رياضيات الثاني عشر علمي

اختبار الوحدة الثالثة (المصفوفات والمحددات)

مراجعات دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الثالثة (المصفوفات والمحددات)

مراجعات - دفعة 2004

١) إذا كان $\frac{١}{٢}$ (أ - ب) = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

فما قيمة ٤أ - ٣(ب + م$_٢$ + أ) + ٢ب

(أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -١ & -٤ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

٢) عند حل المعادلات الآتية بطريقة جاوس فإن س، ص، ع على الترتيب

س + ص + ع = ١

س - ص + ع = ٤

س - ص - ع = -١

(أ) {س = ٠ ، ص = $\frac{٣}{٢}$ ، ع = $\frac{٢}{٥}$}

(ب) {س = ٠ ، ص = $-\frac{٣}{٢}$ ، ع = $\frac{٥}{٢}$}

(جـ) {س = ١ ، ص = $\frac{٢}{٣}$ ، ع = $-\frac{٥}{٢}$}

(د) {س = -١ ، ص = $-\frac{٢}{٣}$ ، ع = $\frac{٥}{٢}$}

٣) بدون فك المحدد إذا كان $\begin{vmatrix} س & ص & ع+٢ \\ س & ص+٢ & ع \\ س+٢ & ص & ع \end{vmatrix}$ = -٤

فإن قيمة س + ص + ع = (أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) $\frac{١}{٢}$

④ بدون فك المحدد قيمة

$$\begin{vmatrix} أ+٢ب & أ+ب & أ \\ أ+ب & أ & أ+٢ب \\ أ & أ+٢ب & أ+ب \end{vmatrix} =$$

(أ) $٩ب(أ-ب)$ (ب) $-٢ب(٢أ+٥ب)$

(ج) $٩ب^{٢}(أ+ب)$ (د) $٩ب^{٢}(أ-٢ب)$

⑤ قيمة س التي تحقق المعادلة

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & س+١ \\ ٣ & ٠ & ١ \\ س+٢ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

(أ) $\frac{-١}{١١}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) $\frac{-٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{١١}$

⑥ إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية بحيث أن

$|أ س| = ٥|أ| = -\frac{١}{٣}|أ ص|$ فإن قيمتي س ، ص على الترتيب

(أ) ٥ ، -١٥ (ب) -٥ ، ١٥ (ج) ٥ ، $-\frac{٥}{٣}$ (د) ٥ ، -١

⑦ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ \\ -١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٩ & جـ \end{bmatrix}$ فما قيمة جـ

التي تجعل المصفوفة ب أ منفردة ؟

(أ) -٣ (ب) ٣ (جـ) صفر (د) ح

⑧ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$ فإن

قيمة س ، ص على الترتيب حيث أ + (ب - أ)$^{-1}$ س + ص م$_٢$ = ب

(أ) -٤ ، ٤ (ب) ٥ ، ٤ (جـ) ٤ ، ٣ (د) ١ ، -١

⑨ إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، أ$^{-1}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ فإن المصفوفة

س حيث س + (أ . س$^{-1}$)$^{-1}$ = ب

(أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٢ & -٢ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -٢ & ٢ \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

⑩ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثالثة

وكان |أ| = $\frac{-١}{|ب|}$ فإن إحدى العبارات الآتية صحيحة دائماً

(أ) أ = ب$^{-1}$ (ب) أ = -ب (جـ) أ = (-ب)$^{-1}$ (د) أ = (ب$^{-1}$)$^{-1}$

حلول أسئلة اختبار الوحدة الثالثة

مراجعات - دفعة 2004

(١) $\frac{١}{٢}(أ - ب) = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \Leftarrow ٢ \times \frac{١}{٢}(أ - ب) = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow (أ - ب) = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

$٤أ - ٣(ب + أ^٢ + أ) + ٢ب = ٤أ - ٣ب - ٣أ^٢ - ٣أ + ٢ب$

$= أ - ب - ٣أ^٢$

$= \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} - ٣\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

فرع (أ)

(٢) $\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & ١ & ٤ \\ ١ & -١ & -١ & -١ \end{array}\right]$ $\Leftarrow$ اضرب ص١ في (-١) ثم أضفه لـ ص٢ ، ص٣

$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ٠ & -٢ & ٠ & ٣ \\ ٠ & -٢ & -٢ & -٢ \end{array}\right]$ $\Leftarrow$ اضرب ص٢ في (-١) ثم أضفه لـ ص٣

$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ٠ & -٢ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٠ & -٢ & -٥ \end{array}\right]$ $\Leftarrow$

$-٢ع = -٥ \Leftarrow ع = \frac{٥}{٢}$

كذلك $-٢ص = ٣ \Leftarrow ص = \frac{-٣}{٢}$

س + ص + ع = ١ (عوض عن ص ، ع)

س $-\frac{٣}{٢}+\frac{٥}{٢}$ = ١ ⟸ س = ٠

⟸ { س = ٠ ، ص = $\frac{-٣}{٢}$ ، ع = $\frac{٥}{٢}$ } فرع (ب)

(٣)

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع}+٢ \\ \text{س} & \text{ص}+٢ & \text{ع} \\ \text{س}+٢ & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = -٤$$

نجمع ع٢ + ع٣ ثم نضيفها لـ ع١

$$\begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص}+\text{ع}+٢ & \text{ص} & \text{ع}+٢ \\ \text{س}+\text{ص}+\text{ع}+٢ & \text{ص}+٢ & \text{ع} \\ \text{س}+\text{ص}+\text{ع}+٢ & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = -٤$$

نأخذ (س+ص+ع+٢) عامل مشترك من ع١

$$(\text{س}+\text{ص}+\text{ع}+٢)\begin{vmatrix} ١ & \text{ص} & \text{ع}+٢ \\ ١ & \text{ص}+٢ & \text{ع} \\ ١ & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = -٤$$

− ص١ + ص٢ ، − ص١ + ص٣ ⟸ $$(\text{س}+\text{ص}+\text{ع}+٢)\begin{vmatrix} ١ & \text{ص} & \text{ع}+٢ \\ ٠ & ٢ & -٢ \\ ٠ & ٠ & -٢ \end{vmatrix} = -٤$$

⟸ (س+ص+ع+٢) × (١×٢×−٢) = −٤

⟸ (س+ص+ع+٢) × −٤ = −٤ ⟸ س+ص+ع = −١ فرع (ج)

٤

$$\begin{vmatrix} \text{م+٢ب} & \text{م+ب} & \text{م} \\ \text{م+ب} & \text{م} & \text{م+٢ب} \\ \text{م} & \text{م+٢ب} & \text{م+ب} \end{vmatrix}$$

١. جمع $ع_٢ + ع_٣$ ثم أضفها لـ $ع_١$

$$\begin{vmatrix} \text{م+٢ب} & \text{م+ب} & \text{٣م+٣ب} \\ \text{م+ب} & \text{م} & \text{٣م+٣ب} \\ \text{م} & \text{م+٢ب} & \text{٣م+٣ب} \end{vmatrix}$$

أخذ (٣م+٣ب) عامل مشترك من $ع_١$

$$\begin{vmatrix} \text{م+٢ب} & \text{م+ب} & ١ \\ \text{م+ب} & \text{م} & ١ \\ \text{م} & \text{م+٢ب} & ١ \end{vmatrix} \text{(٣م+٣ب)}$$

$ص_٢ + ص_٣$ وإضافة لـ $ص_١$ $\Leftarrow$ (٣م+٣ب)

$$\begin{vmatrix} \text{٣م+٣ب} & \text{٣م+٣ب} & ٣ \\ \text{م+ب} & \text{م} & ١ \\ \text{م} & \text{م+٢ب} & ١ \end{vmatrix}$$

بأخذ (٣) عامل مشترك من $ص_١$ $\Leftarrow$ ٩(م+ب)

$$\begin{vmatrix} \text{م+ب} & \text{م+ب} & ١ \\ \text{م+ب} & \text{م} & ١ \\ \text{م} & \text{م+٢ب} & ١ \end{vmatrix}$$

ص٢ − ص١ ، ص٣ − ص١ ⟸ ٩(أ+ب) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{أ+ب} & \text{أ+ب} \\ \text{٠} & \text{−ب} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{ب} & \text{−ب} \end{vmatrix}$

ص٢ + ص٣ ⟸ ٩(أ+ب) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{أ+ب} & \text{أ+ب} \\ \text{٠} & \text{−ب} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{−ب} \end{vmatrix}$

٩(أ+ب) × (١ × −ب × −ب)

= ٩(أ+ب) × ب² = ٩ب²(أ+ب) فرع (ج)

(٥) $\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$

$\begin{vmatrix} \text{س+١} & \text{١} & \text{٢} \\ \text{١} & \text{٠} & \text{٣} \\ \text{٢} & \text{٣} & \text{س+٢} \end{vmatrix}$ = ٠

(س+١) $\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٣} \\ \text{٣} & \text{س+٢} \end{vmatrix}$ −١ $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٣} \\ \text{٢} & \text{س+٢} \end{vmatrix}$ +٢ $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٠} \\ \text{٢} & \text{٣} \end{vmatrix}$ = صفر

⟸ (س+١)(٠−٩) − [(س+٢) − ٦] + ٢(٣−٠) = صفر

⟸ −٩س − ٩ − س + ٤ + ٦ = صفر

⟸ −١٠س + ١ = صفر ⟸ س = $\frac{\text{١}}{\text{١٠}}$ فرع (د)

(٦) أ مصفوفة من الرتبة الثانية ، $|أ\,س| = ٥|أ| = -\frac{١}{٣}|أ\,ص|$

$|أ\,س| = ٥|أ| \Leftarrow \frac{|أ\,س|}{|أ|} = \frac{٥|أ|}{|أ|} \Leftarrow \frac{|أ\,س|}{|أ|} = ٥$

$\Leftarrow س = ٥$

$-\frac{١}{٣}|أ\,ص| = ٥|أ|$

$\frac{-\frac{١}{٣}|أ\,ص|}{|أ|} = \frac{٥|أ|}{|أ|} \Leftarrow -\frac{١}{٣}ص = ٥ \Leftarrow ص = -١٥$ فرع (أ)

(٧) $ب\,أ = \underset{٢\times١}{\begin{bmatrix} جـ & ٩ \end{bmatrix}} \underset{١\times٢}{\begin{bmatrix} ٣ \\ -١ \end{bmatrix}} = \underset{١\times١}{\begin{bmatrix} ٣جـ - ٩ \end{bmatrix}}$

$|٣جـ - ٩| = ٠$ (ب أ مصفوفة منفردة)

$\Leftarrow ٣جـ - ٩ = ٠ \Leftarrow جـ = ٣$ فرع (ب)

(٨) $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

$ب - أ = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix}$

$|ب - أ| = (٢\times٢) - (٠\times-٦) = ٤$

$(ب - أ)^{-١} = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ \frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

$$\text{أ} + (\text{ب} - \text{أ})^{-1}\,\text{س} + \text{ص}\,\text{م}_2 = \text{ب}$$

$$(\text{ب} - \text{أ})^{-1}\,\text{س} + \text{ص}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{ب} - \text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\text{س} + \begin{bmatrix} \text{ص} & 0 \\ 0 & \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\text{س} + \text{ص} & 0 \\ \frac{3}{2}\text{س} & \frac{1}{2}\text{س} + \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{2}\text{س} = -6 \Leftarrow \text{س} = -6 \times \frac{2}{3} = -4$$

$$\frac{1}{2}\text{س} + \text{ص} = 2 \Leftarrow \frac{1}{2} \times -4 + \text{ص} = 2 \Leftarrow -2 + \text{ص} = 2$$

$$\Leftarrow \text{ص} = 4$$

$\therefore$ س $= -4$ ، ص $= 4$ صح (أ)

(9) $\text{س} + (\text{أ} \cdot \text{س}^{-1})^{-1} = \text{ب}$

$$\text{س} + \text{س}\,\text{أ}^{-1} = \text{ب} \Leftarrow \text{س}(\text{م}_2 + \text{أ}^{-1}) = \text{ب}$$

$$\text{س}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{س} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

اضرب في $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ من اليسار

$$^{١-}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = {}^{١-}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \times س$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ١ & ٣- \end{bmatrix} \frac{١}{٢}- \times \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = س$$

ج فرع $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix} = س$

١٠ فرع ج

١٥