رياضيات الثاني عشر علمي

اختبار الوحدة الرابعة (التكامل غير المحدود وتطبيقاته)

مراجعات دفعة ٢٠٢٢

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الرابعة (التكامل غير المحدود وتطبيقاته)

مراجعات - دفعة 2004

① إذا كان $\int ق(س)\,د س = س^{٢} - ب س + ٢$ ، فما قيمة $ق(١)$ ؟

(أ) -٣ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) ٢

② إذا كان ماس $ق(س)$ يقطع محور الصادات عند $س = ١$ ، $ص = \frac{٤}{٣}$

فإذا علمت أن $س^{٤} \times (ق'(س) - ١٨) = ١٩٢$ عند أي نقطة

على $(س، ص)$ فإن قاعدة الاقتران $ق(س)$ هي :

(أ) $ق(س) = ٣٢ س^{٢} + ٩ س - ٢١ س^{٣} - ٦ س$

(ب) $ق(س) = ٣٢ س^{٢} - ٩ س^{٢} + ٢١ س$

(جـ) $ق(س) = -٣٢ س^{٢} - ٩ س^{٢} + ٢١ س + ٦ س$

(د) $ق(س) = ٣٢ س^{٢} + ٩ س^{٢} + ٢١ س - ٦ س$

③ $\int \frac{س ق'ا س - س ظا^{٢} س}{\sqrt{س^{٣}}}\,د س =$

(أ) $\frac{١}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ج$ (ب) $\frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ج$

(جـ) $-\frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + ج$ (د) $-\frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ج$

④ $\int (س قتا^2 س + ظا س) \, د س =$

(أ) ظتا س + ج (ب) س ظا س + ج

(ج) − س ظتا س + ج (د) − س ظا س + ج

⑤ إذا كان هـ(س) ، م(س) اقترانين أصليين للاقتران هـ(س)

حيث م(س) = أ س² − ٦ س − ٣ ، هـ(س) = ب س + ٦

فما قيم الثابتين أ ، ب على الترتيب ؟

(أ) صفر ، −٦ (ب) ١٩ ، −٦ (ج) ١٩ ، ٦ (د) صفر ، ٦

⑥ قيمة $\int هـ^{س} \left(لو_{هـ} س + \frac{1}{س} \right) د س =$

(أ) هـ^س + ج (ب) لو_هـ س + ج

(ج) هـ^س + لو_هـ س + ج (د) هـ^س لو_هـ س + ج

⑦ قيمة $\int \frac{\sqrt{س}}{1 - س \sqrt{س}} \, د س =$

(أ) $\frac{2}{3}$ لو_هـ |١ + √س^٣| + ج (ب) $\frac{-2}{3}$ لو_هـ |١ − √س^٣| + ج

(ج) لو_هـ |١ + √س^٣| + ج (د) $\frac{2}{3}$ √س^٣ + ج

⑧ قيمة $\int 2(1-2س)^{12}\,د س =$

أ) $-\frac{1}{13}(1-2س)^{13}+ج$ ب) $\frac{1}{13}(1-2س)^{13}+ج$

ج) $-8(1-2س)^{11}+ج$ د) $32(1-2س)^{11}+ج$

⑨ إذا كان $ه(س)$ اقترانًا متصلًا على $ح$ وكان

$\int (ه(س)+2)\,د س = س^3+ب س^2+9$ ، $ه(1)=7$

فإن قيمة الثابت ب =

أ) 2 ب) 6 ج) 3 د) -1

⑩ إذا علمت أن $\int ه(س)\,د س = |ا-11|س^2+3$ ، حيث $ا>0$

، $ه(2)=10$ فإن قيمة ا =

أ) 6 ب) 4 ج) 9 د) 11

⑪ $\int \frac{1-جا 2س}{جا س - جتا س}\,د س =$

أ) $-جتا س - جا س + ج$ ب) $-جتا س + جا س + ج$

ج) $جتا س + جا س + ج$ د) $جتا س - جا س + ج$

(١٢) $\int \left(\frac{\text{جتا}\, س}{س^2} + \frac{\text{جا}\, س}{س} \right) \, د س =$

(أ) $\frac{\text{جتا}\, س}{س} + ج$ (ب) $\frac{\text{جا}\, س}{س} + ج$

(ج) $-\frac{\text{جتا}\, س}{س} + ج$ (د) $-\frac{\text{جا}\, س}{س} + ج$

(١٣) قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة مقدارها ٤٠ م/ث وبتسارع مقداره (-١٠ م/ث^2) فإذا كان ارتفاع الجسم عند سطح الأرض بعد ثانية من حركته يساوي (٨٠ م) فإن أقصى ارتفاع يصله الجسم عن سطح الأرض

(أ) ١٤٥ م (ب) ١٢٥ م (ج) ١١٥ م (د) ١١٠ م

* حلول أسئلة اختبار الوحدة الرابعة

مراجعات - دفعة 2004 *

① $\int d(س)\,ds = س^2 - ظا س + ج$ الصورة الطرفية

$d(س) = س^2 + جا س$

$d'(س) = 2س + ظا س$

$d'(0) = 2(0) + ظا(0) = 1$ ③ فرع ب

② منحنى $d(س)$ يقطع محور السينات عند $س = 1$ ، $س = \frac{4}{3}$

$س^4 \times (d'(س) - 18) = 192$

$\Leftarrow d'(س) - 18 = 192 س^{-4}$

$d'(س) = 192 س^{-4} + 18$ كامل الطرفية

$d(س) = \int (192 س^{-4} + 18)\,ds$

$= \frac{192 س^{-3}}{-3} + 18س + ج_1$

$= -64 س^{-3} + 18س + ج_1$ كامل مرة ثانية

$d(س) = 32 س^{-2} + 9س^2 + ج_1 س + ج_2$

$d(1) = 0 \Leftarrow 32 + 9 + ج_1 + ج_2 = 0$

$\Leftarrow ج_1 + ج_2 = -41$ ← (*)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}} \quad \text{نضرب البسط والمقام في } x^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \int \frac{x^{-\frac{1}{3}}\,dx}{x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}+1} = \int \frac{x^{-\frac{1}{3}}\,dx}{x^{\frac{1}{6}}+1}$$

$$x = u^6 \Rightarrow dx = 6u^5\,du$$

$$= \int \frac{u^{-2}\cdot 6u^5\,du}{u^2+1} = \int \frac{6u^3}{u^2+1}\,du$$

$$= 6\int \frac{u^3+u-u}{u^2+1}\,du = 6\int \frac{u(u^2+1)-u}{u^2+1}\,du$$

$$= 6\int u\,du - 6\int \frac{u}{u^2+1}\,du$$

$$= 3u^2 - 3\ln(u^2+1) + c$$

$$= \boxed{3x^{\frac{1}{3}} - 3\ln(x^{\frac{1}{3}}+1) + c}$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)}$$

$$x = u^4 \Rightarrow dx = 4u^3\,du$$

$$= \int \frac{4u^3\,du}{u(u+1)} = 4\int \frac{u^2}{u+1}\,du$$

$$= 4\int \frac{u^2-1+1}{u+1}\,du = 4\int \frac{(u-1)(u+1)+1}{u+1}\,du$$

$$= 4\int (u-1)\,du + 4\int \frac{1}{u+1}\,du$$

$$= 2u^2 - 4u + 4\ln(u+1) + c$$

$$= \boxed{2x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln(x^{\frac{1}{4}}+1) + c}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\right)}$$

$$x = u^6 \Rightarrow dx = 6u^5\,du$$

$$= \int \frac{6u^5\,du}{u^3(u^2-u^3)} = \int \frac{6u^2}{u^2(1-u)}\,du$$

$$= 6\int \frac{1}{1-u}\,du = -6\ln|1-u| + c$$

$$= \boxed{-6\ln|1-x^{\frac{1}{6}}| + c}$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}$$

$$x = u^6 \Rightarrow dx = 6u^5\,du$$

$$= \int \frac{6u^5\,du}{u^3-u^2} = 6\int \frac{u^3}{u-1}\,du$$

$$= 6\int \frac{u^3-1+1}{u-1}\,du = 6\int \frac{(u-1)(u^2+u+1)+1}{u-1}\,du$$

$$= 6\int (u^2+u+1)\,du + 6\int \frac{1}{u-1}\,du$$

$$= 2u^3 + 3u^2 + 6u + 6\ln|u-1| + c$$

$$= \boxed{2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 6\ln|x^{\frac{1}{6}}-1| + c}$$

⑤ $هـ(س)$ ، $م(س)$ اقترانيه أصليين لـ $د(س)$

$\Leftarrow$ $م(س) = د(س)$ ، $هـ(س) = د(س)$

$\Leftarrow$ $م(س) = هـ(س)$

$\Leftarrow$ $٢أ س - ٦ = ب$ (بالتجربة من الخيارات)

$أ = ٠$ ، $ب = -٦$ هي التي تحقق المعادلة

$(٢س \times ٠ - ٦ = -٦)$ ✓ $\Leftarrow$ $أ = ٠$ ، $ب = -٦$ فرع (أ)

⑥ $\int هـ^{س} \left(لو_{هـ} س + \frac{١}{س}\right) د س$

$= \int هـ^{س} لو_{هـ} س + \frac{هـ^{س}}{س} د س = \int هـ^{س} لو_{هـ} س \, د س + \int \frac{هـ^{س}}{س} د س$

يتكامل بالأجزاء

$ع = لو_{هـ} س$ ، $د ع = \frac{١}{س} د س$

$د ف = هـ^{س} د س$ ، $ف = هـ^{س}$

$\int هـ^{س} لو_{هـ} س \, د س = هـ^{س} لو_{هـ} س - \int \frac{هـ^{س}}{س} د س$

$\therefore \int هـ^{س} \left(لو_{هـ} س + \frac{١}{س}\right) د س = هـ^{س} لو_{هـ} س - \int \frac{هـ^{س}}{س} د س + \int \frac{هـ^{س}}{س} د س$

$= \boxed{هـ^{س} لو_{هـ} س + ج}$ فرع (ب)

⑦ $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1-x\sqrt[3]{x}}\,dx$

افرض $u = \sqrt[3]{x} \Leftarrow u^3 = x \Leftarrow 3u^2\,du = dx$

$\Leftarrow 3u^2\,du = dx$

$\therefore \int \frac{\sqrt[3]{x}}{1-x\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{u}{1-u^3} \times 3u^2\,du$

$= \int \frac{3u^3}{1-u^3}\,du$

افرض $v = 1-u^3 \Leftarrow \frac{dv}{du} = -3u^2 \Leftarrow du = \frac{dv}{-3u^2}$

$\therefore \int \frac{3u^3}{1-u^3}\,du = \int \frac{3u^3}{v} \times \frac{dv}{-3u^2} = \int -\frac{1}{v}\,dv$

$= -\ln|v| + c$

$= -\ln|1-u^3| + c = -\ln|1-(\sqrt[3]{x})^3| + c$

$= -\ln|1-\sqrt[3]{x^3}| + c$

$(\sqrt[3]{x})^3 = (x^{\frac{1}{3}})^3 = x^{\frac{3}{3}}$

$\sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}}$

فرع ⑤

(b)

(d) في:

$\Rightarrow \boxed{d=1}$ ✓ $\quad d=-3$ ✗ (مرفوض لأن d أكبر من 1)

ولما $d=1$ فإن $|1-\rho|=0$

$\therefore |1-\rho|=0 \Rightarrow |1-\rho|^2=0 \Rightarrow \lambda_0=(1)\delta$

$\therefore |1-\rho|^2=(1)\delta$

$\Rightarrow \delta(1)=|1-\rho|^2$

(1) في: مجموعة الحل $=\{1\}$ $\quad 3+4|1-\rho|=7\delta(1)$

$\Rightarrow \delta(1)=|1-\rho|^2=7$

(a) في: $\delta(1)=7\delta(1)+3$

$\Rightarrow 7=7\delta(1)+3 \Rightarrow 4=7\delta(1)$

$\Rightarrow \delta(1)=\frac{4}{7}$

$\delta(2)=\delta(1)+1=\frac{4}{7}+1=\frac{11}{7}$

$\delta(3)=\delta(2)+1=\frac{11}{7}+1=\frac{18}{7}$

$\delta(4)=\delta(3)+1=\frac{18}{7}+1=\frac{25}{7}$

(b) في: $\delta(n)=\frac{1}{7}(7n+4)$

(c) في: $\delta(n)=\frac{1}{7}(7n+4)$

$\delta(n)=n+\frac{1}{7}(4)$

$\delta(n)=n+\frac{4}{7}$

(d) في: $\delta(n)=\frac{1}{7}(7n+4)$

$\delta(n)=n+\frac{4}{7}$

(e) في: $\delta(n)=\frac{1}{7}(7n+4)$

$\delta(n)=n+\frac{4}{7}$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta + \tan\theta \sec\theta} \, d\theta = \int \frac{\sec\theta}{\sec\theta + \tan\theta} \, d\theta$$

(11) $\int \left(\frac{\sec\theta}{\sec\theta} + \frac{\tan\theta}{\sec\theta} \right) d\theta$ ලබාගනිමු

$$= \int (\sec\theta - \tan\theta) \, d\theta = -\tan\theta - \sec\theta + \theta$$ ලබා (4)

$$\therefore \int \frac{\sec\theta - \tan\theta}{1 - \sec^2\theta} \, d\theta = \int \frac{(\sec\theta - \tan\theta)}{(\sec\theta - \tan\theta)^2} \, d\theta$$

$$= (\sec\theta - \tan\theta)^{-1}$$

$$1 - \sec^2\theta = \sec^2\theta + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta$$

(11) $\int \frac{\sec\theta - \tan\theta}{1 - \sec^2\theta} \, d\theta$

(١٣) ع(٠) = ٤٠ م/ث

ت = -١٠ م/ث^{٢}

ف(١) = ٨٠ م

ع(ن) = ∫ ت(ن) دن

ع(ن) = ∫ -١٠ دن = -١٠ن + جـ$_{١}$

لكن ع(٠) = ٤٠ ⇐ جـ$_{١}$ = ٤٠ ⇐ ع(ن) = -١٠ن + ٤٠

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن = ∫ (-١٠ن + ٤٠) دن

= $\frac{-١٠ن^{٢}}{٢}$ + ٤٠ن + جـ$_{٢}$

ف(ن) = -٥ن^{٢} + ٤٠ن + جـ$_{٢}$

لكن ف(١) = ٨٠ ⇐ ٨٠ = -٥ + ٤٠ + جـ$_{٢}$ ⇐ جـ$_{٢}$ = ٤٥

∴ ف(ن) = -٥ن^{٢} + ٤٠ن + ٤٥

أقصى ارتفاع يصله الجسم عندما ع = صفر

⇐ -١٠ن + ٤٠ = ٠ ⇐ ن = ٤ ث (زمن الوصول لأقصى ارتفاع)

⇐ أقصى ارتفاع يصله الجسم ف(٤) = -٥(٤)^{٢} + ٤٠(٤) + ٤٥

= ١٢٥ م