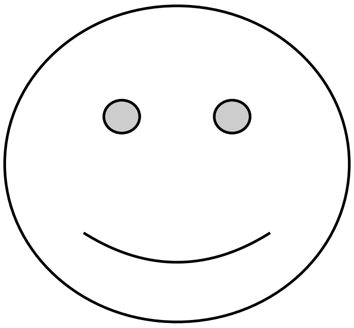
رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

اختبارات الوحدة الأولى دفعة 2022 مع الحلول

- اختبار درس متوسط التغير.
- اختبار درس قواعد الاشتقاق.
- اختبار درس مشتقة الاقتران الأسي واللوغارتمي.
- اختبار قاعدة لوبيتال، مشتقة الاقتران الأسي واللوغارتمي.
- اختبار تطبيقات هندسية.
- اختبار تطبيقات فيزيائية.
- اختبار درس قاعدة السلسلة.
- اختبار درس الاشتقاق الضمني.
- اختبار الوحدة الأولى.

تمنياتي لكم بالتفوق والتميز

أ. هدى أسامة فرج



أ. هدى فرج

اختبار درس متوسط التغير

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة 2004

① إذا كان ق(س + ١) = س² + ٣س + ب ، فما متوسط تغير ق(س) في الفترة [-١ ، ٢]

(أ) -١   (ب) ٢   (جـ) -٢   (د) ١

② إذا كان متوسط تغير ق(س) في [١ ، ٢] = ٤ ، فإن متوسط تغير هـ(س) = ق(١ + جاس) في الفترة [π/٢ ، π]

(أ) -٨/π   (ب) ٨/π   (جـ) π/٨   (د) -π/٨

③ إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = جتاس - أجاس في الفترة [π/٢ ، π] يساوي (٤/π) فما قيمة الثابت أ ؟

(أ) ٣   (ب) ٣/٢   (جـ) -٣   (د) ٢π

أ. هدى فرج

④ إذا كان ق(س) = √(س + ١) ، س ∈ [٣ ، ب] ، جد قيمة الثابت ب علماً أن متوسط تغير ق(س) في نفس الفترة يساوي ١/(٢ + √٥)

(أ) -٤   (ب) ٢ + √٥   (جـ) ٢ - √٥   (د) ٤

⑤ إذا كان هـ(س) = أق(س) + ٢س - ١ ، جد قيمة الثابت أ علماً بأن متوسط التغير في الاقتران هـ(س) في [١ ، ٣] يساوي ٤ والمستقيم الواصل بين النقطتين (١ ، ق(١)) ، (٣ ، ق(٣)) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع محور السينات الموجب

(أ) ٨   (ب) -٢   (جـ) -٨   (د) ٢

⑥ إذا كان ق(س) = { |س² + ١٣| ، س < ٢
[٣س + ١] ، س ≥ ٢

وتغيرت س من ١ إلى ٥ ، أوجد التغير في ق(س)

(أ) ٨   (ب) -٤   (جـ) -٢   (د) ٤

⑦ احسب قيمة متوسط التغير في حجم مكعب من الثلج عندما يوضع في درجة حرارة مرتفعة حيث يتغير طول ضلعه من ٣سم إلى ١سم في الدقيقة.

أ) ١٣   ب) -١٣   جـ) ٤   د) -٤

⑧ يتحرك جسم حسب العلاقة

$$ف(ن) = \begin{cases} ٣ن^{٢} ، & ٠ \le ن \le ٢ \\ ٣ن - أ ، & ن > ٢ \end{cases}$$

وكانت السرعة المتوسطة له في الفترة الزمنية [١، ٣] تساوي ٩م/ث فأوجد الثابت أ ؟!

أ) -١٨   ب) ١٨   جـ) -١١   د) ١١

⑨ إذا كان هـ(س) = $[\frac{١}{٢}س - ١]$ نجد متوسط التغير في الاقتران هـ في الفترة [٣، ٥]

أ) $-\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٣}{٢}$ جـ) $-\frac{١}{٢}$ د) $\frac{١}{٢}$

⑩ إذا كان

$$هـ(س) = \begin{cases} |٢س - ٣| ، & ٠ \le س < ٢ \\ [س + ١] ، & ٢ \le س < ٦ \end{cases}$$

نجد متوسط تغير هـ(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٤

أ) $\frac{٤}{٣}$ ب) $-\frac{٤}{٣}$ جـ) ٢   د) $\frac{٣}{٤}$

حلول أسئلة اختبار درس

متوسط التغير

① إذا كان ق(س + ١) = $\text{س}^2 + ٣\text{س} + \text{ب}$ ، فما متوسط تغير ق(س) في الفترة [-١، ٢]

(الحل) متوسط تغير ق(س) في الفترة [-١، ٢] = $\frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(-١)}{٣}$

* عندما س + ١ = ٢ ⟸ س = ١

ق(٢) = ١ + ٣ + ب

ق(٢) = ٤ + ب

* عندما س + ١ = -١ ⟸ س = -٢

ق(-١) = ٤ - ٦ + ب

ق(-١) = -٢ + ب

متوسط تغير ق(س) في الفترة [-١، ٢] = $\frac{٤ + \text{ب} - (-٢ + \text{ب})}{٣}$

= $\frac{٤ + \cancel{\text{ب}} + ٢ - \cancel{\text{ب}}}{٣}$ = $\frac{٦}{٣}$ = ②

---

② إذا كان متوسط تغير ق(س) في [١، ٢] = ٤ فما متوسط تغير هـ(س) = ق(١ + جاس) في الفترة [$\frac{\pi}{٢}$، π]

(الحل) متوسط تغير ق(س) في [١، ٢] = $\frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(١)}{١}$ = ٤

⟸ $\boxed{\text{ق}(٢) - \text{ق}(١) = ٤}$ ← ①

متوسط تغير هـ(س) في [$\frac{\pi}{٢}$، π] = $\frac{\text{هـ}(\pi) - \text{هـ}(\frac{\pi}{٢})}{\frac{\pi}{٢}}$

= $\frac{\text{ق}(١ + \overset{٠}{\cancel{\text{جا}\,\pi}}) - \text{ق}(١ + \overset{١}{\cancel{\text{جا}\,\frac{\pi}{٢}}})}{\frac{\pi}{٢}}$

= $\frac{\text{ق}(١) - \text{ق}(٢)}{\frac{\pi}{٢}}$

= $\frac{-[\text{ق}(٢) - \text{ق}(١)]}{\frac{\pi}{٢}}$ عوض من ①

= $\frac{-٤}{\frac{\pi}{٢}}$ = $-٤ \times \frac{٢}{\pi}$ = $\boxed{\frac{-٨}{\pi}}$

③ إذا كان متوسط التغير للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا س} - \text{أ جا س}$ في الفترة $[\frac{\pi}{2} ، \pi]$ يساوي $(\frac{٤}{\pi})$ فما قيمة الثابت أ ؟!

الحل: $\text{متوسط تغير ق}(\text{س}) = \frac{\text{ق}(\pi) - \text{ق}(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} = \frac{٤}{\pi}$

$\Leftarrow \frac{(\text{جتا}\,\pi - \text{أ جا}\,\pi) - (\text{جتا}\,\frac{\pi}{2} - \text{أ جا}\,\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} = \frac{٤}{\pi}$

$\Leftarrow \frac{(-١ - ٠) - (٠ - \text{أ})}{\frac{\pi}{2}} = \frac{٤}{\pi} \Leftarrow \frac{-١ + \text{أ}}{\frac{\pi}{2}} \times \frac{٤}{\pi}$

$\Leftarrow (-١ + \text{أ})\,\pi = ٤ \times \frac{\pi}{2} \Leftarrow (-١ + \text{أ})\,\pi = ٢\pi$

$\Leftarrow -١ + \text{أ} = ٢$

$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٣}$

---

④ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + ١}$ ، $\text{س} \in [٣ ، \text{ب}]$ جد قيمة الثابت ب علماً أن متوسط تغير ق(س) في نفس الفترة يساوي $\frac{١}{٢ + \sqrt{٥}}$

الحل: متوسط تغير ق(س) في الفترة $[٣ ، \text{ب}] = \frac{\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(٣)}{\text{ب} - ٣}$

$= \frac{١}{٢ + \sqrt{٥}}$

$\Leftarrow \frac{\sqrt{\text{ب} + ١} - ٢}{\text{ب} - ٣} = \frac{١}{٢ + \sqrt{٥}}$ (اضرب بمرافق البسط)

$\Leftarrow \frac{\sqrt{\text{ب} + ١} - ٢}{\text{ب} - ٣} \times \frac{\sqrt{\text{ب} + ١} + ٢}{\sqrt{\text{ب} + ١} + ٢} = \frac{١}{٢ + \sqrt{٥}}$

$\Leftarrow \frac{\text{ب} + ١ - ٤}{(\text{ب} - ٣)(\sqrt{\text{ب} + ١} + ٢)} = \frac{١}{٢ + \sqrt{٥}} \Leftarrow \frac{\cancel{(\text{ب} - ٣)}}{\cancel{(\text{ب} - ٣)}(\sqrt{\text{ب} + ١} + ٢)} \times \frac{١}{٢ + \sqrt{٥}}$

$\cancel{٢} + \sqrt{٥} = \sqrt{\text{ب} + ١} + \cancel{٢}$ (ربع الطرفين)

$٥ = \text{ب} + ١$

$\Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٤}$

٥ إذا كان هـ(س) = أ ق(س) + ٢س – ١ ، جد قيمة الثابت أ علماً بأن متوسط التغير في الاقتران هـ(س) في [١ ، ٣] يساوي ٤ ، والمستقيم الواصل بين النقطتين (١ ، ق(١)) ، (٣ ، ق(٣)) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع محور السينات الموجب

الحل: ميل المستقيم من النقطتين = فرق الصادات / فرق السينات = ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الجزء الموجب لمحور السينات

= (ق(٣) – ق(١)) / (٣ – ١) = ظا ١٣٥°

⟸ ق(٣) – ق(١) = –٢ ⟵ (١)

متوسط تغير هـ(س) = (هـ(٣) – هـ(١)) / ٢ = ٤

⟸ هـ(٣) – هـ(١) = ٨

أ ق(٣) + ٥ – (أ ق(١) + ١) = ٨

أ ق(٣) + ٥ – أ ق(١) – ١ = ٨

أ [ق(٣) – ق(١)] + ٤ = ٨ ⟸ أ [–٢] = ٤

⟸ أ = ٤ / –٢ = (–٢)

---

٦ إذا كان ق(س) = { |س^٤ + ٣| ، س < ٢
⟦٣س + ١⟧ ، س ≥ ٢

وتغيرت س من ١ إلى ٢,٥ أوجد التغير في الاقتران ق(س)

الحل: التغير في الاقتران ق(س) = ق(س٢) – ق(س١)

= ق(٢,٥) – ق(١)

= ⟦٣ × ٢,٥ + ١⟧ – |١ + ٣|

= ⟦٨,٥⟧ – |٤|

= ٨ – ٤ = (٤)

٧ احسب قيمة متوسط التغير في حجم مكعب من الثلج عندما يوضع في الشمس حيث يتغير طول ضلعه من ٣سم إلى ١سم في ١ دقيقة.

الحل: حجم المكعب الذي طول ضلعه س = س³

س١ = ٣سم ، س٢ = ١سم

متوسط التغير في حجم المكعب = (ق(١) – ق(٣)) / (١ – ٣) = ((١)³ – (٣)³) / –٢

= (١ – ٢٧) / –٢ = –٢٦ / –٢

= (١٣)

⑧ يتحرك جسم حسب العلاقة

$$\text{ف}(\text{ن}) = \begin{cases} ٢\text{ن}^{٢} \text{ ، } ٠ \le \text{ن} \le ٢ \\ ٣\text{ن} - \text{أ} \text{ ، } \text{ن} > ٢ \end{cases}$$

وكانت السرعة المتوسطة له في الفترة الزمنية [١، ٣] تساوي ٩ م/ث فأوجد الثابت أ ؟!

(الحل) السرعة المتوسطة $= \dfrac{\text{ف}(٣) - \text{ف}(١)}{٢}$

$$= \frac{(٣ \times ٣ - \text{أ}) - (٢(١)^{٢})}{٢} = ٩$$

$$= \frac{٩ - \text{أ} - ٢}{٢} = ٩ \Leftarrow \frac{-\text{أ} + ٧}{٢} = ٩$$

$$\Leftarrow -\text{أ} + ٧ = ١٨ \Leftarrow -\text{أ} = ١١ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -١١}$$

⑨ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [\tfrac{١}{٢}\text{س} - ١]$ نجد متوسط التغير في الاقتران ق في الفترة [٣، ٥]

(الحل) متوسط التغير $= \dfrac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٣)}{٢} = \dfrac{[\tfrac{١}{٢} \times ٥ - ١] - [\tfrac{١}{٢} \times ٣ - ١]}{٢}$

$$= \frac{[١٫٥] - [٠٫٥]}{٢}$$

$$= \frac{١ - ٠}{٢} = \boxed{\tfrac{١}{٢}}$$

---

⑩ إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |٢\text{س} - ٣| \text{ ، } ٠ \le \text{س} < ٢ \\ [\text{س} + ١] \text{ ، } ٢ \le \text{س} < ٦ \end{cases}$$

نجد متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٤

(الحل) متوسط تغير ق(س) $= \dfrac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(١)}{٣}$

$$= \frac{[٤ + ١] - |٢ \times ١ - ٣|}{٣}$$

$$= \frac{[٥] - |-١|}{٣} = \frac{٥ - ١}{٣} = \boxed{\tfrac{٤}{٣}}$$

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة ٢٠٢٢م

حلول أسئلة اختبار درس قواعد الاشتقاق

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس قواعد الاشتقاق

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة 2004

① إذا كان ق(١) = ٣ ، ق َ(١) = -١ ، هـ(١) = ٢

هـ َ(١) = ٥ أوجد ما يلي

* $\left(\frac{\text{٧}}{\text{ق}}\right)'(\text{١})$

ⓐ $\frac{\text{٩}}{\text{٧}}$ ⓑ $\frac{\text{٧}}{\text{٩}}$ ⓒ $\frac{-\text{٩}}{\text{٧}}$ ⓓ $\frac{-\text{٧}}{\text{٩}}$

(أ) $\frac{\text{٩}}{\text{٧}}$ (ب) $\frac{\text{٧}}{\text{٩}}$ (ج) $\frac{-\text{٩}}{\text{٧}}$ (د) $\frac{-\text{٧}}{\text{٩}}$

* $\left(\frac{\text{ق(١)}}{\text{هـ}}\right)'(\text{١})$

(أ) $\frac{\text{١٥}}{\text{٤}}$ (ب) $\frac{\text{٤}}{\text{١٥}}$ (ج) صفر (د) $\frac{-\text{١٥}}{\text{٤}}$

* $\left(\frac{\text{هـَ(١)}}{\text{ق(١)}}\right)'(\text{١}) =$

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ (ج) $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ (د) صفر

② إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس^{٢} + ب & س \geq ١ \\ جـ س + ٣ & س < ١ \end{cases}$

وكانت $قَ(١) = ٤$ فإن قيمة الثوابت أ، ب، جـ على الترتيب

(أ) $أ = ٢$ ، $ب = ٥$ ، $جـ = ٤$ (ب) $أ = -٢$ ، $ب = ٥$ ، $جـ = -٣$

(جـ) $أ = \frac{١}{٢}$ ، $ب = ٤$ ، $جـ = ٤$ (د) $أ = ٢$ ، $ب = -٥$ ، $جـ = -١$

③ إذا كانت $ق(س) = |س - ٢| - |س|$ فإن $قَ(١) =$ ؟!

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) غ.م (د) صفر

④ إذا كان $ق(س) = |س^{٢} - ٥س + ٦| - \sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$

فإن $قَ(١)$ ؟!

(أ) -٢ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) غ.م

⑤ إذا كان $ق(س) = \frac{م(س)}{ل(س)(س^{٢} + ١)}$

وكان $م(١) = -٢$ ، $مَ(١) = ل(١) = -١$ ، $قَ(١) = ٣$

فإن $لَ(١) =$

(أ) $\frac{٧}{٢}$ (ب) $-\frac{٧}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $-\frac{١}{٣}$

⑥ إذا كان ق(س) = $\frac{\left[\left[-\frac{س}{٢}\right]\right]}{٥-س}$ فإن قَ(٣)

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ٠ جـ) $-\frac{١}{٢}$ د) غ.م

⑦ إذا كان ق(س) = $\frac{\left[\frac{٣}{٢}س+١\right]}{س\,هـ(س)+٢س}$

هـ(١) = ١ ، هـَ(١) = ٢ فإن قَ(١)

أ) $\frac{٩}{١٠}$ ب) $-\frac{٩}{١٠}$ جـ) $\frac{١٠}{٩}$ د) $-\frac{١٠}{٩}$

⑧ إذا كان ق(س) = $|س|^{٣}$ فإن قَ(٠)

أ) صفر ب) ٦ جـ) -٦ د) غ.م

⑨ إذا كان ق(س) = $س^{٢}\,[٧-٢س]$ فإن قَ$(٥)^{-}$

أ) غ.م ب) -٤٠ جـ) -٣٠ د) صفر

⑩ إذا كان ق(س) = |٣-س| فإن $(ق^{٢})'(٢)$ =

أ) ١ ب) -١ جـ) ٢ د) -٢

حلول أسئلة اختبار درس

قواعد الاشتقاق

دفعة 2004

① إذا كان ق(١) = ٣ ، قَ(١) = -١ ، هـ(١) = ٢ ، هـَ(١) = ٥

أوجد ما يلي :-

ⓐ $\left(\frac{٧}{ق}\right)'(١)$

الحل $\frac{ق(١) \times ٠ - ٧ \times قَ(١)}{ق^{٢}(١)} = \frac{-٧ \times -١}{٩} = \boxed{\frac{٧}{٩}}$ فرع ⓑ

ملاحظة انتبه ق(١) ثابت معطى في السؤال

ⓑ $\left(\frac{ق(١)}{هـ}\right)'(١)$

الحل $= \left(\frac{٣}{هـ}\right)'(١)$

$= \frac{هـ(١) \times ٠ - ٣ \times هـَ(١)}{هـ^{٢}(١)} = \frac{-٣ \times ٥}{٤} = \boxed{\frac{-١٥}{٤}}$ فرع ⓓ

ⓙ $\left(\frac{هـَ(١)}{ق(١)}\right)'(١) = \left(\frac{٥}{٣}\right)' =$ صفر

Ⓐ إذا كان ق(س) = { أس^{٢} + ب ، س ≥ ١
جـ س + ٣ ، س < ١

وكانت قَ(١) = ٤ ، فجد قيمة الثوابت أ، ب، جـ على الترتيب

(الحل) قَ(١) موجودة ⟸ ق(س) متصل عند س = ١

نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = ق(١)
س ← ١$^{+}$ س ← ١$^{-}$

نهـا أس^{٢} + ب = نهـا جـ س + ٣ ⟸ أ + ب = جـ + ٣
س ← ١$^{+}$ س ← ١$^{-}$

⟸ $\boxed{\text{أ + ب − جـ = ٣}}$ ⟵ (١)

قَ(س) = { ٢أس ، س ≥ ١
جـ ، س < ١

كتبنا المساواة لأنه معطى أن المشتقة موجودة عند س = ١

∵ قَ(١) = ٤ (موجودة)

⟸ قَ(١)$^{+}$ = قَ(١)$^{-}$ = ٤

⟸ ٢أ = ٤ ⟸ $\boxed{\text{أ = ٢}}$ كذلك $\boxed{\text{جـ = ٤}}$

عوض في معادلة (١)

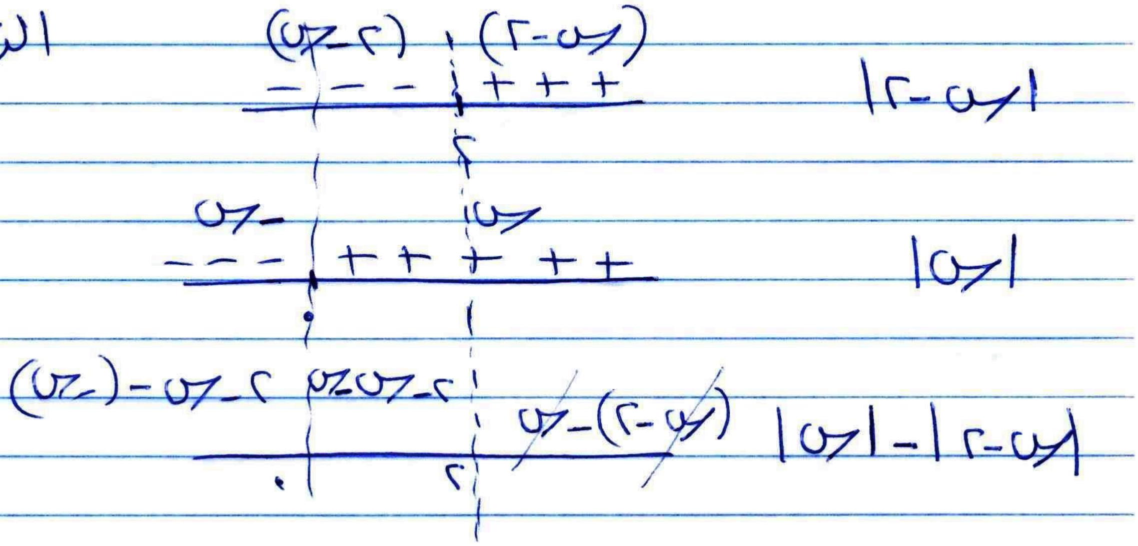
٢ + ب − ٤ = ٣ ⟸ ب = ٣ + ٢ ⟸ $\boxed{\text{ب = ٥}}$

∴ أ = ٢ ، ب = ٥ ، جـ = ٤ فرع (أ)

③ إذا كانت ق(س) = |س - ٢| - |س| فإن قَ(١) =

الحل: |س - ٢| ← م ← نعوض بالصفر |٢ - ١| ∴ نتعامل مع القاعدة السالبة

|س| ← م ← نعوض بالصفر |١.| ← لذلك يجب إعادة التعريف .



ق(س) = { ٢ ، س ≤ ٠
٢ - ٢س ، ٠ ≤ س ≤ ٢
-٢ ، س > ٢

نبحث الاتصال عند س = ٠ .

ق(٠) = ٢ ، نهـا ق(س) = ٢ (س ← ٠+) ، نهـا ق(س) = ٢ (س ← ٠-)

∴ ق(س) متصل عند س = ٠ .

قَ(س) = { ٠ ، س < ٠ .
-٢ ، ٠ < س < ٢
٠ ، س > ٢
غ.م ، س = ٠ ، ٢

قَ(١)$^+$ ≠ قَ(١)$^-$ ⟸ قَ(١) غ.م

حل آخر/ |س -٢| ← عوض عن س = ٠ |-٢| ← سالبة

$|س| = \begin{cases} س ، & س \geq ٠ ، \\ -س ، & س < ٠ ، \end{cases}$

$د(س) = -س + ٢ - \begin{cases} س ، & س \geq ٠ ، \\ -س ، & س < ٠ ، \end{cases}$

$= \begin{cases} -س + ٢ - س ، & س \geq ٠ ، \\ -س + ٢ + س ، & س < ٠ ، \end{cases} = \begin{cases} -٢س + ٢ ، & س \geq ٠ ، \\ ٢ ، & س < ٠ ، \end{cases}$

وتكمل الحل ـــــــ .

④ إذا كان $د(س) = |س^٢ - ٥س + ٦| - \sqrt{س^٢ - ٦س + ٩}$ فإن

$د(١) = ؟؟$

الحل عندما س = ١

$|س^٢ - ٥س + ٦|$ ← $= |٢|$ ← موجب

$د(س) = س^٢ - ٥س + ٦ - \sqrt{(س - ٣)^٢}$ ← مربع كامل

$د(س) = س^٢ - ٥س + ٦ - |س - ٣|$

عندما س = ١ ، $|س - ٣|$ ← $|-٢|$ ← سالب

$\therefore د(س) = س^٢ - ٥س + ٦ - (-س + ٣)$

$= س^٢ - ٥س + ٦ + س - ٣$

ق(س) = $س^{٢}$ − ٤س + ٣

قَ(س) = ٢س − ٤

قَ(١) = ٢ − ٤ = $\boxed{−٢}$

⑤ إذا كان ق(س) = $\frac{م(س)}{ل(س)(س^{٢}+١)}$ ، وكان م(١) = −٢

مَ(١) = ل(١) = −١ ، قَ(١) = ٣ فإن لَ(١) = ؟!

الحل قَ(س) = $\frac{ل(س)(س^{٢}+١) \times مَ(س) − [م(س) \times (ل(س) \times ٢س + (س^{٢}+١) \times لَ(س))]}{(ل(س)(س^{٢}+١))^{٢}}$

قَ(١) = $\frac{ل(١) \times ٢ \times مَ(١) − [م(١)(ل(١) \times ٢ + ٢لَ(١))]}{(ل(١) \times ٢)^{٢}}$

$\frac{٣}{١}$ = $\frac{−٢ \times −١ − [−٢(−٢ + ٢ \times لَ(١))]}{(−٢)^{٢}}$

⇐ ١٢ = ٢ + ٢(−٢ + ٢لَ(١))

١٠ = −٤ + ٤لَ(١) ⇐ ١٤ = ٤لَ(١)

⇐ $\boxed{\frac{٧}{٢} = لَ(١)}$ فرع (أ)

⑥ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\left[\left[\dfrac{-\text{س}}{٢}\right]\right]}{٥-\text{س}}$ فجد $\text{قَ}(٣)$

الحل $\left[\left[\dfrac{-\text{س}}{٢}\right]\right]$ عوض عند س = ٣ $\left[\left[\dfrac{-٣}{٢}\right]\right] = \boxed{-٢}$

عدد غير صحيح

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{[[-٢]]}{٥-\text{س}} = \frac{-٢}{٥-\text{س}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = -\frac{(-٢ \times -١)}{(٥-\text{س})^٢} = \frac{-٢}{(٥-\text{س})^٢}$$

$$\text{قَ}(٣) = \frac{-٢}{(٥-٣)^٢} = \frac{-٢}{٤} = \boxed{\frac{-١}{٢}}$$

⑦ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\left[\left[\frac{٣}{٢}\text{س} + ١\right]\right]}{\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}) + ٢\text{س}}$ ، $\text{هـ}(١) = ١$ ، $\text{هـَ}(١) = ٢$ فجد $\text{قَ}(١)$

الحل $\underbrace{\left[\left[\frac{٣}{٢}\text{س} + ١\right]\right]}_{١} \quad \left[\left[\frac{٣}{٢} + ١\right]\right] = [[٢,٥]] = \boxed{٢}$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}) + ٢\text{س}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{(\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}) + ٢\text{س}) \times ٠ - \left[٢ \times \left(\text{س} \times \text{هـَ}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right) + ٢\right]}{(\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}) + ٢\text{س})^٢}$$

$$\text{قَ}(١) = \frac{\cancel{(\text{هـ}(١) + ٢)} \times \text{صفر} - \left[٢ \times \left(\text{هـَ}(١) + \text{هـ}(١)\right) + ٢\right]}{(\text{هـ}(١) + ٢)^٢}$$

$$\bar{\text{ق}}(١) = \frac{-٢\,\bar{\text{هـ}}(١) - ٢\,\text{هـ}(١) - ٤}{(\text{هـ}(١)+٢)^{٢}} = \frac{-٢×٢ - ٢×١ - ٤}{(١+٢)^{٢}}$$

$$= \frac{-٤-٢-٤}{٩} = \boxed{\frac{-١٠}{٩}}$$

فرع (ك)

⑧ إذا كان ق(س) = $|\text{س}|^{٣}$ ، فإن $\bar{\bar{\text{ق}}}$(٠) = ؟؟

(الحل) $|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} ، & \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س} ، & \text{س} < ٠ \end{cases}$

$\text{ق(س)} = |\text{س}|^{٣} = \begin{cases} \text{س}^{٣} ، & \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س}^{٣} ، & \text{س} < ٠ \end{cases}$

ق(س) متصل عند س = ٠

(تحقق من ذلك)

$\bar{\text{ق}}\text{(س)} = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} ، & \text{س} \geq ٠ \\ -٣\text{س}^{٢} ، & \text{س} < ٠ \end{cases}$

قَ(س) متصل عند س = ٠

(تحقق من ذلك).

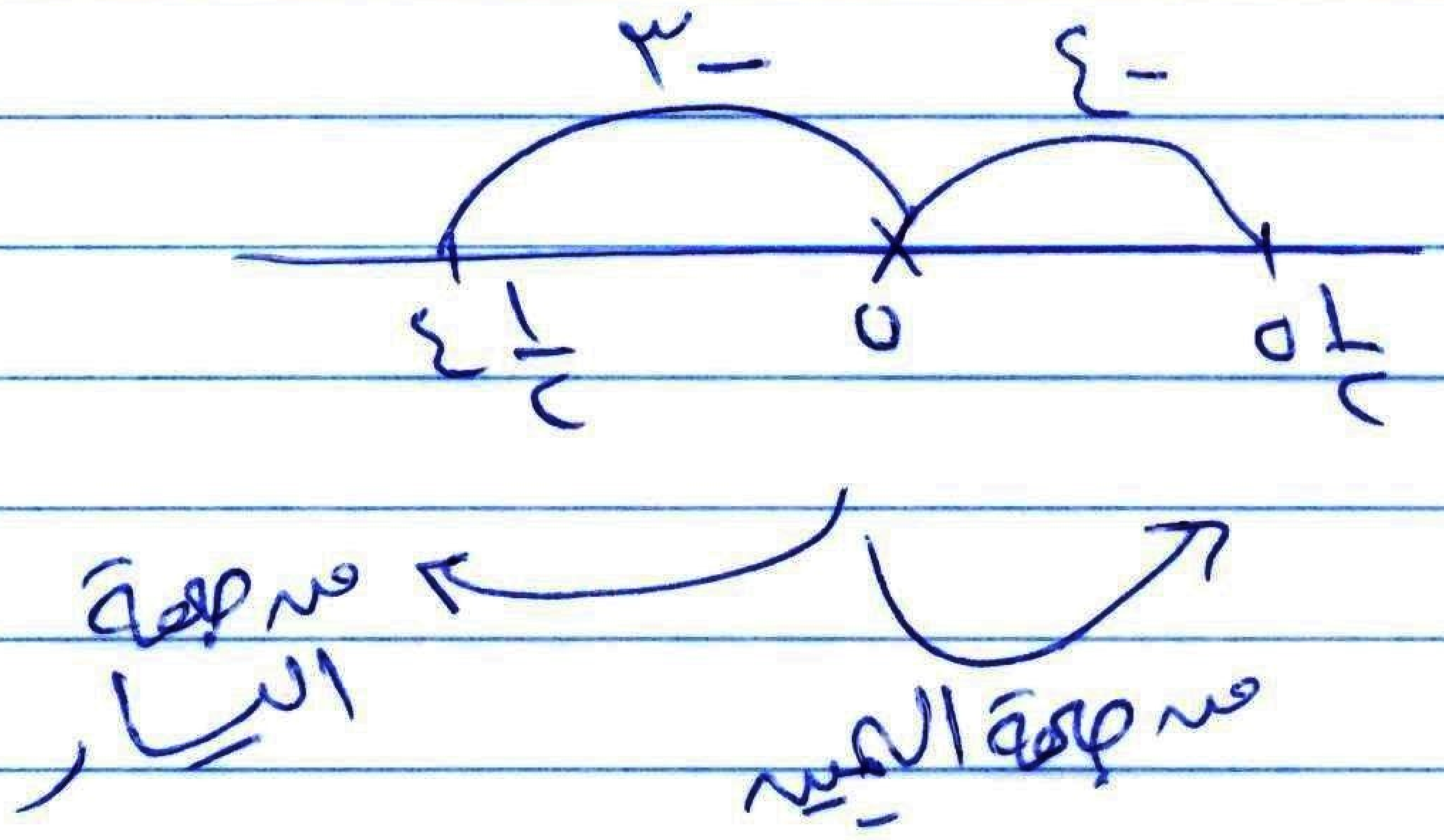
$\bar{\bar{\text{ق}}}\text{(س)} = \begin{cases} ٦\text{س} ، & \text{س} > ٠ \\ -٦\text{س} ، & \text{س} < ٠ \end{cases}$

$\bar{\bar{\text{ق}}}(٠)^{+} = ٠$ ، $\bar{\bar{\text{ق}}}(٠)^{-} = ٠$ $\Leftarrow$ $\bar{\bar{\text{ق}}}(٠) = ٠$

⑨ إذا كان ق(س) = س^٢ [٧ - ٢س] أوجد قَ(٥) = ؟

الحل [٧ - ٢س] نعوض عن س = ٥ → [٧ - ١٠] = [-٣] = (-٣) عدد صحيح

لذلك نحتاج لإعادة التعريف



ق(س) = س^٢ × -٣

∴ ق(س) = -٣س^٢

قَ(س) = -٦س

قَ(٥) = -٦ × ٥ = (-٣٠) فرع (ج)

⑩ إذا كان ق(س) = |٣ - س| فإن (ق^٢)َ(٢) =

الحل ق(س) = |٣ - س|

ق^٢(س) = (|٣ - س|)^٢ = (√(٣ - س)^٢)^٢

ق^٢(س) = (٣ - س)^٢

د/دس ق^٢(س) = ٢(٣ - س) × -١ = -٢(٣ - س)

(ق^٢)َ(٢) = -٢(٣ - ٢) = (-٢)

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درس مشتقات الإقترانات المثلثية

دفعة ٢٠٠٤

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس مشتقات الاقترانات المثلثية (الدائرية) دفعة 2004

① إذا كانت ص = جاس + جتاس فإن $(\acute{ص})^2 + ص^2 =$

Ⓐ 1　　ب) -1　　ج) صفر　　د) 2

② قيم س التي تحقق قَ(س) إذا كانت ق(س) = س + جتاس ، س ∈ [-2π ، 2π]

Ⓐ $\frac{\pi}{2}$　　ب) $-\frac{3\pi}{2}$　　ج) $-\frac{\pi}{2}$　　د) أ و ب معاً

③ إذا كانت ص = قاس + ظاس فإن $\frac{دص}{دس} =$

Ⓐ $\frac{1}{جاس}$　　ب) $\frac{1}{1+جاس}$　　ج) $\frac{1}{1-جاس}$　　د) $\frac{-1}{1-جاس}$

④ إذا كانت ص = جاس فإن صً + 6ص بدلالة ص تساوي

Ⓐ ص　　ب) -5ص　　ج) 2ص　　د) -3ص

⑤ إذا كانت ق(س) = جا(-س) + جتا(-س) أوجد قَ($\frac{\pi}{4}$)

Ⓐ $\frac{2}{\sqrt{2}}$　　ب) $\frac{-2}{\sqrt{2}}$　　ج) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　د) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

⑥ إذا كانت ص = أ جاس + ب جتاس حيث أ، ب ∈ ح

فإن $(صَ)^2 + ص^2 =$

(أ) $أ^2 - ب^2$ (ب) $أ^2$ (جـ) $أ^2 + ب^2$ (د) $-ب^2$

⑦ إذا كان ق(س) = $\frac{\pi}{قاس}$ ، أوجد قَ$(\frac{\pi}{6})$

(أ) π (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) -2π (د) $-\frac{\pi}{2}$

⑧ إذا كانت ق(س) = س |ظاس| فإن قَ(π)

(أ) $-\pi$ (ب) π (جـ) صفر (د) غ.م

⑨ إذا كان ص = $\left(\frac{1 + جاس}{جتاس}\right)^{ن}$ ، جتاس ≠ ، فإن

صَ =

(أ) ن قاس (ب) ن ظاس (جـ) ن ص ظاس

(د) ن ص قاس

⑩ إذا كانت ص جتاس − ص جاس = $\frac{1}{جتاس + جاس}$

فإن صَ

(أ) جتاس − جاس (ب) ٢ قا٢س ظا ٢س

(جـ) ٢ قتا٢س ظتا٢س (د) −٢ قتا٢س ظتا٢س

حلول أسئلة اختبار درس
مشتقات الاقترانات المثلثية دورة 2004

① ص = جاس + جتاس

ص' = جتاس − جاس

(ص')^2 = (جتاس − جاس)^2 = جتا^{2}س − ~~٢جاس~~ جتاس + جا^{2}س

ص^2 = (جاس + جتاس)^2 = جا^{2}س + ~~٢جاس~~ جتاس + جتا^{2}س

$\Leftarrow$ (ص')^2 + ص^2 = ~~جتا^{2}س + جا^{2}س~~ + ~~جتا^{2}س + جا^{2}س~~ = ١+١
١ ١
= $\boxed{٢}$

فرع ⓓ

② ق(س) = س + جتاس

ق'(س) = ١ − جاس = ٠ $\Leftarrow$ جاس = ١

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢نπ

عندما ن = ٠ $\Leftarrow$ س = $\frac{\pi}{٢}$ $\in$ [−٢π ، ٢π]

عندما ن = ١ $\Leftarrow$ س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢π = $\frac{٥\pi}{٢}$ $\in$ [−٢π ، ٢π]

عندما ن = −١ $\Leftarrow$ س = $\frac{\pi}{٢}$ − ٢π

$\Leftarrow$ س = −$\frac{٣\pi}{٢}$ $\in$ [−٢π ، ٢π]

∴ س = {$\frac{\pi}{٢}$ ، −$\frac{٣\pi}{٢}$} فرع ⓓ

③ $ص = قاس + ظاس$ فإن $\frac{دص}{دس} =$

$ص' = قاس \, ظاس + قا^2س$

$= قاس \left(ظاس + قاس \right)$

$= \frac{1}{جتاس} \left(\frac{جاس}{جتاس} + \frac{1}{جتاس} \right)$

$= \frac{1}{جتاس} \left(\frac{1 + جاس}{جتاس} \right)$

$= \frac{1 + جاس}{جتا^2س} = \frac{1 + جاس}{1 - جا^2س} = \frac{\cancel{(1 + جاس)}}{(1 - جاس)\cancel{(1 + جاس)}}$

$= \boxed{\frac{1}{1 - جاس}}$ فرع (ج)

④ $ص = جاس$ ، $ص'' + ٦ص$

$ص' = جتاس$ ، $ص'' = -جاس$

$ص'' + ٦ص = -جاس + ٦جاس = ٥جاس$

$= \boxed{٥ص}$ فرع (أ)

⑤ ق(س) = جا(-س) + جتا(-س) ، ق $(\frac{\pi}{4})$

ق(س) = - جاس + جتاس

قَ(س) = - جتاس - جاس

قَ $(\frac{\pi}{4})$ = - جتا $\frac{\pi}{4}$ - جا $\frac{\pi}{4}$

= $\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

= $\frac{-2}{\sqrt{2}}$ فرع (ب)

تذكر

جا(-س) = - جاس

جتا(-س) = جتاس

⑥ ص = أ جاس + ب جتاس

صَ = أ جتاس - ب جاس

(صَ)^2 + ص^2

= (أ جتاس - ب جاس)^2 + (أ جاس + ب جتاس)^2

= أ^2 جتا^{2}س ~~- 2أب جاس جتاس~~ + ب^2 جا^{2}س +

أ^2 جا^{2}س ~~+ 2أب جاس جتاس~~ + ب^2 جتا^{2}س

= أ^2 ~~(جا^{2}س + جتا^{2}س)~~ + ب^2 ~~(جا^{2}س + جتا^{2}س)~~

1 1

= أ^2 + ب^2 فرع (ج)

⑦ ق(س) = $\frac{\pi}{\text{قاس}}$ أوجد قَ($\frac{\pi}{6}$)

ق(س) = $\frac{\pi}{\frac{1}{\text{جتاس}}}$ = π جتاس

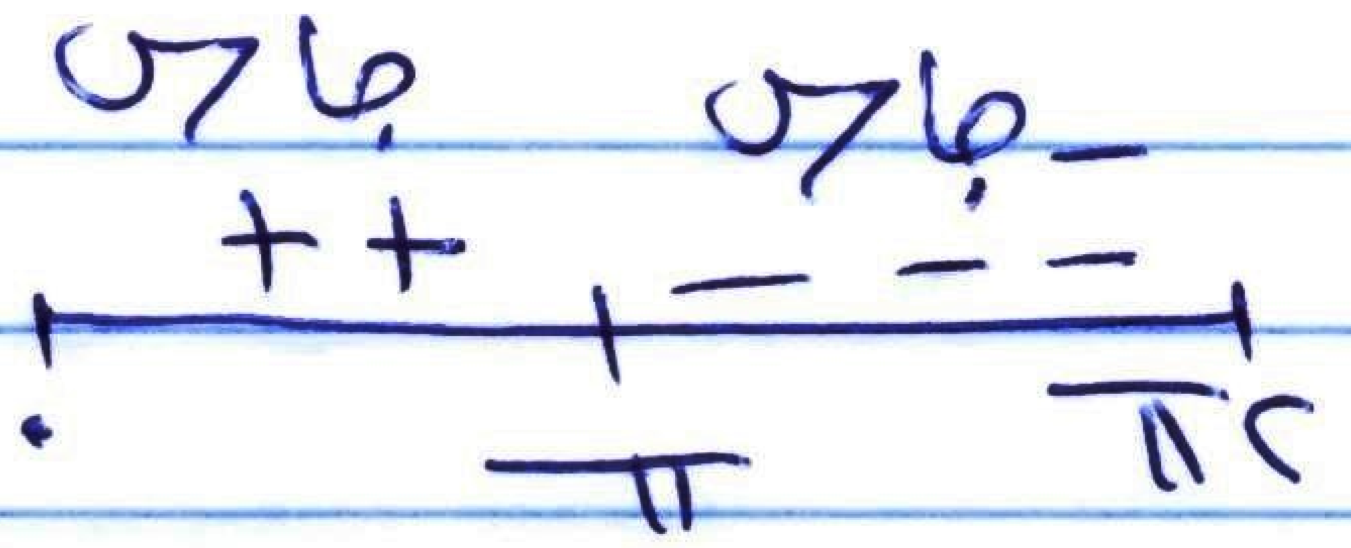
∴ قَ(س) = $-\pi$ جاس

قَ($\frac{\pi}{6}$) = $-\pi$ جا $\frac{\pi}{6}$ = $-\pi \times \frac{1}{2}$ = $\boxed{\frac{-\pi}{2}}$ فرع (د)

⑧ ق(س) = س |جاس| ، س ∈ [0، 2π]

|جاس|

جاس = 0 ⟸ س = 0، 2π، π



ق(س) = س |جاس| = { س جاس ، $0 \le$ س $\le \pi$
−س جاس ، $\pi \le$ س $\le 2\pi$

ق(س) متصل عند س = π (تحقق من ذلك)

قَ(س) = { س جتاس + جاس ، $0 <$ س $< \pi$
−س جتاس − جاس ، $\pi <$ س $< 2\pi$
غ.م ، س = 0، π، 2π

∴ قَ(π) غير موجودة فرع (د)

⑨ $\text{ص} = \left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{\text{ن}}$ ، $\text{جتاس} \neq ٠$.

$$\text{ص}' = \text{ن}\left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{\text{ن}-1} \times \left(\frac{\text{جتاس} \times \text{جتاس} + \text{جاس}(1+\text{جاس})}{\text{جتا}^2\text{س}}\right)$$

$$= \text{ن}\left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{\text{ن}-1} \times \frac{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جاس}(1+\text{جاس})}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$= \text{ن}\left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{\text{ن}-1} \times \frac{\overset{1}{\cancel{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}}} + \text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$= \text{ن}\left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{\text{ن}-1} \times \left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{1} \times \frac{1}{\text{جتاس}}$$

$$= \text{ن}\left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{\text{ن}} \times \frac{1}{\text{جتاس}}$$

$$= \boxed{\text{ن ص قاس}}$$ فرع (د)

خذ ص عامل مشترك
ثم اضرب في
$\frac{1}{\text{جتاس} - \text{جاس}}$

① $\text{ص جتاس} - \text{ص جاس} = \frac{1}{\text{جتاس} + \text{جاس}}$

$$\frac{\text{ص}\,(\cancel{\text{جتاس} - \text{جاس}})}{(\cancel{\text{جتاس} - \text{جاس}})} = \frac{1}{(\text{جتاس} + \text{جاس})(\text{جتاس} - \text{جاس})}$$

$\boxed{\text{جتا٢س} = \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}$

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}$$

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{جتا٢س}} = \text{قا٢س}$$

$\text{ص}' = ٢\ \text{قا٢س ظا٢س}$ فرع (ب)

⑥

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة ٢٠٠٤م

حلول أسئلة اختبار درس

(قاعدة لوبيتال، ومشتقة الاقتران الأسي واللوغاريتمي)

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار دروس قاعدة لوبيتال ، ومشتقة الاقتران الأسي واللوغاريتمي

دفعة 2004

① $\lim\limits_{هـ \to 0} \dfrac{قا^{2}(٥س - ٣هـ) - ظا^{2}٥س - ١}{هـ} =$

أ) ١٠ ظا٥س قا²٥س   ب) -٣ قا²٥س ظا٥س

جـ) -٦ قا²٥س ظا٥س   د) -١٦ قا²٥س ظا٥س

② إذا كان $ق(س^{3}+١) = ٥\,هـ^{س-١} + لو_{هـ}(٢+س)^{3}$ ، فما قيمة ق(٢)؟

أ) ٤   ب) ١   جـ) ٢   د) صفر

③ ما قيمة $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{١ + جتا٦س - ٢جتا^{2}س}{س^{4}}$ ؟

أ) -١٦   ب) ١٦   جـ) ٨   د) -٨

④ $\lim\limits_{س \to هـ} \dfrac{لو_{هـ}(لو_{هـ}س)}{هـ^{3} - هـ س^{2}} =$

أ) $-\dfrac{١}{هـ}$ ب) $-\dfrac{١}{هـ^{2}}$ جـ) $\dfrac{١}{هـ^{3}}$ د) $-\dfrac{١}{هـ^{3}}$

①

٥) إذا كان $ق(س) = \frac{\text{لوهـ}(م(س))}{س}$ ، $م(١) = هـ^{٢}$

$مَ(١) = ٢هـ$

فإن $قَ(١) = $ ؟!

أ) $٢(\frac{١}{هـ} - ١)$ ب) $٣(\frac{١}{هـ} - ١)$ ج) $(١ - هـ)^{٢}$ د) $-هـ$

٦) إذا كان ق(س) كثير حدود وكان $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}\,ق(س) - ٢}{٢س - ٢} = ٥$

وكان $ل(س) = \frac{س^{٢}}{ق(س)}$ أوجد $لَ(١)$

أ) $\frac{٤}{٥}$ ب) $\frac{-٤}{٥}$ ج) $\frac{-٥}{٤}$ د) $\frac{٥}{٤}$

٧) إذا كان $ص = س^{٢} + هـ^{س} - س^{هـ}$ (حيث هـ العدد النيبري)

ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ،

أ) -١ ب) ١ ج) صفر د) $\frac{١}{٢}$

٨) إذا كان $ق(س) = هـ^{\sqrt[٣]{س-١}} \times \text{لوهـ}\sqrt{س}$ ، فإن $قَ(١) =$

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $-\frac{١}{٢}$ د) صفر

⑨ إذا كان $هـ^{ق(س)} = س^2 + 1$ ، فإن قَ(س) =

(أ) $\frac{1}{س^2+1}$ (ب) $\frac{2س}{س^2+1}$ (ج) $2س(س^2+1)$ (د) $هـ^{س^2+1}$

⑩ إذا كانت $\lim\limits_{س \to -1} \frac{ب س^2 - أ س - 5}{س + 1} = -7$ ، فإن قيمة أ ، ب على الترتيب

(أ) ٣ ، ٢ (ب) -٢ ، ٣ (ج) ٢ ، -٣ (د) -٣ ، -٢

حلول أسئلة اختبار درس

قاعدة لوبيتال، مشتقة الاقتران الأسي واللوغارتمي

① $\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{قا}^2(\text{س}-3\text{هـ}) - \text{ظا}^2\text{س} - 1}{\text{هـ}}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س} - 1}{0}$

$1 + \text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س}$

$\Leftarrow \text{قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س} = 1$

$= \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

نستخدم قاعدة لوبيتال ونشتق بالنسبة لـ هـ

$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{-6\,\text{قا}(\text{س}-3\text{هـ})\,\text{قا}(\text{س}-3\text{هـ})\,\text{ظا}(\text{س}-3\text{هـ}) - 0}{1}$

$= \lim_{\text{هـ}\to 0} -6\,\text{قا}^2(\text{س}-3\text{هـ})\,\text{ظا}(\text{س}-3\text{هـ})$

ظا^2 س ثابت بالنسبة لـ هـ

$= \boxed{-6\,\text{قا}^2\text{س}\,\text{ظا}\,\text{س}}$ فرع (ج)

② $\text{قَ}(\text{س}^{٣}+١) = ٥\,\text{هـ}^{\text{س}-١} + \text{لوهـ}(٢+\text{س})^{٣}$ ، $\text{قَ}(٢)$ ؟

الحل ا شتقه الطرفين

$$\text{قَ}(\text{س}^{٣}+١) \times ٣\text{س}^{٢} = ٥\,\text{هـ}^{\text{س}-١} + \frac{٣(٢+\text{س})^{٢}}{(٢+\text{س})^{٣}}$$

افرض $\text{س}^{٣}+١=٢$

$\Leftarrow \text{س}^{٣} = ٢-١ \Leftarrow \text{س}^{٣} = ١ \Leftarrow \text{س} = ١$

عندما $\text{س} = ١$

$$\text{قَ}(٢) \times ٣ = ٥\,\text{هـ}^{٠} + \frac{٣(٣)^{٢}}{(٣)^{٣}} \Leftarrow ٣\,\text{قَ}(٢) = ٥+١$$

$\Leftarrow \text{قَ}(٢) = ②$ فرع ج

③ $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{١ + \text{جتا}٦\text{س} - ٢\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

الحل بالتعويض المباشر $\dfrac{١+١-٢}{٠} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$٢\text{جاس}\,\text{جتاس} = \text{جا}٢\text{س}$

نستخدم قاعدة لوبيتال ونشتق بالنسبة لـ س

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{-٦\,\text{جا}٦\text{س} + ٤\,\text{جتاس}\,\text{جاس}}{٢\text{س}} = \frac{٠+٠}{٠} = \left(\frac{٠}{٠}\right)$$

تعويض مباشر

نستخدم لوبيتال مرة ثانية

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{-٣٦\,\text{جتا}٦\text{س} + ٤\,\text{جتا}٢\text{س}}{٢}$$

$$= \frac{-٣٦+٤}{٢} = \frac{-٣٢}{٢} = \boxed{-١٦}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = ١ \\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,١ = \text{صفر} \end{array}}$$

④ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to \text{هـ}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})}{\text{هـ}^{٣} - \text{هـ}^{٢}\,\text{س}}$

(الحل) بالتعويض المباشر $\displaystyle \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ})}{\text{هـ}^{٣} - \text{هـ}^{٢} \times \text{هـ}} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,١}{\text{هـ}^{٣} - \text{هـ}^{٣}}$

$\displaystyle = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نستخدم لوبيتال والمشتقة بالنسبة لـ س

$$\text{نها}_{\text{س} \to \text{هـ}} \frac{\dfrac{\left(\frac{١}{\text{س}}\right)}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})}}{٠ - \text{هـ}^{٢}} = \frac{\dfrac{\frac{١}{\text{هـ}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}}}{-\text{هـ}^{٢}} = \frac{\left(\frac{١}{\text{هـ}}\right)}{\frac{١}{-\text{هـ}^{٢}}} = \frac{١}{\text{هـ}} \times \frac{١}{-\text{هـ}^{٢}}$$

$$= \boxed{\frac{-١}{\text{هـ}^{٣}}}$$

⑤ $\displaystyle \text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{م}(\text{س}))}{\text{س}}$

(الحل) $$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س} \times \dfrac{\text{م}'(\text{س})}{\text{م}(\text{س})} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{م}(\text{س})) \times ١}{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ق}'(١) = \frac{١ \times \dfrac{\text{م}'(١)}{\text{م}(١)} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{م}(١))}{١} = \frac{٢\text{هـ}}{\text{هـ}^{٢}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{٢}$$

$$= \frac{٢}{\text{هـ}} - ٢$$

$$= \boxed{٢\left(\frac{١}{\text{هـ}} - ١\right)}$$

(٦) $\text{نها}_{\text{س}\to ١} \dfrac{\sqrt{\text{س}}\ \text{ق(س)} - ٢}{٢\text{س} - ٢} = ٥$ ، $\text{ل(س)} = \dfrac{\text{س}^٢}{\text{ق(س)}}$

الحل بالتعويض المباشر ⟸ $\dfrac{\sqrt{١}\ \text{ق(١)} - ٢}{\text{صفر}} = ٥$

∵ النهاية موجودة وناتج التعويض في المقام = صفر

⟸ ناتج تعويض البسط = صفر ⟸ ق(١) − ٢ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{ق(١)} = ٢}$

∵ ناتج التعويض المباشر $\dfrac{٠}{٠}$ ⟸ نستخدم لوبيتال ونشتق بالنسبة لـ س

$\text{نها}_{\text{س}\to ١} \dfrac{\sqrt{\text{س}} \times \text{قَ(س)} + \text{ق(س)} \times \dfrac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}}{٢} = ٥$

$\dfrac{\sqrt{١}\ \text{قَ(١)} + \text{ق(١)} \times \frac{١}{٢}}{٢} = ٥$ ⟸ $\dfrac{\text{قَ(١)} + \frac{١}{٢}\text{ق(١)}}{٢} = ٥$

⟸ قَ(١) + $\frac{١}{٢}$ ق(١) = ١٠ ⟸ قَ(١) + ١ = ١٠

⟸ $\boxed{\text{قَ(١)} = ٩}$

$\text{ل(س)} = \dfrac{\text{س}^٢}{\text{ق(س)}}$ ⟸ $\text{لَ(س)} = \dfrac{\text{ق(س)} \times ٢\text{س} - \text{س}^٢ \times \text{قَ(س)}}{\text{ق}^٢\text{(س)}}$

$\text{لَ(١)} = \dfrac{\text{ق(١)} \times ٢ - \text{قَ(١)}}{\text{ق}^٢(١)}$

$\text{لَ(١)} = \dfrac{٢ \times ٢ - ٩}{(٢)^٢} = \boxed{\dfrac{-٥}{٤}}$ فرع (ج)

٧ الحل $\frac{دص}{دس} = ٢س + ٠ + هـ^{س} - هـ\,س^{هـ-١}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٠} = ٠ + ٠ + هـ^{٠} - هـ(٠)^{هـ-١} = ٠ + ١ - ٠ = \boxed{١}$ فرع ب

٨ $ق(س) = هـ^{\sqrt[3]{س-١}} \times لو_{هـ}\sqrt{س}$

$ق(س) = هـ^{(س-١)^{\frac{1}{3}}} \times لو_{هـ}(س)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\, هـ^{(س-١)^{\frac{1}{3}}} \times لو_{هـ}س$

$\bar{ق}(س) = \frac{1}{2}\, هـ^{(س-١)^{\frac{1}{3}}} \times \frac{1}{س} + لو_{هـ}س \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\, هـ^{(س-١)^{\frac{1}{3}}} \times \frac{1}{3}(س-١)^{-\frac{2}{3}}$

$\bar{ق}(١) = \frac{1}{2}\, هـ^{٠} \times ١ + لو_{هـ}١ \times \frac{1}{2} \times ٠ \times$

$= \frac{1}{2} + صفر = \boxed{\frac{1}{2}}$ فرع ب

٩ $هـ^{ق(س)} = س^{٢} + ١$

اشتق الطرفين $\Leftarrow هـ^{ق(س)} \times \bar{ق}(س) = ٢س$

$\Leftarrow \bar{ق}(س) = \frac{٢س}{هـ^{ق(س)}} = \boxed{\frac{٢س}{س^{٢}+١}}$

فرع ب

⑩ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ب س}^{٢} - \text{أ س} - ٥}{\text{س} + ١} = -٧$

الحل ∵ النهاية موجودة وناتج تعويض المقام = صفر

⇐ ناتج تعويض البسط = صفر

⇐ $\text{ب} + \text{أ} - ٥ = ٠$ ⇐ $\boxed{\text{ب} + \text{أ} = ٥}$ ← ①

باستخدام قاعدة لوبيتال $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{ب س} - \text{أ}}{١} = -٧$

⇐ $-٢\text{ب} - \text{أ} = -٧$ ← ②   من ①، ②

$\text{أ} + \text{ب} = ٥$

$-\text{أ} - ٢\text{ب} = -٧$ +

$-\text{ب} = -٢$ ⇐ $\boxed{\text{ب} = ٢}$ بالتعويض في ①

$٢ + \text{أ} = ٥$

⇐ $\boxed{\text{أ} = ٣}$

رياضيات الثاني عشر دفعة ٢٠٠٤

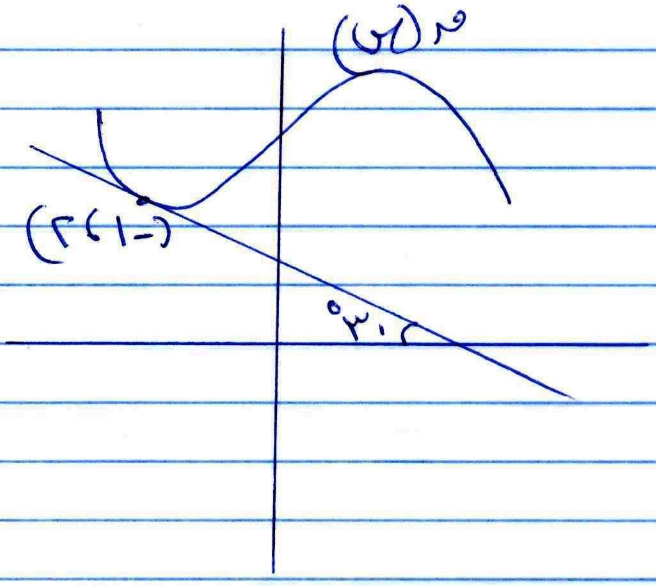
حلول أسئلة اختبار تطبيقات هندسية

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

QR Code للاختبار

اختبار درس تطبيقات هندسية

دفعة 2004



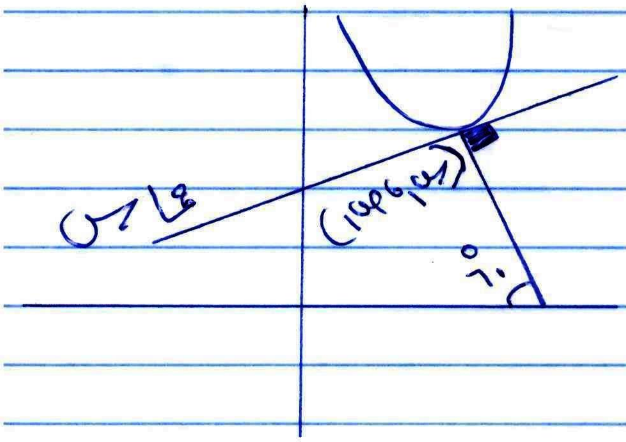
① بالاعتماد على الشكل المجاور معادلة المماس هي

أ) $\sqrt{٣}\,(س - ١)$

ب) $-\sqrt{٣}\,(س + ١)$

ج) $\frac{١}{\sqrt{٣}}\,(س + ١)$

د) $-\frac{١}{\sqrt{٣}}\,(س + ١)$



② في الشكل المجاور أوجد قَ(س١)

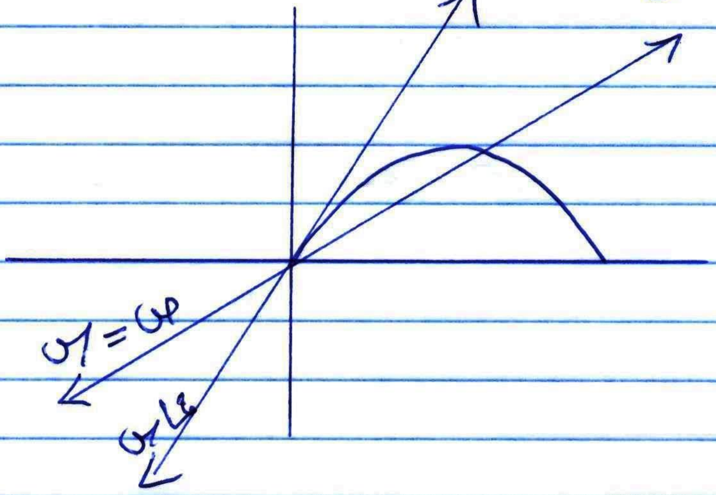
أ) $\frac{١}{٢}$

ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ج) $-\frac{١}{٢}$

د) $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

③ من الشكل التالي ، قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ص = س ومماس منحنى الاقتران ق(س) = √٣ س − س² عند النقطة (٠،٠)



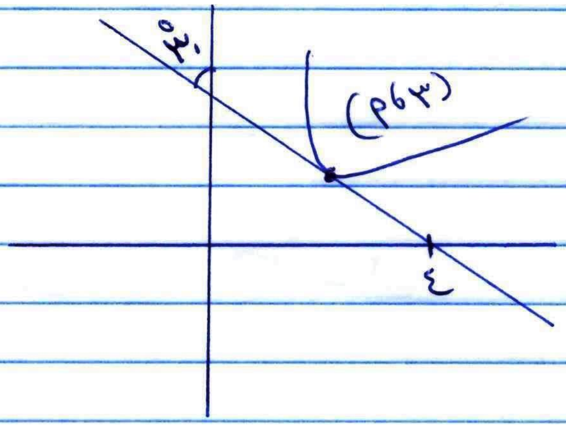
أ) π/٣ ب) π/٤

ج) π/١٢ د) π/٦

④ الشكل التالي يمثل منحنى ق(س) حيث رسم مماس للاقتران عند النقطة (٣، م) فما قيمة الثابت م ؟

أ) ١/٣ ب) −√٣

ج) √٣ د) ١/√٣



⑤ جد مساحة المثلث القائم الزاوية المكون من المماس المرسوم لمنحنى العلاقة ص = √س ، س > ٠ . عند النقطة (٤، ٢) ومحور السينات والمستقيم س = ٤

أ) ٨ ب) ١٦ ج) ٤ د) ٢

⑥ إذا كان منحنيا الاقترانين ق(س) = $س^٢$ + أس + ب
هـ(س) = $س^٣$ - $س^٢$ - س + جـ متماسان عند النقطة (-١، ١)
فإن

(أ) قيمة أ، ب، جـ على الترتيب

(أ) ٦ ، ٥ ، ١ (ب) -٢ ، ٤ ، ٥

(جـ) ٥ ، ٦ ، ١ (د) ٥ ، ١ ، -٦

⑦ إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران
ق(س) عند س = ٢ هي ص = $\frac{١}{٢}$س + ٣ فإن

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٤}{س^٢ + س - ٦}$$ تساوي

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) -$\frac{١}{٥}$ (جـ) -$\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

⑧ مساحة الشكل الرباعي الناتج عن تقاطع المماس والعمودي
على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^٢$ + ٤ عند النقطة
(١، ٥) ومحوري السينات والصادات

(أ) ٢٩ (ب) ٢٥ (جـ) ١٢٥ (د) ١١٦

⑨ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ١) ، (٣ ، ٤)
يمس المنحنى ق(س) = أس² - ٧س + ٥ فجد قيمة أ إذا

(أ) ٤ (ب) ٢ (ج) -٤ (د) -٢

⑩ إذا كان ق(س) = س × لَ(٢س) وكانت ص = (٤٨ - س) / ٩
تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س)
عند س = ٣ ، فجد لَ(٦)

(أ) ٢ (ب) ١/٣ (ج) -١/٣ (د) ٥

حلول أسئلة اختبار درس تطبيقات هندسية دفعة 2004

① من الرسم نقطة التماس هي (-١، ٢)

ميل المماس (م) = ظا (١٨٠ - ٣٠°) = ظا ١٥٠° = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$

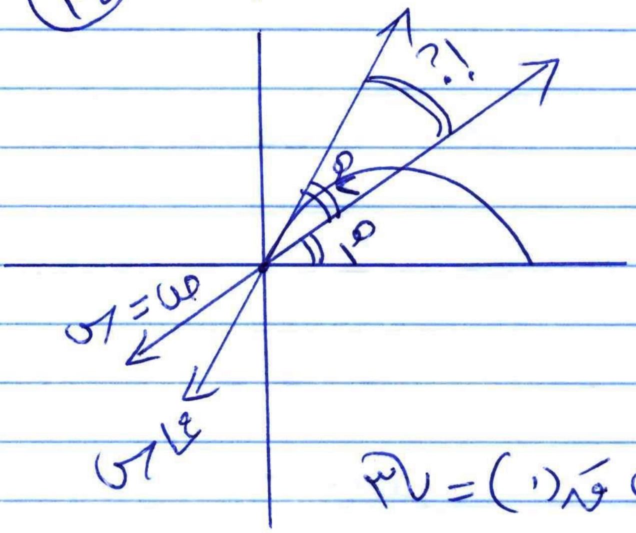
معادلة المماس هي ص - ص١ = م (س - س١)

⇐ ص - ٢ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ (س + ١)

② ميل العمودي = ظا (١٨٠ - ٦٠) = ظا ١٢٠° = - $\sqrt{٣}$

∴ ميل المماس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

الميل = المشتقة عند نقطة التماس ⇐ قَ(س١) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$



③ ميل المستقيم ص = س هو ①

ظا هـ١ = ١ ⇐ هـ١ = $\boxed{\frac{\pi}{٤}}$

ع(س) = $\sqrt{٣}$ س - س²

قَ(س) = $\sqrt{٣}$ - ٢س

نقطة التماس هي (٠، ٠) ⇐ ميل المماس قَ(٠) = $\sqrt{٣}$

ظا هـ٢ = $\sqrt{٣}$ ⇐ هـ٢ = $\boxed{\frac{\pi}{٣}}$

الزاوية المحصورة بين المستقيم ص = س و √٣ س مماس الاقتران

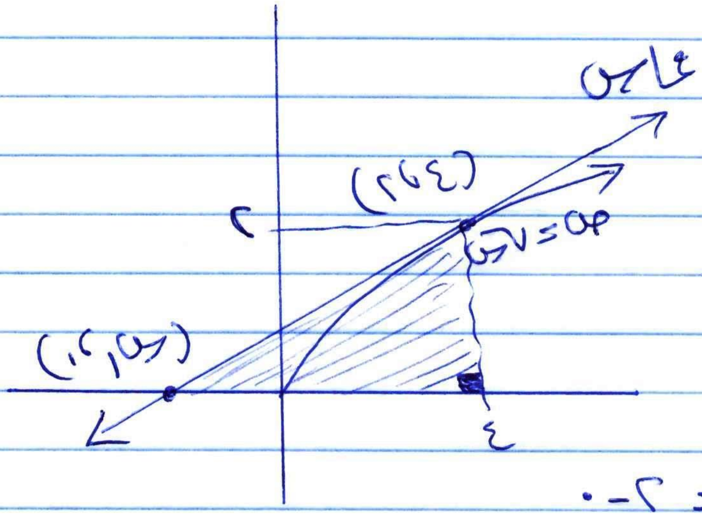
= $\frac{\pi}{٣} - \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{١٢}$

* حل س٤ ص١٠

⑤ ص = √س

$$\text{ص}' = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$$

$$\text{ص}'\Big|_{\text{س}=4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$



$$\text{لكن الميل من النقطتين للماس} = \frac{2-0}{4-\text{س}_1}$$

الميل من المماس = الميل من النقطتين
عند نقطة التماس

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{4-\text{س}_1} \Leftarrow 4-\text{س}_1 = 8 \Leftarrow \text{س}_1 = \boxed{-4}$$

⑥ ق(س) ، هـ(س) متماسان عند النقطة (-١،٠)

→ ق(-١) = هـ(-١)

→ ق'(-١) = هـ'(-١)

ق(س) يمر بالنقطة (-١،٠) ⟸ ق(-١) = ٠

⟸ ١ - أ + ب = ٠ ⟸ $\boxed{\text{-أ + ب} = -1}$ ← ①

هـ(س) = س³ - س² - س + جـ ، هـ يمر بالنقطة (-١،٠)

هـ(-١) = -١ - ١ + ١ + جـ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{جـ} = 1}$

ق'(س) = ٢س + أ

ق'(-١) = -٢ + أ

هـ'(س) = ٣س² - ٢س - ١

هـ'(-١) = ٣ + ٢ - ١ = ٤

ق'(-١) = هـ'(-١)

⟸ -٢ + أ = ٤ ⟸ $\boxed{\text{أ} = 6}$

بالتعويض في ① عن قيمة أ

-٦ + ب = -١ ⟸ $\boxed{\text{ب} = 5}$

⑦ ص = ½ س + ٣ (معادلة العمودي)

ص' = ½ (ميل العمودي)

ق(٢) = ٤

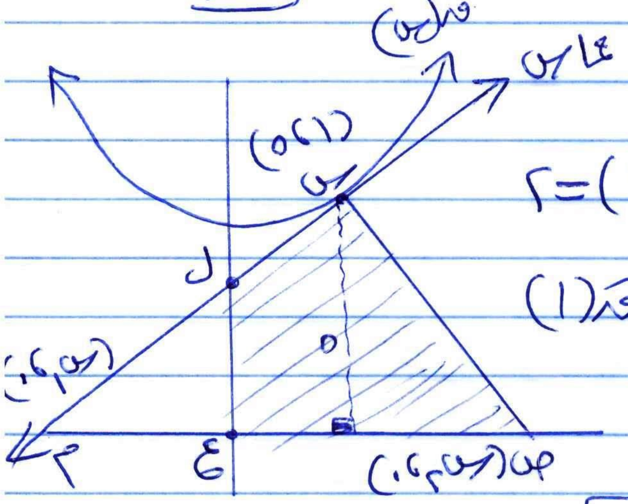
⇐ ميل المماس = -٢ ⇐ ق'(٢) = -٢

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٤}{س^٢ + س - ٦} = \text{نها}_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{(س - ٢)(س + ٣)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢} \times \frac{١}{س + ٣}$$

$$= ق'(٢) \times \frac{١}{٥} = -٢ \times \frac{١}{٥}$$

$$= \boxed{\frac{-٢}{٥}}$$



⑧ ق'(س) = ٢س ، ميل المماس = ق'(١) = ٢

ميل المماس من النقطتين (١،٥) ، (س١،٠) = ق'(١)

$$\Leftarrow \frac{٥ - ٠}{١ - س_١} = ٢$$

⇐ ٢ - ٢س١ = ٥ ⇐ س١ = $\boxed{\frac{-٣}{٢}}$ ⇐ م(-٣/٢ ، ٠)

معادلة المماس هي ص - ٥ = ٢(س - ١)

ل نقطة تقاطع المماس مع محور الصادات عندما س = ٠

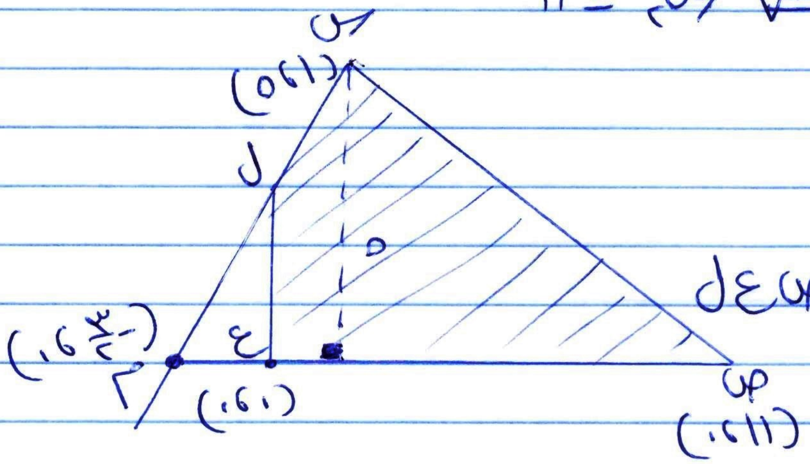
ص - ٥ = -٢ ⇐ ص = ٣ ⇐ احداثيات ل (٠ ، ٣)

لإيجاد س٢

ميل العمودي من النقطة (١،٥) ، (س٢،٠) = (٥ − ٠) / (١ − س٢) = (−١/٢)

⇐ ١٠ = −١ + س٢ ⇐ س٢ = ١١

∴ النقطة ص (١١،٠)



∴ مساحة الشكل الرباعي س ص ع ل

= مساحة △ س ص م −

مساحة △ ل ع م

= ١/٢ (١١ − (−٣/٢)) × ٥ − [١/٢ (٠ − (−٣/٢)) × ٣]

= ١/٢ × ٢٥/٢ × ٥ − ٩/٤ = ١٢٥/٤ − ٩/٤ = ١١٦/٤ = (٢٩)

(٩) ميل المستقيم من النقطتين = (٤ − ١) / (٣ − ٠) = ١

معادلة المستقيم : ص − ١ = ١ (س − ٠) ⇐ $\boxed{\text{ص} = \text{س} + ١}$ ٤

قَ(س) = ٢م س − ٧

الميل من النقطتين = الميل من المشتقة

١ = ٢م س − ٧ ⇐ س = ٨ / ٢م = $\boxed{٤/م}$

تابع س٩

∵ المستقيم والمنحنى متماسان ⟸ ق(س) = ص عند نقطة التماس

⟸ $أس^{٢} - ٧س + ٥ = س + ١$

$أ \times \frac{١٦}{أ^{٢}} - ٧ \times \frac{٤}{أ} + ٥ = \frac{٤}{أ} + ١$

$\frac{١٦}{أ} - \frac{٢٨}{أ} + ٥ = \frac{٤}{أ} + ١$ ⟸ $\frac{٤}{أ} - \frac{١٦}{أ} + \frac{٢٨}{أ} = ٥ - ١$

⟸ $\frac{١٦}{أ} = ٤$

⟸ $أ = \frac{١٦}{٤} = ④$

⑩ معادلة العمودي $ص = \frac{٤٨}{٥} - \frac{١}{٥}س$

ميل العمودي = $\boxed{-\frac{١}{٥}}$ ⟸ ميل المماس = ٥ = قَ(٣)

قَ(س) = س × لَ(٢س) × ٢ + ل(٢س) × ١

ق(٣) = $\frac{٤٨ - ٣}{٥} = \frac{٤٥}{٥} = ٩$

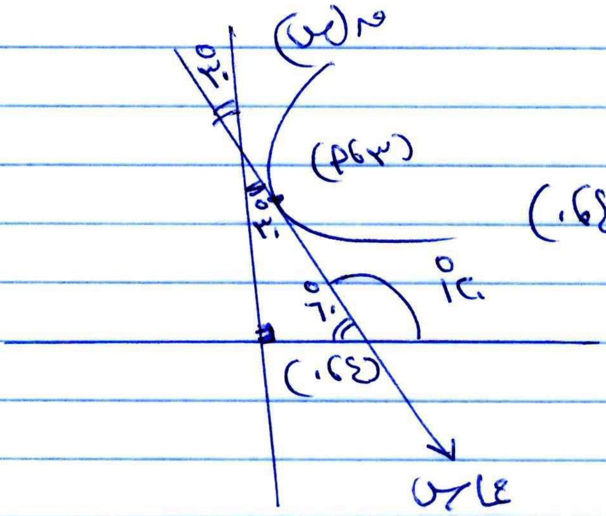
كذلك ق(٣) = ٣ × ل(٦) = ٩ ⟸ ل(٦) = ③

قَ(٣) = ٣ لَ(٦) × ٢ + ل(٦)

٥ = ٣ × لَ(٦) × ٢ + ٣

٥ = ٦ لَ(٦) + ٣ ⟸ $\frac{\cancel{٦} لَ(٦)}{\cancel{٦}} = \frac{٢}{٦}$ ⟸ لَ(٦) = $\boxed{\frac{١}{٣}}$

س٤



ميل ع١ حس من النقطتين (٣، م) ، (٤، ٠)

$= \frac{م - ٠}{٣ - ٤} =$ ظا ١٢٠°

$\Leftarrow \frac{م}{-١} = -\sqrt{٣}$

$\Leftarrow \boxed{م = \sqrt{٣}}$

١٥

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة ٢٠٢٢

حلول أسئلة اختبار تطبيقات فيزيائية

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار تطبيقات فيزيائية

دفعة 2004

① يتحرك جسم حسب العلاقة ف = $ن^{ج}$ وكانت سرعته بعد ١٠ث مثلي سرعته بعد ٥ث فإن قيمة ج =

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) ٢ د) ٤

② يسير جسم في خط مستقيم بحيث يتحدد موقعه بالأمتار عن نقطة ثابتة بعد ن ثانية بالقاعدة ف(ن) = $ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٣ن + ٣$ فإن التسارع عندما تنعدم السرعة يساوي

أ) صفر م/ث² ب) ١م/ث² ج) ٣م/ث² د) ٢٤م/ث²

③ يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = $٢جا^{٢}\frac{ن}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ن$ ، ن ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$] ، حيث ف: المسافة بالأمتار ، ن: الزمن بالثواني

جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته $\sqrt{٣}$

أ) $\frac{١}{٤}$ م/ث² ب) $\frac{١}{٢}$ م/ث² ج) $\frac{١}{٨}$ م/ث² د) $-\frac{١}{٨}$ م/ث²

④ من نقطة على عمق (٥٥) م عن سطح الأرض قذف جسم رأسياً إلى أعلى بحيث أن المسافة المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانية من قذف الجسم تعطى بالعلاقة ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن^{٢} ، جد سرعة الجسم لحظة وصوله إلى مستوى سطح الأرض.

ⓐ ٥٠م/ث ⓑ ٢٥م/ث ⓙ −٥٠م/ث ⓓ أ+ب معاً

⑤ إذا تحرك جسم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن ، ف بالأمتار ن الزمن بالثواني ، فإن التسارع المتوسط للجسم في الثواني الثلاث الأولى يساوي

ⓐ ٩ ⓑ ٥ ⓙ ٤ ⓓ ٦

⑥ قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح الأرض حسب العلاقة ف(ن) = أن − ٥ن^{٢} ، جد قيمة أ التي تجعل أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم هو ٨٠

ⓐ ٥٠ ⓑ ٦٠ ⓙ ٤٠ ⓓ ١٠٠

⑦ من نقطة على ارتفاع ٨٠ قدم من سطح الأرض قذف جسم رأسياً لأعلى وفق العلاقة ف(ن) = ٦٤ن − ١٦ن^2 ، أوجد

(أ) مجموعة قيم ن حيث ع > ٠

(أ)]٠، ٢[(ب) [٠، ٢[(ج) [٠، ٢] (د)]٠، ٢]

(ب) جد مجموعة قيم ن حيث ع < ٠

(أ) [٠، ٢] (ب)]٢، ∞[(ج)]٢، ٥[(د)]−∞، ٠]

⑧ قذف جسم لأعلى من سطح بناية فكان ارتفاعه عن سطح البناية يعطى بالعلاقة ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن^2 فإذا علمت أن سرعته لحظة اصطدامه بالأرض تساوي (−٦٠م/ث) فكم ارتفاع البناية ؟

(أ) ٣٠م (ب) ١٣٥م (ج) ١٦٠م (د) ١٧٥م

⑨ أسقط جسم من ارتفاع ٣٠٠م عن سطح الأرض بحيث كانت المسافة التي يقطعها بالأمتار بعد ن ث هي ف(ن) = ٥ن^2 ، جد سرعة الجسم عندما يكون الجسم على ارتفاع ١٧٥م من سطح الأرض

(أ) ٢٥م/ث (ب) ٣٠م/ث (ج) ١٠م/ث (د) ٥٠م/ث

حلول أسئلة اختبار تطبيقات فيزيائية

دفعة 2004

① $ف = ن^{ج}$

$ع(١٠) = ٢ع(٥)$

$ع = ج\, ن^{ج-١}$

$ع(١٠) = ج\,(١٠)^{ج-١}$

$ع(٥) = ج\,(٥)^{ج-١}$

$\Leftarrow ج(١٠)^{ج-١} = ٢ج(٥)^{ج-١}$

$\Leftarrow \cancel{ج}(٢)^{ج-١}\cancel{(٥)}^{ج-١} = ٢\cancel{ج}\cancel{(٥)}^{ج-١}$

$\Leftarrow (٢)^{ج-١} = ٢^{١} \Leftarrow ج-١ = ١$

$\Leftarrow ج = ١+١$

$\Leftarrow \boxed{ج = ٢}$ فرع (ج)

② $ف(ن) = ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٣ن + ٣$ ، $ت|_{ع=٠} = ؟$

$ع(ن) = ٣ن^{٢} - ٦ن + ٣$

$٠ = ٣ن^{٢} - ٦ن + ٣ \Leftarrow ن^{٢} - ٢ن + ١ = ٠$

$\Leftarrow (ن-١)(ن-١) = ٠ \Leftarrow ن = ١ث$

$ت = ٦ن - ٦ \Leftarrow ت|_{ن=١} = ٦-٦ = \boxed{صفر\ م/ث^{٢}}$ فرع (م)

③ ف(ن) = ٢جا² $\frac{\text{ن}}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ن ، ن ∈ $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

تذكر/ ٢جاس جتاس

= جا٢س

ع(ن) = فَ(ن)

= ٤ جا $\frac{\text{ن}}{٢}$ × جتا $\frac{\text{ن}}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ٢جا $\frac{\text{ن}}{٢}$ جتا $\frac{\text{ن}}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ع = جا٢ $(\frac{\text{ن}}{٢})$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = جا ن + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ع = $\sqrt{٣}$ ⟸ $\sqrt{٣}$ = جا ن + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⟸ جا ن = $\sqrt{٣}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ⟸ جا ن = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⟸ ن = $\frac{\pi}{٣}$ ∈ $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

ت = جتا ن ⟸ ت $(\frac{\pi}{٣})$ = جتا $\frac{\pi}{٣}$ = $\boxed{\frac{١}{٢}}$ م/ث² ضع (ب)

⑥ عند أقصى ارتفاع ع = ٠

ع(ن) = م − ١٠ن = ٠ ⟸ م = ١٠ن ⟸ $\boxed{\text{ن} = \frac{\text{م}}{١٠}}$ زمن أقصى ارتفاع

ف $(\frac{\text{م}}{١٠})$ = ٨٠

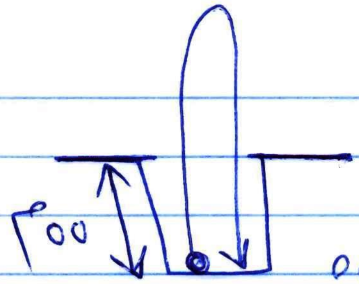
م × $\frac{\text{م}}{١٠}$ − ٥ × $\frac{\text{م}^٢}{١٠٠}$ = ٨٠ ⟸ $\frac{\text{م}^٢}{١٠}$ − $\frac{\text{م}^٢}{٢٠}$ = ٨٠

⟸ $\frac{٢\text{م}^٢}{٢٠}$ − $\frac{\text{م}^٢}{٢٠}$ = ٨٠

⟸ $\frac{\text{م}^٢}{٢٠}$ = ٨٠ ⟸ م² = ١٦٠٠

⟸ $\boxed{\text{م} = ٤٠}$

④ $ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن^٢$



عندما يصل الجسم إلى سطح الأرض تكون $ف(ن) = ٥٥$

$\Leftarrow ٦٠ن - ٥ن^٢ = ٥٥ \quad (\div ٥)$

$\Leftarrow -ن^٢ + ١٢ن - ١١ = ٠ \Leftarrow ن^٢ - ١٢ن + ١١ = ٠$

$\Leftarrow (ن - ١١)(ن - ١) = ٠$

$\Leftarrow ن = \boxed{١١} \text{ ، } ن = \boxed{١}$

الجسم هابط

الجسم صاعد

$ع(ن) = ٦٠ - ١٠ن$

$ع(١) = ٦٠ - ١٠\times١ = ٥٠ م/ث$

$ع(١١) = ٦٠ - ١٠\times١١ = -٥٠ م/ث$

⑤ $ف(ن) = ن^٣ + ٢ن$

الثلاث الثواني الأولى $ن = صفر \longrightarrow ن = ٣$

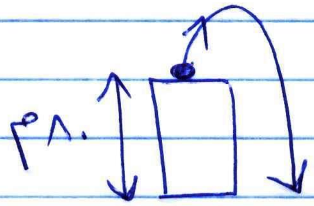
$ع(ن) = ٣ن^٢ + ٢$

$التسارع المتوسط = \frac{\Delta ع(ن)}{\Delta ن} = \frac{ع(٣) - ع(٠)}{٣}$

$= \frac{(٣\times٩ + ٢) - ٢}{٣} = \frac{٢٧}{٣} = \boxed{٩}$

⑥

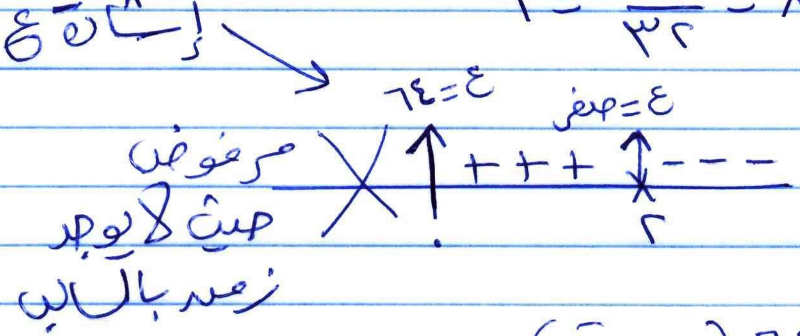
(٧) (أ)



ع(ن) = ٦٤ - ٣٢ن

نبحث إشارة السرعة

-٣٢ن + ٦٤ = ٠ ⟸ ن = $\frac{٦٤}{٣٢}$ = ٢



- عندما ن = صفر ⟸ ع = ٦٤ (موجبة)
لذلك صفر موجودة ضمن الفترة
- لكن عند ن = ٢ ⟸ ع = صفر والمطلوب ع > ٠

لذلك (٢) غير موجودة ضمن الفترة

⟸ ع > ٠ في الفترة [٠، ٢[

(ب) تبقى سرعة الجسم سالبة حتى يصطدم بالأرض

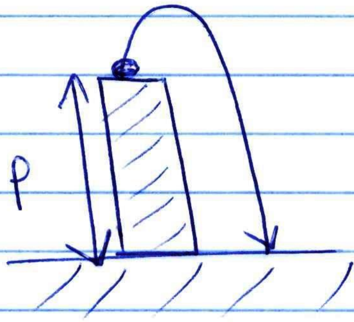
عندما يصطدم الجسم بالأرض ف = -٨٠

⟸ ٦٤ن - ١٦ن^٢ = -٨٠ (÷ -١٦)

⟸ ن^٢ - ٤ن - ٥ = ٠ ⟸ (ن - ٥)(ن + ١) = ٠

⟸ ن = ٥ ، ن = -١ مرفوضة

⟸ ع < ٠ في الفترة]٢، ٥[



⑧ ع(ن) = ٣٠ - ١٠ن = -٦٠

⇐ -١٠ن = -٩٠ ⇐ $\boxed{ن = ٩}$

الزمن لحظة الاصطدام بالأرض

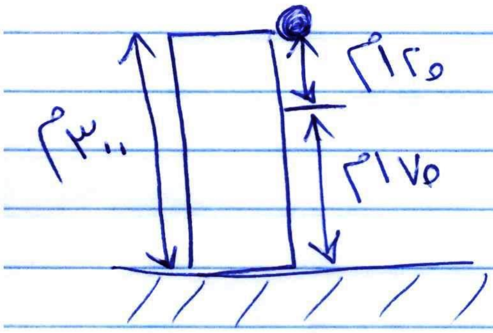
ف(٩) = -م

٣٠ × ٩ - ٥ × ٨١ = -م

٢٧٠ - ٤٠٥ = -م ⇐ -١٣٥ = -م

⇐ م = ارتفاع البناية = ١٣٥م

⑨ عندما يكون الجسم على ارتفاع ١٧٥م



من سطح الأرض يكون قطع ٣٠٠ - ١٧٥ = ١٢٥م

الزمن المستغرق لقطع ١٢٥م

$\frac{١٢٥}{٥} = \frac{٥ن^٢}{٥}$ ⇐ ن² = ٢٥

⇐ ن = ±٥ ، ن = -٥ مرفوضة

∴ ن = ٥ث

ع = ٥ × ٢ن = ١٠ن

ع(٥) = ١٠ × ٥ = ٥٠م/ث

السرعة هنا موجبة لأن الجسم يسير في اتجاه الحركة حيث أسقط للأسفل

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة ٢٠٢٢

حلول أسئلة اختبار درس قاعدة السلسلة

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس قاعدة السلسلة

دفعة 2004

① إذا كان ق(س) = $س^{٢} \times |س|^{٥}$ ، وكان هـَ(٢) = ٤ ، هـ(٢) = -١ ، فما قيمة $(ق \circ هـ)'(٢)$ = ؟!

أ) ٢٨ ب) -٢٨ جـ) ٧ د) -٧

② إذا كان ق(س) = $س^{٣} + ١$ ، هـ(س) = ٢س - ٣ فجد $(ق \circ هـ)''(١)$

أ) -٢٤ ب) ٢٤ جـ) -٧٢ د) ٤٨

③ إذا كان ق(جاس) = جتاس - ظاس ، حيث س في الربع الأول جد قَ($\frac{١}{٢}$)

أ) $\frac{١١}{٣\sqrt{٣}}$ ب) $\frac{-١١}{٣\sqrt{٣}}$ جـ) $\frac{-١١}{١٢\sqrt{٣}}$ د) $\frac{١١}{١٢\sqrt{٣}}$

④ إذا كان س = جان ، $\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٥}$ ، أوجد $\frac{دس}{دم}$ عندما ن = $\frac{٢\pi}{٣}$

أ) $\frac{-١}{١٠}$ ب) $\frac{١}{١٠}$ جـ) $\frac{-٥}{٢}$ د) $\frac{٥}{٢}$

⑤ أسطوانة دائرية ارتفاعها مثلي نصف قطرها أوجد معدل تغير حجمها بالنسبة لمساحتها الجانبية عندما يكون نصف قطرها ٣سم

أ) $\frac{\text{٤}}{\text{٩}}$ ب) $\frac{\text{-٤}}{\text{٩}}$ ج) $\frac{\text{٩}}{\text{٤}}$ د) $\frac{\text{-٩}}{\text{٤}}$

⑥ إذا كان د(س) = جا٢س فأوجد قً(س) + ٦د(س)

أ) ٤جا٢س ب) ٢جا٤س ج) -٢جا٢س د) ٢جا٢س

⑦ إذا كان د(س) = أجاس حيث أ ثابت ، أ ≠ صفر

هـ(س) = $\frac{\text{٣س}}{\text{س٤+١}}$ وكان (هـ ∘ د)َ($\frac{\pi}{\text{٦}}$) = صفر فجد مجموعة قيم أ

أ) أ = ±٢ ب) أ = ±٤ ج) أ = ±١ د) أ = صفر

⑧ إذا كان د($\frac{\text{١}}{\text{٢}}$) = ٢ ، دَ($\frac{\text{١}}{\text{٢}}$) = ٨ فجد نهـــا$_{\text{س}\leftarrow\text{٦}}$ $\frac{\text{د(جا}\frac{\pi}{\text{س}}\text{) - ٢}}{\text{س - ٦}}$

أ) $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٩}}$ ب) $\frac{-\sqrt{\text{٣}}\,\pi}{\text{٩}}$ ج) $\frac{\text{٩}}{\sqrt{\text{٣}}}$ د) $\frac{\sqrt{\text{٣}}\,\pi}{\text{٩}}$

⑨ إذا كان د(س) = $\frac{\left(\text{س} + [\text{س} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}]\right)^{\text{٤}}}{\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}}}$ ، هـ(س) = س$^{\text{٣}}$ + ٨

فجد $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (د(س) × هـ(س)) عند س = ١

أ) ١٢٨ ب) ١٦ ج) ١٤٤ د) صفر

(١٠) إذا كانت ع = $\frac{س+٢}{س-١}$ ، س = $\frac{ص+٤}{ص-٢}$ فإن $\frac{دع}{دص}$

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (ج) $-\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢}$

إجابات أسئلة اختبار دروس
خاتمة السلسلة دفعة 2004

① $$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} \times س^{٥} & ، س \geq ٠ \\ س^{٢} \times (-س)^{٥} & ، س < ٠ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٧} & ، س \geq ٠ \\ -س^{٧} & ، س < ٠ \end{cases}$$

$$(ق \circ هـ)'(٢) = قَ(هـ(٢)) \times هـَ(٢)$$

$$= قَ(-١) \times ٤$$

عندما $س = -١ \Longleftarrow قَ(س) = -٧س^{٦}$

$$\Longleftarrow قَ(١) = -٧$$

$$(ق \circ هـ)'(٢) = -٧ \times ٤ = \boxed{-٢٨}$$ فرع (ب)

② (ق ٥ هـ)َ (س) = قَ (هـ(س)) × هـَ(س)

= قَ (٢س − ٣) × ٢

قَ(س) = ٣س^{٢}

⇐ قَ (٢س − ٣) = ٣(٢س − ٣)^{٢}

∴ (ق ٥ هـ)َ (س) = ٣(٢س − ٣)^{٢} × ٢

= ٦(٢س − ٣)^{٢} = ٦(٤س^{٢} − ١٢س + ٩)

⇐ (ق ٥ هـ)ً (س) = ٦ (٨س − ١٢)

= ٤٨س − ٧٢

(ق ٥ هـ)ً (١) = ٤٨(١) − ٧٢ = ٤٨ − ٧٢ = $\boxed{-٢٤}$ فرع (أ)

③ قَ (جاس) × جتاس = −جاس − قا^{٢}س

جاس = $\frac{١}{٢}$ ⇐ س = $\frac{\pi}{٦}$ (الزاوية تقع في الربع الأول)

قَ ($\frac{١}{٢}$) × جتا$\frac{\pi}{٦}$ = −جا$\frac{\pi}{٦}$ − قا^{٢}$\frac{\pi}{٦}$

قَ ($\frac{١}{٢}$) × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $-\frac{١}{٢}$ − $\frac{٤}{٣}$

قَ ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{-١١}{\cancel{٦}_{٣}}$ × $\frac{\cancel{٢}^{١}}{\sqrt{٣}}$ = $\boxed{\frac{-١١}{٣\sqrt{٣}}}$ فرع (ب)

④ $\frac{\text{دس}}{\text{دم}} = \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دم}}$

$= \text{جتا ن} \times ٥$

$\left.\frac{\text{دس}}{\text{دم}}\right|_{\text{ن}=\frac{٢\pi}{٣}} = \text{جتا} \frac{٢\pi}{٣} \times ٥$

$= -\frac{١}{٢} \times ٥$

$= \boxed{-\frac{٥}{٢}}$ فرع ج

$* \ \text{س} = \text{جا ن}$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \text{جتا ن}$

$* \ \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{١}{٥} \Leftarrow \frac{\text{دن}}{\text{دم}} = ٥$

⑤ افرض ح: حجم الأسطوانة ، نق: نصف قطر قاعدة الأسطوانة

ع: ارتفاع الأسطوانة ، م: المساحة الجانبية للأسطوانة

$\text{ح} = \pi\, \text{نق}^٢ \text{ع}$ ، $\text{ع} = ٢\text{نق}$ (حيث ارتفاعها مثلي نصف قطرها)

$\Leftarrow \text{ح} = \pi\, \text{نق}^٢ \times ٢\text{نق} = ٢\pi\, \text{نق}^٣ \Leftarrow \frac{\text{دح}}{\text{دنق}} = ٢\times٣\pi\, \text{نق}^٢ = ٦\pi\, \text{نق}^٢$

$\text{م} = ٢\pi\, \text{نق ع}$ ، $\text{ع} = ٢\text{نق}$

$\Leftarrow \text{م} = ٢\pi\, \text{نق} \times ٢\text{نق} = ٤\pi\, \text{نق}^٢ \Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دنق}} = ٨\pi\, \text{نق}$

معدل تغير حجمها بالنسبة لمساحتها الجانبية $\frac{\text{دح}}{\text{دم}} = \frac{\text{دح}}{\text{دنق}} \times \frac{\text{دنق}}{\text{دم}}$

$= ٦\pi\, \text{نق}^٢ \times \frac{١}{٨\pi\, \text{نق}}$

$= \frac{٣}{٤}\, \text{نق}$

$\left.\frac{\text{دح}}{\text{دم}}\right|_{\text{نق}=٣} = \frac{٣}{٤} \times ٣ = \boxed{\frac{٩}{٤}}$ فرع ج

⑥ ق(س) = ٢جتا٢س

قَ(س) = −٤جا٢س

قً(س) + ٦ق(س)

= −٤جا٢س + ٦جا٢س = $\boxed{\text{٢جا٢س}}$ فرع (د)

⑦ (هـ ∘ ق)َ(π/٦) = هـَ(ق(π/٦)) × قَ(π/٦)

صفر = هـَ(أ جا π/٦) × أ جتا π/٦

لكن هـَ(س) = $\frac{(\text{س}^٢+١)\times ٣ - ٣\text{س}\times ٢\text{س}}{(\text{س}^٢+١)^٢}$

صفر = هـَ($\frac{\text{أ}}{٢}$) × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ

صفر = $\frac{٣ - ٣(\frac{\text{أ}}{٢})^٢}{((\frac{\text{أ}}{٢})^٢+١)^٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ

إما $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ = ٠ ⟸ أ = ٠ (مرفوض لأن أ ≠ ٠)

أو $\frac{٣ - ٣(\frac{\text{أ}}{٢})^٢}{((\frac{\text{أ}}{٢})^٢+١)^٢}$ = ٠ ⟸ ٣ − ٣($\frac{\text{أ}}{٢}$)^٢ = ٠

⟸ ($\frac{\text{أ}}{٢}$)^٢ = ١ ⟸ $\frac{\text{أ}^٢}{٤}$ = ١

⟸ $\boxed{\text{أ} = \pm ٢}$ فرع (أ)

$\text{ق}(\frac{1}{2}) = 2$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{جا}\frac{\pi}{6}) = 2$

⑧ $\lim\limits_{\text{س} \to 6} \dfrac{\text{ق}(\text{جا}\frac{\pi}{\text{س}}) - 2}{\text{س} - 6}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 6} \dfrac{\text{ق}(\text{جا}\frac{\pi}{\text{س}}) - \text{ق}(\text{جا}\frac{\pi}{6})}{\text{س} - 6}$

$=$ مشتقة $(\text{جا}\frac{\pi}{\text{س}})$ عندما $\text{س} = 6$

$= \text{قَ}(\text{جا}\frac{\pi}{\text{س}}) \times \text{جتا}(\frac{\pi}{\text{س}}) \times \frac{-\pi}{\text{س}^2}$

$= \text{قَ}(\text{جا}\frac{\pi}{6}) \times \text{جتا}\frac{\pi}{6} \times \frac{-\pi}{36}$

$= \text{قَ}(\frac{1}{2}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{-\pi}{36}$

$= 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{-\pi}{36} = \boxed{\frac{-\sqrt{3}\,\pi}{9}}$ فرع (ب)

⑨ عندما $\text{س} = 1 \longrightarrow [\text{س} + \frac{1}{2}] = [1 + \frac{1}{2}] = 1$

عدد غير صحيح .

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \dfrac{(\text{س}+1)^4}{4 - \text{س}^2}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \dfrac{(4 - \text{س}^2) \times 4(\text{س}+1)^3 - (\text{س}+1)^4 \times -2\text{س}}{(4 - \text{س}^2)^2}$

$\text{قَ}(1) = \dfrac{3 \times 4 \times 8 + 16 \times 2}{9} = \dfrac{128}{9}$

$\text{هـَ}(\text{س}) = 3\text{س}^2 \Leftarrow \text{هـَ}(1) = 3$

$$\frac{د}{دس}\Big(\text{ع}(س)\times \text{هـ}(\text{ع}(س))\Big)\Big|_{س=1} = (\text{ع}\times\text{هـ})'(1)$$

$$= \text{ع}(1)\times \text{هـ}'(1) + \text{هـ}(1)\times \text{ع}'(1)$$

$$= \frac{١٦}{٣}\times ٣ + ٩\times\frac{١٢٨}{٩}$$

$$= ١٦ + ١٢٨ = \boxed{١٤٤}$$ فع ⓙ

⑩ $$\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص}\times\frac{دص}{دس}$$

$$= \frac{(ص-١)\times ١ - (ص+٢)\times ١}{(ص-١)^٢}\times\frac{(س-٢)-(س+٤)}{(س-٢)^٢}$$

$$= \frac{\cancel{ص}-١-\cancel{ص}-٢}{(ص-١)^٢}\times\frac{\cancel{س}-٢-\cancel{س}-٤}{(س-٢)^٢}$$

$$= \frac{-٣\times -٦}{(ص-١)^٢\times(س-٢)^٢} = \frac{١٨}{(ص-١)^٢(س-٢)^٢}$$

$$= \frac{١٨}{\left(\left(\frac{س+٤}{س-٢}\right)-١\right)^٢(س-٢)^٢} = \frac{١٨}{\left(\frac{\cancel{س}+٤-\cancel{س}+٢}{س-٢}\right)^٢(س-٢)^٢}$$

$$= \frac{١٨}{\frac{(٦)^٢}{(س-٢)^٢}\times\cancel{(س-٢)^٢}} = \frac{١٨}{٣٦} = \boxed{\frac{١}{٢}}$$ فع ⓓ

⑨

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة 2022

حلول أسئلة اختبار درس الاشتقاق الضمني

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الاشتقاق الضمني
دفعة 2004

① إذا كان س = هـ(ص² + ١) ، هـَ(٥) = ٤
فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{ص}=٢}$

أ) ١٦ ب) ٤ جـ) $\frac{١}{١٦}$ د) -٤

② إذا كان هـ³(ص²) = ٥س³ + ٣ وكانت ص = ١ ، عند س = ١
، هـَ(١) = ٥ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{(١،١)}$

أ) $\frac{١}{٨}$ ب) $-\frac{١}{٨}$ جـ) ١٥ د) -١٥

③ النقطة على منحنى العلاقة √س + √ص = ٣ والتي تحقق المعادلة
صَ = -٢ هي

أ) (٠،٤) ب) (٤،١) جـ) (١،٤) د) (-١،٤)

④ إذا كانت ص = √(س+ص) فإن صَ (٢ص - ١)³ =

أ) ٢ ب) -٢ جـ) صفر د) ١

⑤ إذا كانت س = ظتاص فإن ص″ (١ + س٢) =

(أ) - جاص (ب) - جاس (ج) جتا٢ص (د) جا٢ص

⑥ إذا كانت ص = √(٥ + ٢جاس) فإن ٢ص ص″ + ٢(ص′)٢ + ص٢ =

(أ) ٢ (ب) -٢ (ج) ٥ (د) -٥

⑦ إذا كان س = جا٣ن ، ص = جتا٣ن فإن $\frac{د^2ص}{دس^2}$

عندما ن = $\frac{\pi}{٣}$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) -١ (د) $\frac{١}{٣}$

⑧ إذا كان ص جتا ٢س = س جا٢ص ، فإن $\frac{دص}{دس}\Big|_{(\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٤})}$

(أ) ٢ (ب) -٢ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) -$\frac{١}{٢}$

⑨ النقطة على منحنى العلاقة √س + √ص = ٣ والتي يكون عندها المماس أفقياً

(أ) (٣ ، ٠) (ب) (٣ ، ١) (ج) (-٢ ، ١) (د) (٩ ، ٠)

⑩ إذا كانت س٢ - ص٢ = ١ فإن ص٣ ص″ =

(أ) صفر (ب) -١ (ج) ١ (د) $\frac{١}{٤}$

حلول أسئلة اختبار الاشتقاق الضمني

① س = ق(ص^{٢} + ١)

اشتقاق الطرفين ضمنياً بالنسبة لـ س

١ = قَ(ص^{٢}+١) × ٢ص صَ

عندما ص = ٢

١ = قَ(٥) × ٢ × ٢ × صَ

١ = ٤ × ٤صَ ⟸ صَ = $\boxed{\frac{١}{١٦}}$ فرع (ج)

② ق^{٣}(ص^{٢}) = ٥س^{٣} + ٣

اشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

٣ق^{٢}(ص^{٢}) × قَ(ص^{٢}) × ٢ص صَ = ١٥ س^{٢}

عندما س = ١ ، ص = ١

٣ق^{٢}(١) × قَ(١) × ٢ × ١ × صَ = ١٥ (١)^{٢}

٣ × (٢)^{٢} × ٥ × ٢صَ = ١٥

٣ × ٤ × ٥ × ٢صَ = ١٥

⟸ صَ = $\frac{١٥}{٣ × ٤ × ٥ × ٢}$ = $\boxed{\frac{١}{٨}}$ فرع (أ)

ق^{٣}(ص^{٢}) = ٥س^{٢} + ٣

عوضنا عن س = ١

ص = ١

ق^{٣}(١) = ٥ + ٣

ق^{٣}(١) = ٨

ق(١) = $\sqrt[٣]{٨}$ = ②

③ $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ (اشتق الطرفين ضمنياً بالنسبة لـ س)

$$\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{ص}} \times ص' = ٠$$

عندما $ص' = -٢$ ⟸ $\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{-٢}{٢\sqrt{ص}} = ٠$

⟸ $\frac{١}{٢\sqrt{س}} \times \frac{١}{\sqrt{ص}}$ ⟸ $\boxed{\sqrt{ص} = ٢\sqrt{س}}$ (*)

عوض عن $\sqrt{ص}$ في المعادلة الأساسية

$\sqrt{س} + ٢\sqrt{س} = ٣$ ⟸ $٣\sqrt{س} = ٣$ ⟸ $\sqrt{س} = ١$

لكن $\sqrt{ص} = ٢\sqrt{س}$

$\sqrt{ص} = ٢ \times ١ = ②$ بالتربيع ⟸ $ص = ٤$

⟸ النقطة (س، ص) هي (١، ٤) فرع ج

④ $ص = \sqrt{س + ص}$ ربع الطرفين

$ص^٢ = س + ص$ اشتق بالنسبة لـ س

$٢ص ص' = ١ + ص'$

$٢ص ص' - ص' = ١$ ⟸ $ص' (٢ص - ١) = ١$

⟸ $ص' = \frac{١}{٢ص - ١}$ اشتق مرة ثانية

*** تابع س٤ /**

$\text{ص}'' = \frac{-١ \times ٢\text{ص}'}{(٢\text{ص}-١)^٢}$ (نعوض عن $\text{ص}' = \frac{١}{٢\text{ص}-١}$)

$\text{ص}'' = \frac{-٢ \times \frac{١}{٢\text{ص}-١}}{(٢\text{ص}-١)^٢} = \frac{-٢}{(٢\text{ص}-١)} \times \frac{١}{(٢\text{ص}-١)^٢}$

$\Leftarrow \text{ص}'' = \frac{-٢}{(٢\text{ص}-١)^٣}$ $\Leftarrow \text{ص}''(٢\text{ص}-١)^٣ = \boxed{-٢}$ مع (ب)

⑤ س = ظتا ص اشتقه بالنسبة لـ س

$١ = -\text{قتا}^٢\text{ص} \times \text{ص}'$ $\Leftarrow \text{ص}' = \frac{-١}{\text{قتا}^٢\text{ص}} = -\text{جا}^٢\text{ص}$

$\Leftarrow \text{ص}' = -\text{جا}^٢\text{ص}$ (اشتقه مرة ثانية بالنسبة لـ س)

$\text{ص}'' = -٢\text{جاص جتاص ص}'$ (عوض عن $\text{ص}' = \frac{-١}{\text{قتا}^٢\text{ص}}$)

$\text{ص}'' = -٢\text{جاص جتاص} \times \frac{-١}{\text{قتا}^٢\text{ص}}$

$\text{ص}'' = \text{جا٢ص} \times \frac{١}{١+\text{ظتا}^٢\text{ص}}$

$\text{ص}'' = \text{جا٢ص} \times \frac{١}{١+\text{ظتا}^٢\text{ص}}$

* ٢جاص جتاص = جا٢ص

* $\text{قتا}^٢\text{ص} = ١+\text{ظتا}^٢\text{ص}$

س = ظتا ص
$\text{س}^٢ = \text{ظتا}^٢\text{ص}$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{جا}\,2\text{ص}}{1+\text{س}^2}$$

$\bar{\text{ص}}(1+\text{س}^2) = \boxed{\text{جا}\,2\text{ص}}$ ← فرع ⓓ

⑥ $\text{ص} = \sqrt{5 + 2\,\text{جا}\,\text{س}}$ ربع الطرفين

$\text{ص}^2 = 5 + 2\,\text{جا}\,\text{س}$ اشتقه ضمنياً بالنسبة لـ س

$2\text{ص}\bar{\text{ص}} = 2\,\text{جتا}\,\text{س}$ اشتقه مرة ثانية

$2\text{ص}\bar{\bar{\text{ص}}} + \bar{\text{ص}} \times 2\bar{\text{ص}} = -2\,\text{جا}\,\text{س}$

$2\text{ص}\bar{\bar{\text{ص}}} + 2(\bar{\text{ص}})^2 + 2\,\text{جا}\,\text{س} = 0$ ← (*)

لكن $\text{ص}^2 = 5 + 2\,\text{جا}\,\text{س}$

$\therefore \text{ص}^2 - 5 = 2\,\text{جا}\,\text{س}$

عوض في (*) عن قيمة $2\,\text{جا}\,\text{س}$

$2\text{ص}\bar{\bar{\text{ص}}} + 2(\bar{\text{ص}})^2 + \text{ص}^2 - 5 = 0$

$2\text{ص}\bar{\bar{\text{ص}}} + 2(\bar{\text{ص}})^2 + \text{ص}^2 = \boxed{5}$ ← فرع (و)

⑦ $\text{س} = \text{جا}٣\text{ن}$ ، $\text{ص} = \text{جتا}٣\text{ن}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -٣\,\text{جا}٣\text{ن} \quad ، \quad \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٣\,\text{جتا}٣\text{ن} \Leftarrow \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{1}{٣\,\text{جتا}٣\text{ن}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\cancel{٣}\,\text{جا}٣\text{ن} \times \frac{1}{\cancel{٣}\,\text{جتا}٣\text{ن}} = \frac{-\text{جا}٣\text{ن}}{\text{جتا}٣\text{ن}} = \boxed{-\text{ظا}٣\text{ن}}$$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = -٣\,\text{قا}^2٣\text{ن} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$$

$$= -\cancel{٣}\,\text{قا}^2٣\text{ن} \times \frac{1}{\cancel{٣}\,\text{جتا}٣\text{ن}}$$

$$= \frac{-1}{\text{جتا}^2٣\text{ن}} \times \frac{1}{\text{جتا}٣\text{ن}} = -\left(\frac{1}{\text{جتا}٣\text{ن}}\right)^٣$$

$$\left.\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}\right|_{\text{ن} = \frac{\pi}{٣}} = -\left(\frac{1}{\text{جتا}٣\left(\frac{\pi}{٣}\right)}\right)^٣ = -\left(\frac{1}{\text{جتا}\,\pi}\right)^٣$$

$$= -(-1)^٣ = ①$$ فرع (ب)

⑧ ص جتا٢س = س جا٢ص   اشتقه الطرفين بالنسبة لـ س

ص × −٢جا٢س + جتا٢س × صَ = س × ٢جتا٢ص × صَ + جا٢ص × ١

عندما س = $\frac{\pi}{4}$ ، ص = $\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{\cancel{2}}$ × $\cancel{-2}$جا$\cancel{2}$($\frac{\pi}{\cancel{4}_{2}}$) + جتا٢($\frac{\pi}{4}$) × صَ = $\frac{\pi}{4}$ × ٢جتا٢($\frac{\pi}{2}$) × صَ + جا π

−π جا($\frac{\pi}{2}$) + $\cancel{\text{جتا}(\frac{\pi}{2})\times}$ صَ = $\frac{\pi}{2}$ جتا π صَ + $\cancel{\text{جا}\,\pi}$
صفر   صفر

−π + صفر = $-\frac{\pi}{2}$ صَ + صفر

−π = $-\frac{\pi}{2}$ صَ ⟸ صَ = −π × $\frac{2}{-\pi}$

⟸ $\boxed{\text{صَ} = 2}$ فرع (أ)

⑨ $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = 3$ اشتقه الطرفين ضمنياً بالنسبة لـ س

$\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} + \frac{\text{صَ}}{2\sqrt{\text{ص}}} = 0$ ⟸ $\frac{\text{صَ}}{2\sqrt{\text{ص}}} = \frac{-1}{2\sqrt{\text{س}}}$

(*)

⟸ صَ × $2\sqrt{\text{س}} = -2\sqrt{\text{ص}}$ ⟸ صَ = $\frac{-2\sqrt{\text{ص}}}{2\sqrt{\text{س}}}$ ⟸ صَ = $\frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}}$

العماس أفقي ⟸ صَ = ٠ ، عوض في (*)

⟸ $0 = \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}}$ ⟸ $\sqrt{\text{ص}} = 0$ ⟸ ص = ٠

⟸ عوض في العلاقة الأساسية $\sqrt{\text{س}} + 0 = 3$ (بالتربيع)

(6)

⇐ $س = ٩$

⇐ النقطة $(س ، ص)$ هي $(٩ ، ٠)$ فرع ⓓ

⑩ $س^2 - ص^2 = ١$ اشتق ضمنياً بالنسبة لـ س

$٢س - ٢ص\,ص' = ٠$ ⇐ $٢س = ٢ص\,ص'$

⇐ $ص' = \frac{٢س}{٢ص}$ ⇐ $\boxed{ص' = \frac{س}{ص}}$

اشتق مرة ثانية

عوضنا عن $ص'$

$$ص'' = \frac{ص \times ١ - س \times ص'}{ص^2} = \frac{ص - س \times \frac{س}{ص}}{ص^2}$$

$$ص'' = \frac{\frac{ص}{١} - \frac{س^2}{ص}}{ص^2} = \frac{\frac{ص^2 - س^2}{ص}}{ص^2}$$

⇐ $ص'' = \frac{-١}{ص} \times \frac{١}{ص^2}$ ⇐ $ص'' = \frac{-١}{ص^3}$

⇐ $ص''\,ص^3 = $ ⓘ-١ فرع ⓑ

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة 2022

حلول أسئلة اختبار الوحدة الأولى (حساب التفاضل)

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الأولى (حساب التفاضل)

دفعة 2004

① إذا كان ص = ع^{٣} + ١ ، س ع^{٣} = ع^{٢} − ٢

فما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما ع = ٢

أ) ٢٤ ب) −٢٤ جـ) ١٢ د) −١٢

② إذا كان (ق ∘ هـ)(س) = س ، قَ(س) = $\frac{٢}{س}$

هـ(س) ≠ ٠ ، هـ(س) قابلاً للاشتقاق فإن هـَ(س) =

أ) $\frac{١}{٢}$ هـ(س) ب) ٣هـ(س) جـ) ٢هـ(س) د) هـ(س)

③ إذا كان ق(س ص) = جاص ، جد صَ |$_{(١، \frac{\pi}{٢})}$

أ) $\frac{\pi}{٢}$ ب) π جـ) −$\frac{\pi}{٢}$ د) ١

④ إذا كان ق(س) = |س^{٣} + س^{٢} − ٨| × [س − $\frac{٢}{٥}$ − س]

فإن قَ(١)

أ) ٥ ب) −٥ جـ) ∓ ٥ د) غ.م

⑤ جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $(ص + س)^{٣} = ٣ص^{٢} + ٥$
عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم ص + س − ٢ = ٠

أ) ص = −٢س + ٣ ب) ص = $\frac{-٢}{٣}$ س + ١

جـ) ص − ٢س = −٣ د) أ + ب معاً.

⑥ $\lim_{س \to ١} \left(\frac{١ + لو_{هـ} س}{س} - ١\right)\left(\frac{١}{١ - س}\right) =$

أ) −٢ ب) ٢ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $-\frac{١}{٢}$

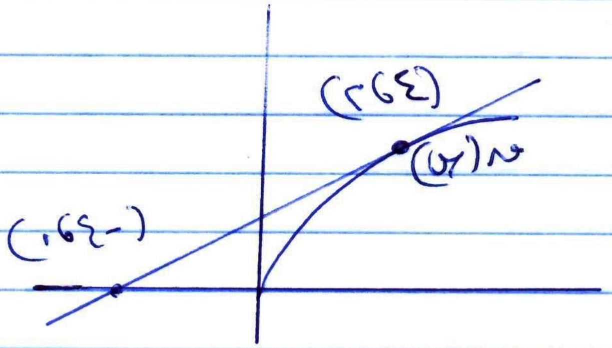
⑦ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس - س^{٢} ، & -٢ \le س < ١ \\ ٦ - ب س ، & ١ \le س \le ٢ \end{cases}$

① فإن قيمة الثابتين أ، ب علماً بأن ق(س) قابل للاشتقاق في مجاله

أ) أ = ٥، ب = ١ ب) أ = ٥، ب = ٢ جـ) أ = ٠، ب = ٢ د) أ = ١، ب = ٢

② قيم س التي تجعل المماس يوازي القاطع الواصل بين النقطتين
(−٢، ق(−٢))، (٢، ق(٢))

أ) س = $\frac{١}{٨}$ ب) س = $-\frac{١}{٨}$ جـ) س = $\frac{١}{٤}$ د) س = $-\frac{١}{٤}$



⑧ في الشكل المجاور إذا كانت

ص = ق²(س) + س فما قيمة

$\frac{دص}{دس} \Big|_{س=٤}$

أ) -١ ب) -٤ ج) ١ د) ٢

⑨ إذا كانت هـ(١) = -٣ ، هـَ(١) = ٢ ، قَ(-٣) = ٥

جد $\frac{د}{دس}\left(\frac{هـ(س^2)}{س} - ق(س-٤)\right)\Big|_{س=١}$

أ) ٥ ب) -٥ ج) ٢ د) -٢

⑩ إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) = جتا س - أ جا س

يساوي $\frac{٤}{\pi}$ في الفترة $[\frac{\pi}{٢} ، \pi]$ ، ما قيمة أ ؟

أ) ١٥ ب) ٤٦ ج) ٣ د) ١,٥

⑪ يتحرك جسم وفق ع²(ن) = ٦ - $\frac{أ}{ف(ن)}$ حيث ف المسافة بالـ(م)

ون الزمن بالثواني ، إذا علمت أن تسارع الجسم في اللحظة التي تنعدم

فيها سرعته يساوي ٩ م/ث² فإن قيمة الثابت أ ؟

أ) أ = ٢ ب) أ = ٦ ج) أ = صفر د) أ = ٥

⑫ قذف جسم من عمق بئر للأعلى حسب العلاقة $\text{ف}(\text{ن}) = 20\text{ن} - 2\text{ن}^{2}$ فإذا كانت سرعته على ارتفاع ٣٠م فوق سطح الأرض تساوي −٤٠م/ث فما عمق البئر الذي أطلق منه الجسم

أ) ٣٠ ب) ١٨ ج) ٦ د) ١٥

⑬ إذا كان المستقيم القاطع لمنحنى ق(س) في النقطتين (١، ق(١)) ، (٣، ٥) يصنع زاوية مقدارها 135° مع محور السينات الموجب، احسب متوسط تغير الاقتران $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{2}{\text{ق}(\text{س})}$ في الفترة [١، ٣]

أ) $\frac{7}{4}$ ب) $\frac{70}{4}$ ج) $\frac{4}{70}$ د) $\frac{14}{70}$

⑭ إذا كان ص = أ جاس + ب جتاس حيث $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + 2\text{ص} = 5\text{جتاس}$ جد قيم الثابتين أ، ب

أ) أ = ١ ، ب = ٢ ب) أ = صفر ، ب = ١ ج) أ = ١ ، ب = −٢ د) أ = −١ ، ب = −٢

⑮ إذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = \text{جتا}\left(\frac{\pi}{\text{س}}\right)$ جد $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{\left((\text{ق}\circ\text{هـ})(\text{س})\right)^{2} - 9}{\text{س}^{4} - 9}$

علماً بأن $\text{ق}\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ ، $\text{ق}'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{6}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ د) −١

حلول أسئلة اختبار الوحدة الأولى

دفعة 2004

① $ص = ع^{٣} + ١$ ، $س^{٣} ع = ع^{٢} - ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} \longleftarrow ①$

$ص = ع^{٣} + ١$

$\frac{دص}{دع} = ٣ع^{٢} \Leftarrow \left.\frac{دص}{دع}\right|_{ع=٢} = ٣(٢)^{٢} = ⑫$

$س^{٣} ع = ع^{٢} - ٢$ (اشتق بالنسبة لـ س)

$س^{٣} \times \frac{دع}{دس} + ع \times ٣س^{٢} = ٢ع \frac{دع}{دس} \longleftarrow (*)$

عندما $ع = ٢ \Leftarrow ٢س^{٣} = ٤ - ٢ \Leftarrow ٢س^{٣} = ٢ \Leftarrow س^{٣} = ١$
$\Leftarrow س = ١$

$١ \times \frac{دع}{دس} + ٢ \times ٣ = ٤ \frac{دع}{دس}$

$\frac{دع}{دس} - ٤ \frac{دع}{دس} = -٦ \Leftarrow -٣ \frac{دع}{دس} = -٦ \Leftarrow \boxed{\frac{دع}{دس} = ٢}$

عوض في علاقة ①

$\frac{دص}{دس} = ١٢ \times ٢ = ㉔$ فرع (أ)

② (ق ∘ هـ)(س) = س

ق(س) = $\frac{٢}{س}$ ، هـ(س) ≠ ٠ ، هـ(س) قابل للاشتقاق

الحل (ق ∘ هـ)(س) = ق(هـ(س)) = س اشتقه الطرفين

قَ(هـ(س)) × هـَ(س) = ١

$\frac{٢ هـَ(س)}{هـ(س)}$ = ١ ⇐ ٢هـَ(س) = هـ(س)

⇐ هـَ(س) = $\frac{١}{٢}$ هـ(س) فرع (أ)

③ ق(س ص) = جا ص اشتقه الطرفين بالنسبة لـ س

الحل قَ(س ص) × [س صَ + ص × ١] = جتا ص × صَ

عند النقطة (١ ، $\frac{\pi}{٢}$)

قَ($\frac{\pi}{٢}$) [صَ + $\frac{\pi}{٢}$] = $\overset{صفر}{\cancel{جتا \frac{\pi}{٢}}}$ × صَ

قَ($\frac{\pi}{٢}$) [صَ + $\frac{\pi}{٢}$] = ٠

إما قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٠ أو صَ + $\frac{\pi}{٢}$ = ٠

صَ = $\boxed{-\frac{\pi}{٢}}$ فرع (ج)

④ $ق(س) = |س^3 + س^2 - ٨| \times [\frac{٢}{٥} - س]$ ، $\bar{ق}(١)$

(الحل) عوض عند س = ١ في $|س^3 + س^2 - ٨|$ ← $|١ + ١ - ٨| = |-٦|$ ← سالبة

∴ نضرب القاعدة في سالب

عوض عند س = ١ في $[\frac{٢}{٥} - س]$ ← $= [\frac{٢}{٥} - ١] = [-\frac{١}{٥}] = -١$ ← كسر غير صحيح.

∴ $ق(س) = (-س^3 - س^2 + ٨) \times -١$

⇐ $ق(س) = س^3 + س^2 - ٨$

$\bar{ق}(س) = ٣س^2 + ٢س$

$\bar{ق}(١) = ٣(١)^2 + ٢(١) = \boxed{٥}$ فرع (أ)

⑤ المنحنى والمستقيم متقاطعان ⇐ $ص_{المنحنى} = ص_{المستقيم}$ عند نقطة التقاطع

ص + س - ٢ = ٠ ⇐ ص + س = ٢ ← (*)

عوض في معادلة المنحنى من (*)

$(٢)^3 = ٣ص^2 + ٥$ ⇐ $٣ص^2 = ٨ - ٥$ ⇐ $٣ص^2 = ٣$

⇐ ص = ±١

✓ عندما ص = ١ ⇐ $(١ + س)^3 = ٨$ ⇐ ١ + س = ٢ ⇐ س = ١

⇐ نقطة التقاطع (١، ١)

✓ عندما ص = -١ ⇐ $(س - ١)^3 = ٨$ ⇐ س - ١ = ٢ ⇐ س = ٣

⇐ نقطة التقاطع (٣، -١)

تابع س٥

(ص + س)^{٣} = ٣ص^{٢} + ٥   (اشتقه بالنسبة لـ س)

٣(ص + س)^{٢} × (ص̄ + ١) = ٦ص ص̄ ⟵ (**)

حالة ① عوض عن النقطة (١،١) في (**)

ميل المماس م١

٣(١ + ١)^{٢} (ص̄ + ١) = ٦ص̄

١٢ص̄ + ١٢ = ٦ص̄ ⟸ ٦ص̄ = -١٢ ⟸ $\boxed{\text{ص̄} = -٢}$

⟸ معادلة المماس ص - ١ = -٢(س - ١)

⟸ $\boxed{\text{ص} = -٢\text{س} + ٣}$

حالة ② عوض عن النقطة (٣،-١) في (**)

ميل المماس م٢

٣(-١ + ٣)^{٢} × (ص̄ + ١) = ٦ × -ص̄

⟸ ١٢ص̄ + ١٢ = -٦ص̄ ⟸ ١٨ص̄ = -١٢ ⟸ ص̄ = $\frac{-١٢}{١٨}$ = $\boxed{\frac{-٢}{٣}}$

⟸ معادلة المماس ص + ١ = $\frac{-٢}{٣}$ (س - ٣)

⟸ $\boxed{\text{ص} = \frac{-٢}{٣}\text{س} + ١}$

⑥ $$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\left(\frac{١+\text{لوهـ}\sqrt{س}}{س}-١\right)\left(\frac{١}{١-س}\right)$$

↓ توحيد مقامات

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\left(\frac{١+\text{لوهـ}\sqrt{س}-س}{س}\right)\left(\frac{١}{١-س}\right)=\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\left(\frac{١+\frac{١}{٢}\text{لوهـ}س-س}{(١-س)س}\right)$$

بالتعويض المباشر $\frac{١+\text{صفر}-١}{١(١-١)}=\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نستخدم قاعدة لوبيتال والمشتقة بالنسبة لـ س

$$=\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}\frac{\frac{١}{٢}\times\frac{١}{س}-١}{١-٢س}=\frac{\frac{١}{٢}\times ١-١}{١-٢}=\frac{-\frac{١}{٢}}{-١}=\boxed{\frac{١}{٢}}$$ فرع ج.

⑦ $$ق(س)=\begin{cases}أ-س^٢ ، & -٢\le س<١\\ ٦-ب س ، & ١\le س\le ٢\end{cases}$$

① بما ق(س) قابل للاشتقاق على مجاله ← قابل للاشتقاق عند س = ١

$$ق'(س)=\begin{cases}-٢س ، & -٢<س<١\\ -ب ، & ١<س<٢\\ \text{غ.م} ، & س=-٢ ، ٢\end{cases}$$

$ق'(١)^{+}=ق'(١)^{-}$ ← $-ب=-٢$ ← $\boxed{ب=٢}$

ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ١

← ق(س) متصل عند س = ١ ← $ق(١)=\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}ق(س)$

← ٦ − ب = أ − ١ (عوض عن ب = ٢)

٦ - ٢ = أ - ١ ⟸ $\boxed{\text{أ} = ٥}$

③ ميل القاطع = $\frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(-٢)}{٢ - (-٢)}$ = $\frac{٢ - ١}{٤}$ = $\boxed{\frac{١}{٤}}$

المماس يوازي القاطع ⟸ ميل المماس = ميل القاطع

⟸ ميل المماس = قَ(س) = $\frac{١}{٤}$

قَ(س) = { -٢س ، -٢ < س < ١
-٢ ، ١ < س < ٢
غ.م ، س = -٢ ، ٢

* -٢ ≠ $\frac{١}{٤}$

* -٢س = $\frac{١}{٤}$ (الميل = المشتقة)

⟸ س = $-\frac{١}{٨}$ ∈]-٢ ، ١[

⑧ ص = ق²(س) + س (المشتقة للطرفين بالنسبة لـ س)

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢ق(س) × قَ(س) + ١

ق(٤) = ٢
من الرسم

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=٤}$ = ٢ق(٤) قَ(٤) + ١

قَ(٤) = ميل المماس من النقطتين (٤، ٢) ، (-٤، ٠)

= $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ = $\frac{٠ - ٢}{-٤ - ٤}$ = $\frac{-٢}{-٨}$ = $\boxed{\frac{١}{٤}}$ ⟸ قَ(٤) = $\boxed{\frac{١}{٤}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=٤}$ = ٢ × ٢ × $\frac{١}{٤}$ + ١ = ١ + ١ = $\boxed{٢}$ فرع (د)

⑨ $\text{هـ}(1) = -3 \ ، \ \text{هـَ}(1) = 2 \ ، \ \text{قَ}(-3) = 5$

$$\frac{d}{d\text{س}}\left(\frac{\text{هـ}(\text{س}^2)}{\text{س}} - \text{ق}(\text{س}-4)\right)\Bigg|_{\text{س}=1} \quad ؟؟$$

$$= \frac{\text{س} \times \text{هـَ}(\text{س}^2) \times 2\text{س} - \text{هـ}(\text{س}^2) \times 1}{\text{س}^2} - \text{قَ}(\text{س}-4)$$

$$\frac{d}{d\text{س}}\Bigg|_{\text{س}=1} = \frac{1 \times \text{هـَ}(1^2) \times 2 \times 1 - \text{هـ}(1^2)}{(1)^2} - \text{قَ}(1-4)$$

$$= \frac{2\,\text{هـَ}(1) - \text{هـ}(1)}{1} - \text{قَ}(-3)$$

$$= 2 \times 2 + 3 - 5 = 7 - 5 = \boxed{2} \quad \text{فرع} \ ②$$

⑩ $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}\,\text{س} - \text{أ}\,\text{جا}\,\text{س}$

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\text{ق}(\pi) - \text{ق}(\frac{\pi}{2})}{\pi - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\text{جتا}\,\pi - \text{أ}\,\text{جا}\,\pi - \left[\text{جتا}\,\frac{\pi}{2} - \text{أ}\,\text{جا}\,\frac{\pi}{2}\right]}{\pi - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-1 - (-\text{أ})}{\frac{\pi}{2}} \cancel{=} \frac{4}{\pi} \Leftarrow (-1 + \text{أ})\,\pi = 4 \times \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftarrow -1 + \text{أ} = 2$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = 3} \quad \text{فرع} \ (\text{ج})$$

⑪ ع²(ن) = ٦ − $\frac{\text{م}}{\text{ف}(\text{ن})}$ اشتقه بالنسبة له

٢ع عَ = − $\left(\frac{-\text{م} \times \text{فَ}}{\text{ف}^2(\text{ن})}\right)$

٢ع ح = + $\frac{\text{م ع}}{\text{ف}^2}$ ⟸ ٢ع ح − $\frac{\text{م ع}}{\text{ف}^2}$ = ٠

⟸ ع (٢ح − $\frac{\text{م}}{\text{ف}^2}$) = ٠

⟸ إما ع = ٠ ، أو $\boxed{٢\text{ح} - \frac{\text{م}}{\text{ف}^2} = ٠}$

عندما تنعدم السرعة ⟸ ع = صفر   ٢ح = $\frac{\text{م}}{\text{ف}^2}$ ⟵ ①

٠ = ٦ − $\frac{\text{م}}{\text{ف}}$ ⟸ $\frac{\text{م}}{\text{ف}}$ = ٦ ⟸ $\boxed{\text{ف} = \frac{\text{م}}{٦}}$

عوضنا عن قيمة ف في معادلة ① عندما ح = ٩

٢ح = $\frac{\text{م}}{\left(\frac{\text{م}}{٦}\right)^2}$ = $\frac{٣٦\text{م}}{\text{م}^2}$ ⟸ ٢ × ٩ = $\frac{٣٦\text{م}}{\text{م}^2}$

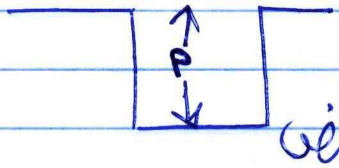
⟸ ١٨م² = ٣٦م

⟸ ١٨م² − ٣٦م = ٠

⟸ ١٨م(م − ٢) = ٠

إما ١٨م = ٠ ⟸ م = صفر (مرفوضة)

أو م − ٢ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{م} = ٢}$ ✓ ضع ⓜ



⑫ $\text{ف}(\text{ن}) = ٢٠\text{ن} - ٢\text{ن}^٢ - \text{م}$

← بالنسبة للأرض

$\text{ع} = -٤$

$\text{ع}(\text{ن}) = ٢٠ - ٤\text{ن} = -٤ \Leftarrow ٤\text{ن} = ٢٤ \Leftarrow \boxed{\text{ن} = ٦}$

$\text{ف} = ٣٠$

$\Leftarrow ٢٠\text{ن} - ٢\text{ن}^٢ - \text{م} = ٣٠$

$٢٠ \times ٦ - ٢ \times ٦^٢ - \text{م} = ٣٠ \Leftarrow ١٢٠ - ٧٢ - \text{م} = ٣٠$

$\Leftarrow \text{م} = ٤٨ - ٣٠ = ١٨$ فرع (ب)

⑬ ميل المستقيم من النقطتين $= \dfrac{٥ - \text{ص}(١)}{٣ - ١} = \text{ظا } ١٣٥ = -١$

$\Leftarrow \dfrac{٥ - \text{ص}(١)}{٢} = -١$

$\Leftarrow ٥ - \text{ص}(١) = -٢ \Leftarrow -\text{ص}(١) = -٧ \Leftarrow \text{ص}(١) = ٧$

متوسط تغير $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{\text{هـ}(٣) - \text{هـ}(١)}{٣ - ١} = \dfrac{\dfrac{٢}{\text{ص}(٣)} - \dfrac{٢}{\text{ص}(١)}}{٢}$ ← توحيد مقامات

$= \dfrac{\dfrac{٢\text{ص}(١) - ٢\text{ص}(٣)}{\text{ص}(٣)\,\text{ص}(١)}}{٢} = \dfrac{٢\text{ص}(١) - ٢\text{ص}(٣)}{٢\text{ص}(٣)\,\text{ص}(١)} = \dfrac{٢ \times ٧ - ٢ \times ٥}{٢ \times ٥ \times ٧}$

$= \dfrac{١٤ - ١٠}{٧٠} = \boxed{\dfrac{٤}{٧٠}}$

⑭ ص = أ جا س + ب جتا س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = أ جتا س − ب جا س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ + ٢ص = ٥ جتا س

أ جتا س − ب جا س + ٢(أ جا س + ب جتا س) = ٥ جتا س

أ جتا س − ب جا س + ٢أ جا س + ٢ب جتا س = ٥ جتا س

جتا س (أ + ٢ب) + جا س (٢أ − ب) = ٥ جتا س

أ + ٢ب = ٥ ⟵ ①

٢أ − ب = صفر ⟵ ② ×٢

أ + ٢ب = ٥

٤أ − ٢ب = صفر

٥أ = ٥ ⟸ $\boxed{\text{أ = ١}}$

بالتعويض عن قيمة أ في معادلة ①

١ + ٢ب = ٥ ⟸ ٢ب = ٤ ⟸ $\boxed{\text{ب = ٢}}$

فرع (أ)

$$⑮\quad \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{(\text{ق}\circ\text{هـ})^{٢}(\text{س}) - ٩}{\text{س}^{٢} - ٩}$$

بالتعويض المباشر

$$\frac{(\text{ق}\circ\text{هـ})^{٢}(٣) - ٩}{٩ - ٩} = \frac{\left(\text{ق}(\text{هـ}(٣))\right)^{٢} - ٩}{٠}$$

$$= \frac{\left(\text{ق}(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٣})\right)^{٢} - ٩}{٠}$$

$$= \frac{\left(\text{ق}(\frac{١}{٢})\right)^{٢} - ٩}{٠} = \frac{٩-٩}{٠} = \boxed{\frac{٠}{٠}}$$

نستخدم لوبيتال ونشتق بالنسبة لـ س

$$\text{هـ}(\text{س}) = \text{جتا}\left(\frac{\pi}{\text{س}}\right) \Leftarrow \text{هـ}(٣) = \text{جتا}\,\frac{\pi}{٣} = \boxed{\frac{١}{٢}}$$

$$\text{هَـ}(\text{س}) = -\text{جا}\left(\frac{\pi}{\text{س}}\right) \times \frac{-\pi}{\text{س}^{٢}} \Leftarrow \boxed{\text{هَـ}(٣) = \frac{\pi\sqrt{٣}}{١٨}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{٢(\text{ق}\circ\text{هـ})(\text{س}) \times \text{قَ}(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هَـ}(\text{س})}{٢\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{٢(\text{ق}\circ\text{هـ})(٣) \times \text{قَ}(\text{هـ}(٣)) \times \text{هَـ}(٣)}{٦}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{٢\,\text{ق}(\text{هـ}(٣)) \times \text{قَ}(\frac{١}{٢}) \times \frac{\pi\sqrt{٣}}{١٨}}{٦}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{٦ \times \frac{\sqrt{٣}}{\pi} \times \frac{\pi\sqrt{٣}}{١٨}}{٦} = \boxed{\frac{١}{٦}}$$