة

أ)]١ ، ٣[ب)]−٢ ، ١[جـ)]−٢ ، ٣[د)]١ ، ∞[

ب) لـ ق(س) قيمة عظمى عند س =

أ) ٢   ب) −١   جـ) ١   د) −٢

جـ) ق(س) متناقص في الفترة

أ)]−∞ ، −١]   ب) [−١ ، ٢]   جـ) [٢ ، ∞[د) [−٢ ، ٣]

٦) إذا كان د(س) = س $\sqrt{٤ - س^٢}$ فإن أصغر قيمة للاقتران د(س) هي:

أ) ٢　　ب) -٢　　جـ) $\sqrt{٢}$　　د) -$\sqrt{٢}$

٧) إذا كان د(س) = $\sqrt[٣]{س^٢}$ ، س ∈ [-١، ١] فإن النقطة الحرجة لـ د(س) هي:

أ) (-١، ١)　　ب) (١، ١)　　جـ) (٠، ١)　　د) (١، ٠)

٨) إذا كانت قَ(١) = قَ(٣) = ٠ ، وكان منحنى قَ(س) يقع فوق محور السينات ∀ س ∈]٢، ٤[أي العبارات التالية صحيحة دائماً:

أ) ق(١) عظمى محلية　　ب) ق(١) صغرى محلية

جـ) ق(٣) عظمى محلية　　د) ق(٣) صغرى محلية

٩) إذا كان د(س) = |١ - س^٢| ، س ∈]٠، ٢[فإن الإحداثيات السينية للنقاط الحرجة

أ) {-١، ١، ٠}　　ب) {-١، ١، ٠، ٢}　　جـ) {٠، ١، ٢}　　د) {١}

(١٠) إذا كان ص = ٢س يمس منحنى ق(س) = (س^٢ - ٢س)(أس + ب) عند نقطة الأصل وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند النقطة (١، ٢) فإن أ، ب على الترتيب

أ) -١، ١ ب) ١/٢، -١ ج) ١، -١ د) ١/٢، -١/٢

(١١) دائرة طول قطرها أب يساوي ٤ سم، بدأت النقطة ج الحركة على الدائرة من ب باتجاه أ فإن قياس الزاوية أ ب ج التي تجعل مساحة المثلث أ ب ج أكبر ما يمكن

أ) π/٢ ب) π/٣ ج) π/٦ د) π/٤

(١٢) إذا كان ق(س) = ٣(أ - ٢)س^٢ + ٨س - ٥ فما قيمة الثابتة أ التي تجعل المنحنى يقع أعلى مماساته.

أ) أ < ٢ ب) أ > ٢ ج) أ > ١٢ د) أ < ١٢

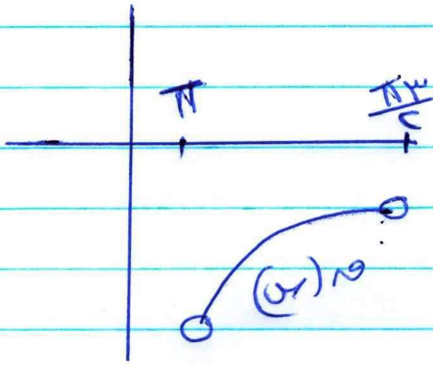
(١٣) إذا كانت زاوية الانعطاف للاقتران ق(س) = س^٣ + ٣س^٢ + أس هي ٣π/٤ فإن قيمة الثابتة أ =

أ) -١ ب) ٢ ج) -٢ د) ٣

(١٤) إذا كان ق(س) كثير حدود له قيمة عظمى محلية عند النقطة (١، ٤) وكان هـ(س) = $(١ - ق(س))^٣$ فإن إحدى العبارات التالية صحيحة:

(أ) هـ''(١) > ٠ (ب) هـ''(١) < ٠ (ج) هـ''(١) = ٠ (د) هـ''(١) غ.م

(١٥) في الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق(س) في الفترة $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$



فإن منحنى هـ(س) = $\frac{\text{س ظا س}}{\text{ق(س)}}$ في الفترة $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$

(أ) متناقص في $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$ (ب) متزايد في $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$

(ج) متناقص في $[\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$ (د) متزايد في $[\pi ، \frac{٣\pi}{٢}]$

حلول أسئلة اختبار الوحدة الثانية

مراجعات دفعة 2024

(١) الشكل يمثل منحنى قَ(س)

∵ ق(س) يحقق رول ⟸ توجد جـ ∈]١، ٦[بحيث

قَ(جـ) = ٠ وذلك عند س = ١ ، س = ٥ ← فرع (د)

س = ١ مرفوض ∉]١، ٦[

(٢) ق(س) = س² − ٣س − ب

∵ ق(س) يحقق رول ⟸ ق(−٢) = ق(ب)

⟸ ٤ + ٦ − ب = ب² − ٣ب − ب

⟸ ١٠ − ب = ب² − ٤ب

⟸ ب² − ٣ب − ١٠ = ٠

⟸ (ب − ٥)(ب + ٢) = ٠

∴ ب = ٥ ، ب = −٢ مرفوض لأنه ب ∈ [−٢، ب]

③ تحقق شروط القيمة المتوسطة

أي نبحث عن الاقتران المتصل على [-٢،٢] وقابل للاشتقاق على

]-٢،٢[

④ غير متصل (X) ← غير قابل للاشتقاق .

ب) $\sqrt{(\text{س}+١)^٢} = |(\text{س}+١)|$ متصل على [-٢،٢] ولكنه

غير قابل للاشتقاق عند س = -١

جـ) $|(\text{س}+١)|^٢ = (\text{س}+١)^٢$

متصل وقابل للاشتقاق (كثير حدود)

د) متصل لكنه غير قابل للاشتقاق على]-٢،٢[

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٣}(٢\text{س}-١)^{-\frac{٢}{٣}} \times ٢ = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{(٢\text{س}-١)^٢}}$

عند س = $\frac{١}{٢}$ ← ق(س) غير قابل للاشتقاق حيث $\frac{١}{٢}$ ∈]-٢،٢[

← ق(س) غير قابل للاشتقاق على]-٢،٢[

(٤) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

$\text{قَ}(\text{س}) = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \times \frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}}$

$\text{قَ}(\text{جـ}) = \frac{\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(١)}{\text{ب} - ١}$ ، $\text{جـ} = \sqrt{\text{هـ}}$

$\Leftarrow \text{قَ}(\sqrt{\text{هـ}}) = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب})^{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب} - \cancel{\left[(\text{لو}_{\text{هـ}}\,١)^{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,١\right]}^{\text{صفر}}}{\text{ب} - ١} \longrightarrow (*)$

لكن $\text{قَ}(\sqrt{\text{هـ}}) = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{هـ}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}}} - \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}}} = \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}}}\left[٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{هـ}} - ١\right]$

$= \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}}}\left[\cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} - ١\right]$

$=$ صفر

عوض عن $\text{قَ}(\sqrt{\text{هـ}})$ في (*)

$٠ = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب})^{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب}}{\text{ب} - ١} \Leftarrow ٠ = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب} - ١\right]}{\text{ب} - ١}$

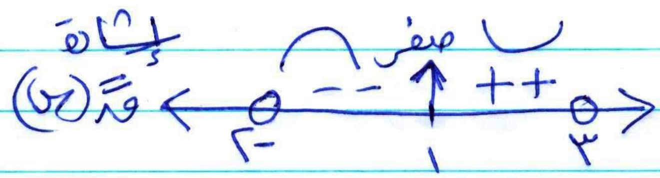
$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب} - ١\right] = ٠$

$\Leftarrow$ إما $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب} = ٠$ أو $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب} - ١ = ٠$

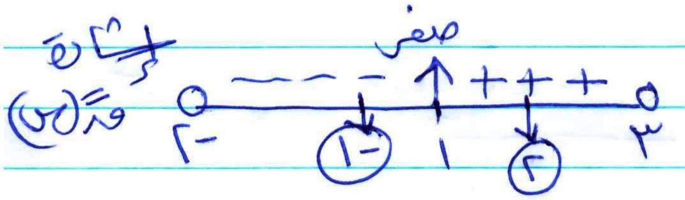
$\Leftarrow \text{ب} = ١$ (X) أو $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب} = ١ \Leftarrow \text{ب} = \text{هـ}$ فرع (أ)

مرفوض لأنه $[١، \text{ب}]$

(٥)



(أ) د(س) متزايد لأنه في الفترة]١، ٣[فرع (أ)



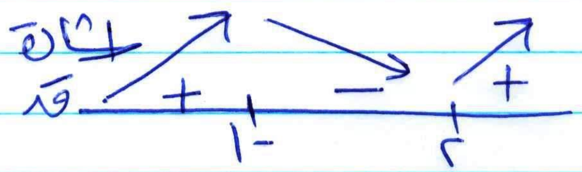
(ب) د̀(-١) = صفر

د̀̀(-١) < صفر

∴ توجد قيمة عظمى عند س = -١ فرع (ب)

د̀(٢) = ٠

د̀̀(٢) > ٠ ⟸ توجد قيمة صغرى عند س = ٢



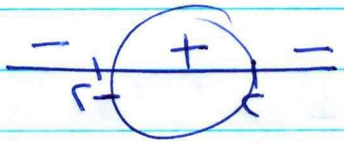
(ج) د(س) متناقص على

الفترة [-١، ٢] فرع (ب)

(٦) د(س) = س $\sqrt{٤ - س^٢}$

أولاً / نحدد مجال د(س)

٤ - س^٢ ≥ ٠ ⟸ ٤ - س^٢ = ٠ ⟸ س = ±٢



مجال د(س) هو [-٢، ٢]

∵ د(س) متصل على [-٢، ٢]

∴ له قيمة عظمى مطلقة وصغرى مطلقة.

قَ(س) = س × $\frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^٢}}$ + $\sqrt{٤ - س^٢}$ × ١

قَ(س) = $\frac{-س^٢}{\sqrt{٤ - س^٢}}$ + $\sqrt{٤ - س^٢}$ = ٠

⇐ $\frac{س^٢}{\sqrt{٤ - س^٢}}$ = $\frac{\sqrt{٤ - س^٢}}{١}$

⇐ $س^٢$ = ٤ - $س^٢$ ⇐ ٢$س^٢$ = ٤ ⇐ س = ± $\sqrt{٢}$

إشارة قَ(س)	-٢		-$\sqrt{٢}$		$\sqrt{٢}$		٢
	غ.م	- - - -	صفر	+ + +	صفر	- - -	غ.م

✓ عند س = -٢ قيمة عظمى محلية هي ق(-٢) = ٠

✓ عند س = -$\sqrt{٢}$ قيمة صغرى محلية هي ق(-$\sqrt{٢}$) = -٢

✓ عند س = $\sqrt{٢}$ قيمة عظمى محلية هي ق($\sqrt{٢}$) = ٢

✓ عند س = ٢ قيمة صغرى محلية هي ق(٢) = ٠

∴ القيمة العظمى المطلقة لـ ق(س) = ٢ ⇐ أكبر قيمة.

و القيمة الصغرى المطلقة لـ ق(س) = -٢ ⇐ أصغر قيمة ← فرع (ب)

⑦ $ق(س) = \sqrt[3]{س^٢}$ ، $س \in [-١ ، ١]$

$ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}} \Leftarrow قَ(س) = \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣\sqrt[3]{س}}$

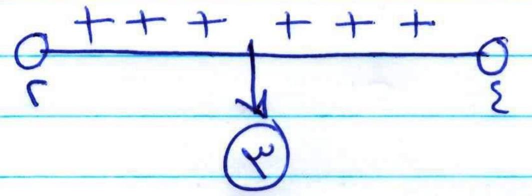
$قَ(٠) \nexists$. لأن $٢ \neq ٠$.

قَ(س) غ.م عند س = ٠ .

∴ النقطة الحرجة الوحيدة هي (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠) فرع (جـ)

⑧ قَ(١) = ٠

إشارة قَ(س)

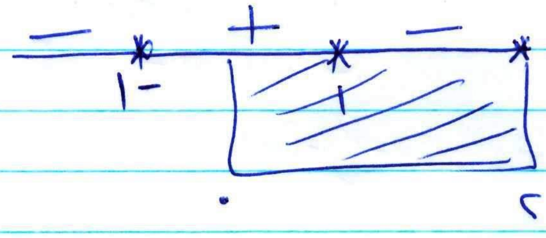


$\left\{ \begin{array}{l} قَ(٣) = ٠ \\ قً(٣) > ٠ \end{array} \right.$

⇐ توجد قيمة صغرى عند س = ٣ قيمتها ق(٣) فرع (د)

⑨ $ق(س) = |١ - س^٢|$ ، $س \in [٠ ، ٢]$

$١ - س^٢ = ٠ \Leftarrow س = \pm ١$



$\therefore ق(س) = \left\{ \begin{array}{ll} ١ - س^٢ ، & ٠ \le س \le ١ \\ س^٢ - ١ ، & ١ < س \le ٢ \end{array} \right.$

ق(س) متصل عند س = ١ (تحقق من ذلك) .

ق'(س) = { -٢س ، ٠ < س < ١
٢س ، ١ < س < ٢
غ.م ، س = ٠ ، ٢ ، ١ ← ق'(١)+ ≠ ق'(١)-

أطراف فترة

∴ الاحداثيات السينية للنقاط الحرجة {٠ ، ١ ، ٢} فرع ج

(١) معادلة المماس ص = ٢س ⇐ ميل المماس ص' = ٢

كذلك ميل المماس = ق'(٠)

ق'(س) = (س^٢ - ٢س) × أ + (أس + ب)(٢س - ٢)

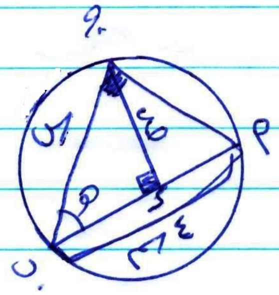
ق'(٠) = ٠ - ٢ب = -٢ب

ق'(٠) = ٢ ⇐ -٢ب = ٢ ⇐ ب = -١

∵ النقطة (٢ ، ٠) نقطة قيمة صغرى ⇐ ق'(٢) = ٠

⇐ ٠ × أ + (٢أ - ١) × ٢ = ٠ ⇐ أ = $\frac{1}{2}$

∴ أ = $\frac{1}{2}$ ، ب = -١ فرع ب



∡ هـ التي تجعل مساحة ∆ أ جـ ب أكبر ما يمكن

مساحة ∆ = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × ع

= $\frac{1}{2}$ × ٤ × ع

= $\frac{1}{2}$ × ٤ × س جا هـ

= ٢ س جا هـ ← (*)

في ∆ أ د ب
جا هـ = $\frac{ع}{س}$

في ∆ أ جـ ب

جتا هـ = $\frac{س}{٤}$ ⇐ س = ٤ جتا هـ ← (**)

بالتعويض من (**) في (*)

م = ٢ × ٤ × جتا هـ جا هـ = ٤ × ٢ جتا هـ × جا هـ

⇐ م = ٤ جا ٢هـ

∴ م' = ٨ جتا ٢هـ = ٠ ⇐

⇐ جتا ٢هـ = ٠ ⇐ ٢هـ = $\frac{\pi}{2}$ ⇐ هـ = $\frac{\pi}{4}$ ✓

أو ٢هـ = $\frac{3\pi}{2}$ ⇐ هـ ≠ $\frac{3\pi}{4}$

مرفوضة لأنه الزاوية في مثلث قائم

م'' = −١٦ جا ٢هـ ⇐ م''($\frac{\pi}{4}$) = −١٦ جا $\frac{\pi}{2}$ = −١٦ < ٠

∴ توجد عند هـ = $\frac{\pi}{4}$ قيمة عظمى مطلقة منع (د)

(١٢) د(س) = ٣(أ − ٢) س٢ + ٨س − ٥

دَ(س) = ٦(أ − ٢) س + ٨

دً(س) = ٦(أ − ٢) > ٠

يكون د(س) مقعر للأعلى عندما دً(س) > ٠

٦(أ − ٢) > ٠

٦أ − ١٢ > ٠ ⟸ ٦أ > ١٢

⟸ أ > ٢ منع (ب)

(١٣) د(س) = س٣ + ٣س٢ + أس ، زاوية الانعطاف $\frac{3\pi}{4}$

تذكر/ إذا كانت جـ الإحداثي السيني لنقطة الانعطاف، (هـ) زاوية الانعطاف ⟸ ظاهـ = دَ(جـ)

(الحل) دَ(س) = ٣س٢ + ٦س + أ

دً(س) = ٦س + ٦ = ٠ ⟸ س = (−١)

الإحداثي السيني لنقطة الانعطاف س = (−١)

∴ ظا ($\frac{3\pi}{4}$) = دَ(−١)

⇐ −١ = ٣ − ٦ + أ ⇐ −١ = −٣ + أ ⇐ أ = ٢ فرع (ب)

(١٤) (١،٤) نقطة عظمى محلية

⇐ ق′(١) = ٠

ق″(١) < ٠

هـ′(س) = ٣(١ − ق(س))² × −ق′(س)

= −٣(١ − ق(س))² × ق′(س)

هـ″(س) = −٣(١ − ق(س))² × ق″(س) + ق′(س) × −٦(١ − ق(س))

× −ق′(س)

صفر

هـ″(١) = −٣(١ − ق(١))² × ق″(١) + ~~ق′(١) × −٦(١ − ق(١))~~ × −ق′(١)

= (−) × (+) × (−) > ٠

⇐ هـ″(١) > ٠ فرع (أ)

(15) $ه(س) = \frac{س ظا س}{ق(س)}$

$$هَ(س) = \frac{ق(س) \times (س \times قا^2 س + ظا س \times 1) - س ظا س \times قَ(س)}{(ق(س))^2}$$

لكن ق(س) < ٠ في الفترة]π ، ٣π/٢[لأنه منحناه يقع في الربع الرابع

قا² س > ٠ في الفترة]π ، ٣π/٢[مربع

س > ٠ في الفترة]π ، ٣π/٢[

ظا س > ٠ في الفترة]π ، ٣π/٢[لأنه في الربع الثالث

قَ(س) > ٠ في الفترة]π ، ٣π/٢[لأن ق(س) متزايد

$$\therefore هَ(س) = \frac{⊖ \times (⊕ + ⊕ \times ⊕) - ⊕ \times ⊕}{⊕}$$

$$= \frac{⊖ \times ⊕ - ⊕}{⊕} = \frac{⊖}{⊕} = ⊖$$

∴ هَ(س) < ٠ ⟸ ه(س) متناقص على]π ، ٣π/٢[