رياضيات الثاني عشر علمي

اختبار الوحدة الخامسة (التكامل المحدود وتطبيقاته)

مراجعات دفعة ٢٠٢٢

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الخامسة (التكامل المحدود وتطبيقاته)

مراجعات - دفعة 2004

① في $م_ن$ للتجزئة المنتظمة [أ، ب] إذا كانت الفترة الجزئية الخامسة هي [٢,٥ ، ٥,٥] فإن قيمة أ، ب على الترتيب

(أ) -٤ ، -١٠ (ب) ٤ ، -١٠ (ج) ٤ ، ١٠ (د) -٤ ، ١٠

② قيمة $\int_{٠}^{٤} [٤ - \frac{١}{٢}\text{س}]\, \text{د س} =$

(أ) ١٠ (ب) ٦ (ج) ٧ (د) ٥

③ إذا كان ص = $\text{هـ}^{\text{جتا س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س} + \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢ + \text{جا س}}\, \text{د س}$

وكان ق$(\frac{\pi}{٢}) = -٢$ ، فما قيمة أ ؟

(أ) ٢ (ب) -٢ (ج) ٣ (د) -٣

④ إذا كان $\int_{أ}^{ب} \text{جا}^{٢}\text{س د س} = \frac{٣}{٢}$ ، $\int_{أ}^{ب} \text{جتا}^{٢}\text{س د س} = \frac{١}{٢}$

فإن قيمة $\int_{أ}^{ب} ٣\,\text{جتا}\,٢\text{س د س} =$

(أ) -٣ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) $-\frac{١}{٢}$

⑤ $\int_{٠}^{ج}$ س(١-س) دس = ٠ ، حيث ج > ٠ . فإن قيمة ج =

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

⑥ إذا كان ص = هـ$^{\text{ظاس}}$ + أ لو$_{\text{هـ}}$ جتاس + $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{\text{دس}}{١+\text{ظا}^{٢}\text{س}}$ وكان

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}}$ = ٢هـ + ١ فإن قيمة الثابتة أ =

(أ) -١ (ب) ١ (ج) ٢ (د) -٢

⑦ إذا كان $\int_{١}^{٢}$ د(س) دس = ٣ ، د(١) = ٥ ، د(٢) = ٨

فما قيمة $\int_{١}^{٢}$ س دَ(س) دس ؟

(أ) صفر (ب) ١١ (ج) ٥ (د) ٨

⑧ قيمة $\int_{٠}^{٤} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$ دس =

(أ) ٥ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ٢

⑨ إذا كان د(س) معرفاً على الفترة [-١، ٢] وكان

١ ≤ د(س) ≤ ٤ فإن أكبر قيمة للمقدار $\int_{-١}^{٢}$ ٢د(س) دس =

(أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٢٤ (د) ١٢

⑩ إذا كان د(س) معرفاً على الفترة [١، ٣] وكان كن تجزئة منتظمة للفترة [١، ٣] بحيث م(ن، د) = ٢ − $\frac{٥ - ٣ن}{٢ن}$

فإن قيمة $\int_{٣}^{١} ٢د(س)\,ءس$

(أ) ٣٫٥ (ب) −٣٫٥ (جـ) ٧ (د) −٧

⑪ إذا كان $\int_{١}^{٢} (٢د(س) - س^{٢} - ٦)\,ءس = ٠٫٥$ ،

فإن $\int_{٢}^{١} (\frac{١}{٢} د(س) - س)\,ءس =$

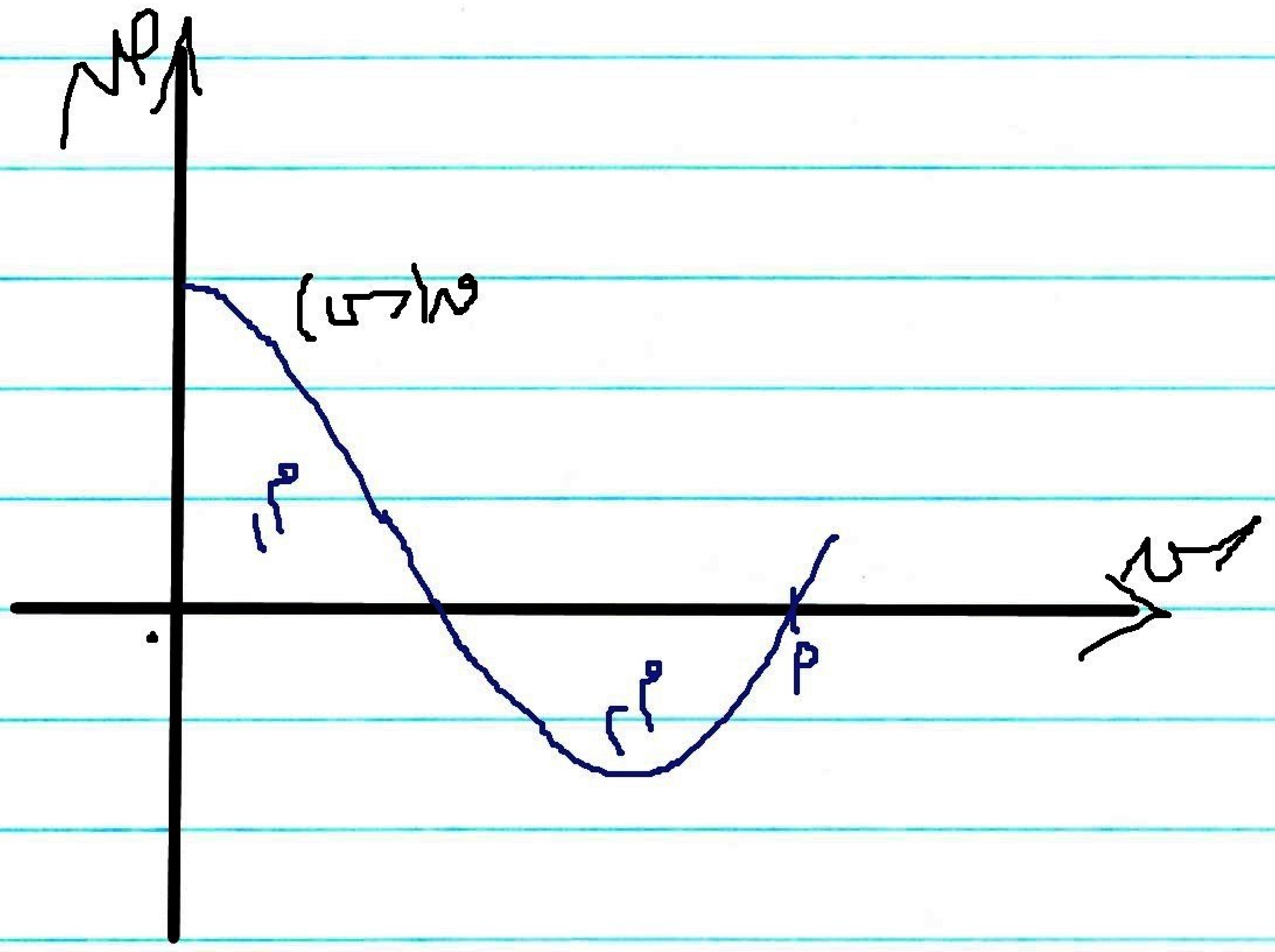
(أ) $-\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $-\frac{٣}{٢}$

⑫ إذا كان $\int_{١}^{٣} (٢د(س) + ٧هـ(س))\,ءس = ٢٤$ ،

$\int_{١}^{٣} ٣هـ(س)\,ءس = -٣٠$ ، $\int_{٨}^{٣} ٣د(س)\,ءس = -٣٠$ فجد

$\int_{٥}^{١٢} (٥د(س - ٤) - ٢س + ١)\,ءس =$

(أ) ١١٢ (ب) −٢٣٥ (جـ) ٣٩٧ (د) ٥٠

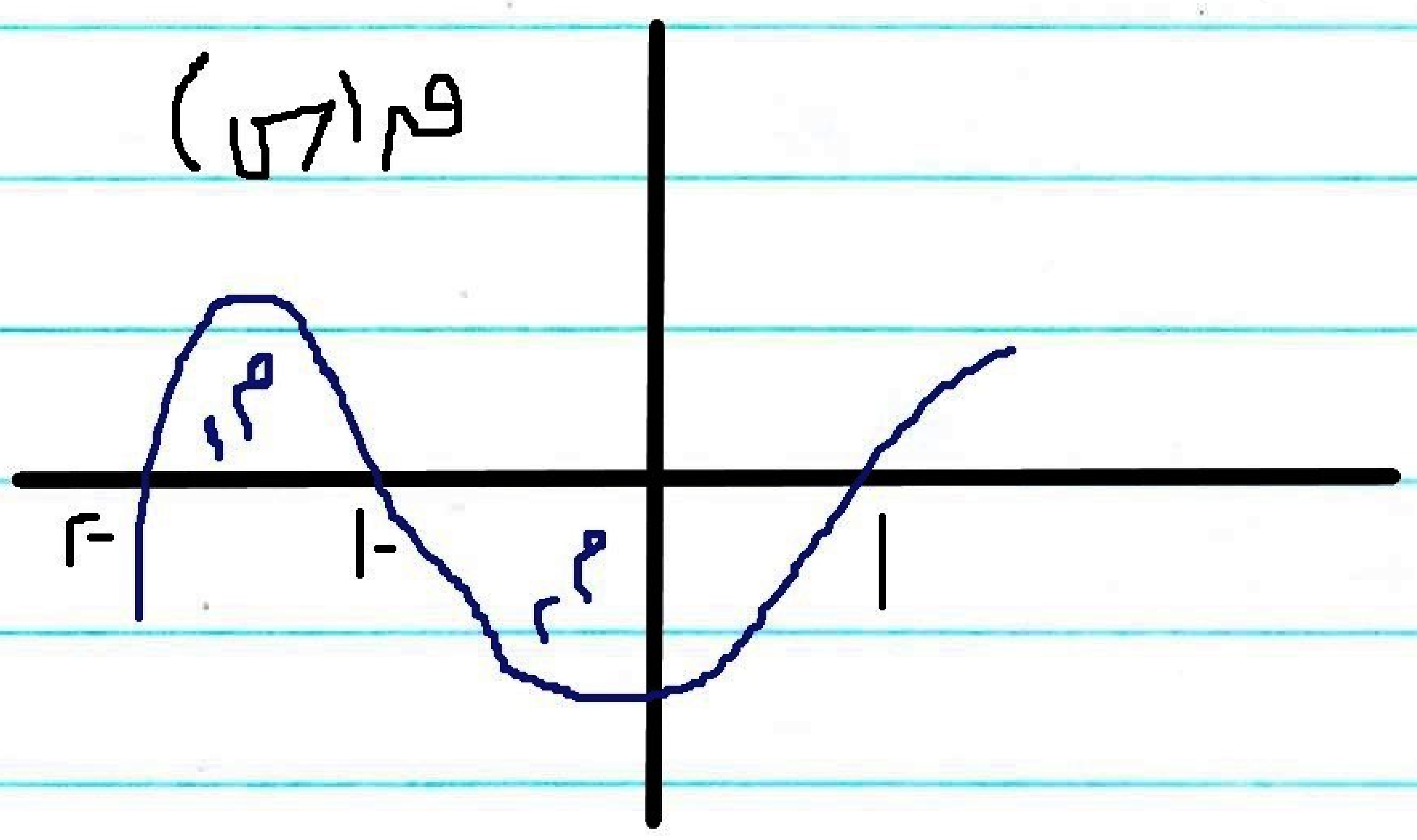


⑬ يمثل الشكل المجاور منحنى ق(س) على الفترة [٠، أ] فإذا كانت م١ = ٨ وحدة مربعة، م٢ = ٦ وحدات مربعة فإن

$\int_{٠}^{أ}$ ق(س) دس =

أ) -١٤ ب) -٢ ج) ١٤ د) ٢

⑭ في الشكل المجاور م١ = ٤ وحدات مربعة، م٢ = ١٢ وحدة مربعة فإن $\int_{-١}^{٢}$ س ق(س² - ٣) دس =



أ) ٤ ب) -٤

ج) -٨ د) ٨

⑮ ق(س) اقتران متصل، $\int_{س}^{٢}$ ق(ص) دص = س² - ب س - ١٤ فإن قيمة ق(٤) =

أ) -٥ ب) ٥ ج) -١٣ د) ١٣

حلول أسئلة اختبار الوحدة الخامسة

مراجعات - دفعة 2004 -

① ح٥ = ٥٫٥

أ + (ب - أ) / ن × ر = ٥٫٥

أ + ٠٫٣ × ر = ٥٫٥ (×١٠) ٥٫٥ - ٢٫٥ = ٣٫٠

١٠أ + ٣ر = ٥٥ ⟸ ١٠أ + ٣×٥ = ٥٥

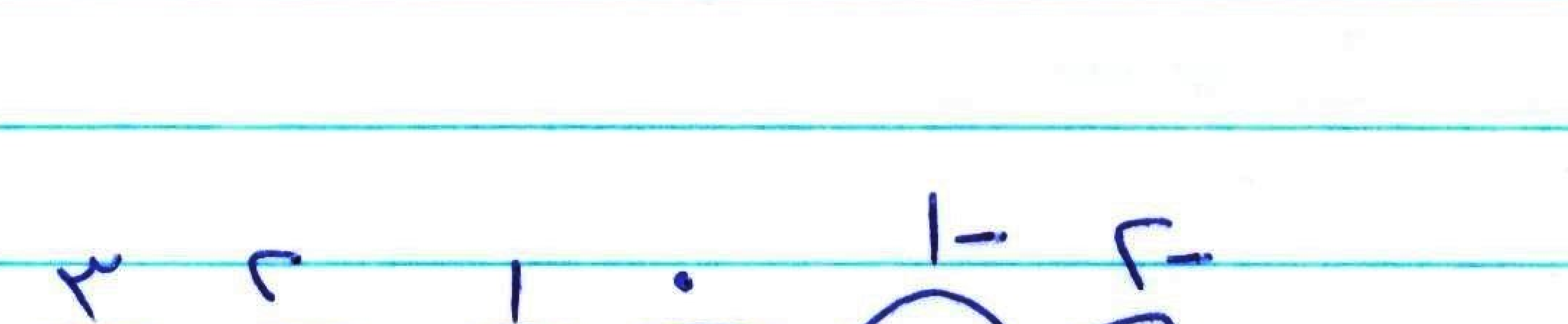
⟸ ١٠أ + ١٥ = ٥٥ ⟸ أ = ④

(ب - أ) / ٢٠ = ٠٫٣ ⟸ (ب - ٤) / ٢٠ = ٠٫٣ ⟸ ب - ٤ = ٦

⟸ ب = ⑩ فرع (د)

② ∫ من ٠ إلى ٤ [٤ - ½ س] ءس

[٤ - ½ س]



طول الدرجة = ②

٤ - ½ س = ٠ ⟸ س = ⑧

∴ ∫ من ٠ إلى ٤ [٤ - ½ س] ءس = ∫ من ٠ إلى ٢ ٣ ءس + ∫ من ٢ إلى ٤ ٢ ءس

= ٣(٢ - ٠) + ٢(٤ - ٢) = ٦ + ٤ = ⑩

فرع (أ)

⑤

③ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أ جتا س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ جا س} + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2+\text{جا س}}\,\text{ءس}$

$\text{ص}' = -\text{أ جا س هـ}^{\text{أ جتا س}} + \frac{1}{\text{جا س}} \times \text{جتا س} + \text{صفر}$

$-2 = -\text{أ جا }\frac{\pi}{2}\text{ هـ}^{\text{أ جتا }\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\text{جا }\frac{\pi}{2}} \times \text{جتا }\frac{\pi}{2}$

$-2 = -\text{أ} \times \text{هـ}^{0} + \frac{1}{1} \times 0 \Leftarrow -2 = -\text{أ} \Leftarrow \text{أ} =$ ② فرع (أ)

④ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جا}^2\text{س ءس} = \frac{3}{2}$ ، $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جتا}^2\text{س ءس} = \frac{1}{2}$

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} 3(\text{جتا 2س})\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} 3(\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} 3\,\text{جتا}^2\text{س ءس} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} 3\,\text{جا}^2\text{س ءس}$

$= 3 \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = \frac{-6}{2} =$ (−3)

فرع (أ)

⑤ $\int_{0}^{\text{ج}} \text{س}(1-\text{س})\,\text{ءس} = 0 \Leftarrow \int_{0}^{\text{ج}} (\text{س} - \text{س}^2)\,\text{ءس} = 0$ ،

$\Leftarrow \left(\frac{1}{2}\text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{س}^3\right)\Big]_{0}^{\text{ج}} = 0 \Leftarrow \frac{1}{2}\text{ج}^2 - \frac{1}{3}\text{ج}^3 = 0 \quad (\times 6)$

$3\text{ج}^2 - 2\text{ج}^3 = 0 \Leftarrow \text{ج}^2(3 - 2\text{ج}) = 0$

إما ج = ٠ مرفوض لأنه ج > ٠

أو $\text{ج} = \frac{3}{2}$ فرع (ب)

⑥ $ص = هـ^{ظاس} + أ\ لو_{هـ} جتاس + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{دس}{1 + ظا^2 س}$

وكان $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س = \frac{\pi}{4}} = ٢هـ + ١$

(الحل) $\frac{دص}{دس} = هـ^{ظاس} \times قا^2 س + أ \times \frac{-جاس}{جتاس} + صفر$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س = \frac{\pi}{4}} = هـ^{ظا\frac{\pi}{4}} \times قا^2 \frac{\pi}{4} - أ\ ظا \frac{\pi}{4}$

$٢هـ + ١ = ٢هـ - أ \Leftarrow أ = \boxed{-١}$ فرع (أ)

⑦ $\int_{1}^{2} س\ قَ(س)\ دس$

$ق = س$ $\qquad دع = قَ(س)\ دس$

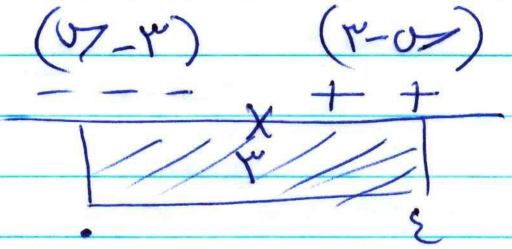
$دق = دس$ $\qquad ع = ق(س)$

$= \left. س\ ق(س)\right|_{1}^{2} - \int_{1}^{2} ق(س)\ دس$

$= ٢ق(٢) - ق(١) - ٣ = ٢ \times ٨ - ٥ - ٣ = \boxed{٨}$ فرع (د)

⑧ $\int_{٠}^{٤} \sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}\; ءس = \int_{٠}^{٤} \sqrt{(س-٣)^{٢}}\; ءس$

$= \int_{٠}^{٤} |س-٣|\; ءس$



$س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = ٣$

$= \int_{٠}^{٣} (٣-س)\; ءس + \int_{٣}^{٤} (س-٣)\; ءس$

$= \left[٣س - \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٣} + \left[\frac{س^{٢}}{٢} - ٣س\right]_{٣}^{٤}$

$= \left[(٩ - \frac{٩}{٢}) - ٠\right] + \left[(٨ - ١٢) - (\frac{٩}{٢} - ٩)\right] = ٤٫٥ + ٠٫٥ = ⑤$ وحدة

فرع (أ)

⑨ $١ \le ق(س) \le ٤$

$٢ \le ٢ق(س) \le ٨$

$\int_{-١}^{٢} ٢\; ءس \le \int_{-١}^{٢} ٢ق(س)\; ءس \le \int_{-١}^{٢} ٨\; ءس$

$\left[٢س\right]_{-١}^{٢} \le \int_{-١}^{٢} ٢ق(س)\; ءس \le \left[٨س\right]_{-١}^{٢}$

$٦ \le \int_{-١}^{٢} ٢ق(س)\; ءس \le \boxed{٢٤}$

أكبر قيمة

فرع (ب)

(١٠) $م(\sigma ن ، ن) = ٢ - \frac{٥ - ٣ن}{٢ن}$

$\int_{١}^{٣} د(س)\,ءس = \underset{ن \to \infty}{نها}\ م(\sigma ن ، ن)$

$= \underset{ن \to \infty}{نها} \frac{٤ن - (٥ - ٣ن)}{٢ن} = \underset{ن \to \infty}{نها} \frac{٧ن - ٥}{٢ن} = \boxed{\frac{٧}{٢}}$

$\Leftarrow \int_{١}^{٣} ٢د(س)\,ءس = ٢ \times \frac{٧}{٢} = \boxed{٧}$

$\therefore \int_{٣}^{١} ٢د(س)\,ءس = \boxed{-٧}$ فرع (د)

(١١) $\int_{١}^{٢} (٢د(س) - س^{-٢} - ٦)\,ءس = ٠,٥$

$= \int_{١}^{٢} ٢د(س)\,ءس + \left.(س^{-١} - ٦س)\right|_{١}^{٢} = \frac{١}{٢}$

$= \int_{١}^{٢} ٢د(س)\,ءس + (-٦\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٢} \Leftarrow \int_{١}^{٢} ٢د(س)\,ءس = ٧$

$\Leftarrow \int_{١}^{٢} د(س)\,ءس = \boxed{\frac{٧}{٢}}$

$\int_{٢}^{١} (\frac{١}{٢} د(س) - س)\,ءس = \frac{١}{٢} \int_{٢}^{١} د(س)\,ءس - \int_{٢}^{١} س\,ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{-٧}{٢} - \left.\frac{١}{٢} س^{٢}\right|_{٢}^{١}$

$= \frac{-٧}{٤} - \left[\frac{١}{٢} - \frac{٤}{٢}\right] = \boxed{\frac{-١}{٤}}$ فرع (م)

(١٢) $\int_{١}^{٣} \left(٢\,\text{د}(\text{س}) + ٧\,\text{هـ}(\text{س}) \right) \text{ءس} = ٢٤$

$\int_{١}^{٣} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} = \boxed{-١٠}$ ، $\int_{٨}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \boxed{-١٠}$

$\int_{١}^{٣} ٢\,\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + ٧ \int_{١}^{٣} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢٤$

$\int_{١}^{٣} ٢\,\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + ٧ \times -١٠ = ٢٤$

$\Leftarrow \int_{١}^{٣} ٢\,\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢٤ + ٧٠ \Leftarrow ٢ \int_{١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٩٤$

$\Leftarrow \int_{١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \boxed{٤٧}$

$\int_{٥}^{١٢} \left(٥\,\text{د}(\text{س} - ٤) - ٢\text{س} + ١ \right) \text{ءس}$

افرض $\text{س} - ٤ = \text{ص} \Leftarrow \text{ءس} = \text{ءص}$

✓ عندما $\text{س} = ٥ \Leftarrow \text{ص} = ١$

✓ عندما $\text{س} = ١٢ \Leftarrow \text{ص} = ٨$

$= \int_{٥}^{١٢} ٥\,\text{د}(\text{س} - ٤)\,\text{ءس} + \int_{٥}^{١٢} (-٢\text{س} + ١)\,\text{ءس}$

$= \int_{١}^{٨} ٥\,\text{د}(\text{ص})\,\text{ءص} + \left(-\text{س}^{٢} + \text{س} \Big|_{٥}^{١٢} \right)$

$= \left[\int_{١}^{٣} ٥\,\text{د}(\text{ص})\,\text{ءص} + \int_{٣}^{٨} ٥\,\text{د}(\text{ص})\,\text{ءص} \right] + \left[(-١٥ + ١٢) - (-٢٥ + ٥) \right]$

= ٥ × ٤٧ + ٥ × ١١٠ + (-١٣٢ + ٢٠)

= ٢٣٥ + ٥٠ + ١١٢ = (٣٩٧) فرع (ج)

(١٣) $\int_{ب}^{م}$ د(س) ءس = ٨ + (-٦) = (٢) فرع (د)

(١٤) $\int_{-١}^{٢}$ س د(س^{٢} - ٣) ءس

افرض ص = س^{٢} - ٣

ءص = ٢س ءس ⇐ ءس = $\frac{\text{ءص}}{\text{٢س}}$

عندما س = -١ فإن ص = -٢

عندما س = ٢ فإن ص = ١

$\int_{-١}^{٢}$ س د(س^{٢} - ٣) ءس = $\int_{-٢}^{١}$ ~~س~~ د(ص) $\frac{\text{ءص}}{\text{٢~~س~~}}$

= $\frac{١}{٢}$ $\int_{-٢}^{١}$ د(ص) ءص (*)

م$_{١}$ = $\int_{-٢}^{-١}$ د(س) ءس = ٤

م$_{٢}$ = $\int_{-١}^{١}$ د(س) ءس = -١٢

م$_{١}$ + م$_{٢}$ = م = $\int_{-٢}^{-١}$ د(س) ءس + $\int_{-١}^{١}$ د(س) ءس

$= \int_{-٢}^{١}$ د(س) ء س $=$ ٤ + (-١٢) = (-٨)

∴ $\int_{-٢}^{١}$ د(س) ء س = (-٨) عوض في (*)

∴ التكامل المطلوب = $\frac{١}{٢}$ × -٨ = (-٤)

(١٥) $\int_{س}^{٢}$ د(ص) ء ص = $س^{٢}$ - ب س - ١٤

- ت(س) = $س^{٢}$ - ب س - ١٤

- ت'(س) = ٢س + ٥

د(س) = -٢س + ٥

د(٤) = -٢ × ٤ + ٥

= (-١٣) م ع (ج)

- ت(٢) = $(٢)^{٢}$ - ٢ب - ١٤

٠ = ٤ - ٢ب - ١٤

⟸ ١٠ = -٢ب

⟸ ب = (-٥)