*** * اختبارات الفصل الثاني لمبحث الرياضيات للثاني عشر علمي دفعة ٢٠٢٢ * ***

- ✓اختبارات الوحدة الثالثة كاملة مع حلولها.
- ✓اختبارات الوحدة الخامسة كاملة مع حلولها.
- ✓اختبار الوحدة الثالثة مراجعات.
- ✓اختبار الوحدة الرابعة مراجعات.
- ✓اختبار الوحدة الخامسة مراجعات.
- ✓اختبار الوحدة (٣، ٤، ٥) مراجعات.

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

تمنياتي لكم بالتفوق والتميز

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

اختبارات الوحدة الثالثة دفعة 2022 مع الحلول

- اختبار درسي المصفوفة والعمليات على المصفوفات .
- اختبار درس المحددات .
- تمارين على خصائص المحددات.
- اختبار درس النظير الضربي للمصفوفة المربعة.
- اختبار الوحدة الثالثة.

تمنياتي لكم بالتفوق والتميز

أ. هدى أسامة فرج

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درسي

المصفوفة والعمليات على المصفوفات

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار المصفوفة والعمليات على المصفوفات

دفعة 2004

① إذا كانت جـ $= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، أ + ب $= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ فإن

جـ أ + جـ ب =

Ⓐ $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ Ⓑ $\begin{bmatrix} -4 & 29 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}$ Ⓒ $\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ Ⓓ $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

(أ) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -4 & 29 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

② إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} \text{جاس} & \text{جتاس} \\ \text{جتاس} & \text{جاس} \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} 0 & \text{جا٢س} \\ \text{جا٢س} & 0 \end{bmatrix}$

فإن أ^2 − ب =

(أ) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (ب) م$_2$ (جـ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (د) أ + ب

③ إذا كانت ٣ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & س \end{bmatrix}$ − ٢ $\begin{bmatrix} 1 & ص \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ فإن س + ص

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ١

④ إذا كانت $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ × أ $= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ فإن أ =

(أ) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(٥) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢×٢ حيث $أ_{هـ ي} = هـ^{٢} - ي$

فإن المصفوفة أ =

(أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

(٦) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن $أ^{١٠٠}$ =

(أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

(٧) إذا كانت $\frac{١}{٢}$ أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ فإن

المصفوفة $(ب - أ)^{٢}$ =

(أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٩ \\ ١٤ & ٢٥ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ١١ & ٢١ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٣ & ١٢ \\ ٣ & ٢٥ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٨ & -١٢ \end{bmatrix}$

(٨) إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢}+١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ س-١ & ٥ \end{bmatrix}$ نجد قيمة/ قيم س

(أ) -٣ (ب) ٣ (ج) {-٣ ، ٣} (د) {٩ ، ٣}

(٩) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} س ص & س^{٢} \\ ص^{٢} & س ص \end{bmatrix}$ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ فإن $أ^{٢}$ =

(أ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ (ج) أ (د) ٢أ + ١

(١) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

فإن ١٥أ + ١٥ب − ١٤(أ + ب) =

(أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} ٦ & -١ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$ (د) أ^٢

حلول أسئلة اختبار درس المصفوفة والعمليات على المصفوفات

١) جـ أ + جـ ب = جـ (أ + ب)

$$= \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨-١٢ & ٢٠+٩ \\ ٢-٨ & ٥+٦ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٤ & ٢٩ \\ -٦ & ١١ \end{bmatrix}$$ فرع (ب)

٢) $$أ^٢ = \begin{bmatrix} جاس & جتاس \\ جتاس & جاس \end{bmatrix} \begin{bmatrix} جاس & جتاس \\ جتاس & جاس \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} جا^٢س + جتا^٢س & ٢جاس\,جتاس \\ ٢جاس\,جتاس & جتا^٢س + جا^٢س \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & جا٢س \\ جا٢س & ١ \end{bmatrix}$$

جا²س + جتا²س = ١
٢جاس جتاس = جا٢س

$$أ^٢ - ب = \begin{bmatrix} ١ & جا٢س \\ جا٢س & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & جا٢س \\ جا٢س & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = م_٢$$ فرع (د)

(٣) $٣ \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ع \end{bmatrix} - ٢ \begin{bmatrix} ١ & ص \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ -٣ & ٣ع \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & -٢ص \\ -٢ & -١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} ٤ & ٣-٢ص \\ -٥ & ٣ع-١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

$٣-٢ص = ١$ $\qquad$ $٣ع-١٠ = ٢$

$\therefore \boxed{ص = ١}$ $\qquad$ $\therefore ع = ٤$ $\qquad$ $\therefore ع + ص = ٥$

(٥) أ من الرتبة ٢×٢ ، $أ_{هـي} = هـ^٢ - ي$

$\begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ فرع (ج)

(٦) فرع (أ) لاحظ أن القطر الثانوي كله أصفار

(٧) $\frac{١}{٢}أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $(ب - أ)^٢ = ؟؟$

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$

$ب - أ = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٧ & ٢ \end{bmatrix}$

$$(\text{أ}-\text{ب})^2 = (\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}-\text{ب}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+7 & 1+2 \\ 7+14 & 7+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 21 & 11 \end{bmatrix}$$

فرع ب

8) $\begin{bmatrix} 2 & \text{س}^2+1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 5 & \text{س}-1 \end{bmatrix}$

$\text{س}^2 + 1 = 10$ $\qquad$ $\text{س} - 1 = 2$

$\text{س}^2 = 9$ $\qquad$ $\text{س} = 3$

$\therefore \text{س} = \pm 3$

$\{-3, 3\} \cap \{3\} = \{3\}$ فرع ب

9) $\text{أ}^2 = \begin{bmatrix} \text{س}^2 & \text{س}\text{ص} \\ \text{س}\text{ص} & \text{ص}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س}^2 & \text{س}\text{ص} \\ \text{س}\text{ص} & \text{ص}^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \text{س}^4 + \text{س}^2\text{ص}^2 & \text{س}^3\text{ص} + \text{ص}^3\text{س} \\ \text{س}^3\text{ص} + \text{ص}^3\text{س} & \text{س}^2\text{ص}^2 + \text{ص}^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{س}^2\overset{1}{\cancel{(\text{س}^2+\text{ص}^2)}} & \text{س}\text{ص}\overset{1}{\cancel{(\text{س}^2+\text{ص}^2)}} \\ \text{س}\text{ص}\overset{1}{\cancel{(\text{س}^2+\text{ص}^2)}} & \text{ص}^2\overset{1}{\cancel{(\text{س}^2+\text{ص}^2)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س}^2 & \text{س}\text{ص} \\ \text{س}\text{ص} & \text{ص}^2 \end{bmatrix}$$

$= \text{أ}$

(١٠) أ $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

١٥ أ + ١٥ ب - ١٤ (أ + ب)

= ١٥ أ + ١٥ ب - ١٤ أ - ١٤ ب = أ + ب

أ + ب $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ فرع (ب)

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درس

المحددات

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس المحددات

دفعة 2004

١) إذا كان $\begin{vmatrix} ٤ & ٨ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & س \\ ٥ & -٤ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٢س \end{vmatrix}$ فإن قيمة س ∈

(أ) $ح^+$ (ب) ح - {٠} (ج) ح (د) $ح^-$

٢) إذا كان $\begin{vmatrix} ٢ب & ٢أ \\ د & جـ \end{vmatrix} = ٦$ فإن $\begin{vmatrix} ٣د & ٣جـ \\ ب & أ \end{vmatrix}$

(أ) -٦ (ب) -٩ (ج) ٣ (د) ٩

٣) إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ١ \\ -١ \end{bmatrix}$ فقيمة |س.ص|

(أ) ٩ (ب) -٩ (ج) ١ (د) -١

٤) $\begin{vmatrix} جاس & ١ \\ ٠ & جتاس \end{vmatrix} =$

(أ) جا٢س (ب) -جا٢س (ج) $\frac{١}{٢}$ جا٢س (د) $-\frac{١}{٢}$ جا٢س

⑤ قيم س التي تحقق المعادلة

$$\begin{vmatrix} س & -س & -٢ \\ س & ٢ & -١ \\ ١ & س & ٣ \end{vmatrix} = ١$$ هي :

(أ) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$　　(ب) $-\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٣}$　　(ج) $-\frac{١}{٢}$ ، -٣　　(د) $-\frac{١}{٢}$ ، ٣

⑥ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية بحيث أن $|٣أ| = ٥٤$ ، $|أ.ب| = -١٢$ فإن قيمة المقدار

$|٢أ| + |٥ب|$ ؟

(أ) -٢٦　　(ب) ٢　　(ج) ٧٤　　(د) $\frac{٢٦}{٣}$

⑦ إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ك \\ ك+١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -ك & ٢ \\ -١ & -٢ك \end{bmatrix}$

فإن قيمة/قيم ك التي تجعل $|أ+ب| = ٠$ هي ؟

(أ) ١ ، ١　　(ب) -١ ، -١٠　　(ج) ٥ ، ٢　　(د) -٥ ، -٢

حلول أسئلة اختبار درس المحددات
دفعة 2064

① $\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \\ 2\text{س} & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$(8 \times 1) - (2 \times 4) = \text{س} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2\text{س} & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2\text{س} & 4 \end{vmatrix}$

$\text{صفر} = \text{س}(-8-20) - 2(2-10\text{س}) + 4 - (-8\text{س})$

$\text{صفر} = -28\text{س} - 4 + 20\text{س} + 4 + 8\text{س}$

$\text{صفر} = \text{صفر}$ (صحيحة $\forall \text{س} \in \text{ح}$) فرع (ج)

② $\begin{vmatrix} 2\text{أ} & 2\text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} = 6$ ، جد $\begin{vmatrix} 3\text{ج} & 3\text{د} \\ \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix}$

$2\text{أ}\text{د} - 2\text{ب}\text{ج} = 6 \quad (\div 2)$

$\text{أ}\text{د} - \text{ب}\text{ج} = 3 \longrightarrow (*)$

$\begin{vmatrix} 3\text{ج} & 3\text{د} \\ \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} = 3\text{ب}\text{ج} - 3\text{أ}\text{د} = 3(\text{ب}\text{ج} - \text{أ}\text{د})$

$= -3(\text{أ}\text{د} - \text{ب}\text{ج})$ عوض من $(*)$

$= -3 \times 3 = -9$ فرع (ب)

③ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ١ \\ -١ \end{bmatrix}$ فما قيمة |س.ص|

$$\text{س.ص} = \underset{٢\times١}{\begin{bmatrix} -٤ & ٥ \end{bmatrix}} \underset{١\times٢}{\begin{bmatrix} ١ \\ -١ \end{bmatrix}} = \underset{١\times١}{\begin{bmatrix} -٤\times١ + ٥\times-١ \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} -٩ \end{bmatrix}$$

$$|\text{س.ص}| = \text{محدد} \begin{bmatrix} -٩ \end{bmatrix} = -٩$$

فرع ب

④
$$\begin{vmatrix} ١ & \text{جاس} \\ \text{جتاس} & ٠ \end{vmatrix} = ١\times٠ - \text{جاس جتاس}$$

$$= -\text{جاس جتاس} = -\frac{١}{٢}\,\text{جا ٢س}$$

فرع د

⑤
$$\begin{vmatrix} \text{س} & -\text{س} & -٢ \\ \text{س} & ٢ & -١ \\ ١ & \text{س} & ٣ \end{vmatrix} = ١$$

$$\text{س}\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ \text{س} & ٣ \end{vmatrix} + \text{س}\begin{vmatrix} \text{س} & -١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} \text{س} & ٢ \\ ١ & \text{س} \end{vmatrix} = ١$$

$$\text{س}(٦+\text{س}) + \text{س}(٣\text{س}+١) - ٢(\text{س}^٢-٢) = ١$$

$$٦\text{س} + \text{س}^٢ + ٣\text{س}^٢ + \text{س} - ٢\text{س}^٢ + ٤ = ١$$

$$٢\text{س}^٢ + ٧\text{س} + ٣ = ٠ \Leftarrow (٢\text{س}+١)(\text{س}+٣) = ٠$$

$$\Leftarrow \text{س} = -\frac{١}{٢} \text{ ، } \text{س} = -٣$$ فرع ج

⑥ أ من الرتبة الثانية ← |٣أ| = (٣)² |أ| = ٥٤

← |أ| = $\frac{٥٤}{٩}$ = ⑥

|أ.ب| = -١٢ ← |أ| . |ب| = -١٢

← ٦ . |ب| = -١٢ ← |ب| = ②-

قيمة المقدار |٢أ| + |٥ب|

= ٤|أ| + ٢٥|ب|

= ٤×٦ + ٢٥×-٢ = ٢٤ - ٥٠ = $\boxed{-٢٦}$ فرع (أ)

⑦ أ+ب = $\begin{bmatrix} ٢-ل & ل+٢ \\ ل & ٥-٢ل \end{bmatrix}$

|أ+ب| = ٠ ← (٢-ل)(٥-٢ل) - [ل(ل+٢)] = ٠

← ١٠ - ٤ل - ٥ل + ٢ل² - [ل² + ٢ل] = ٠

← ل² - ١١ل + ١٠ = ٠

← (ل - ١٠)(ل - ١) = ٠ ← ل = ١٠ ، ل = ١

فرع (أ)

* ملاحظة هامة / المحدد لا يوزع في جمع المصفوفات

رياضيات الثاني عشر علمي

تمارين على خصائص المحددات

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

تمارين على خصائص المحددات

رياضيات الثاني عشر علمي

① بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & ل & ل^2 \\ 1 & م & م^2 \\ 1 & ن & ن^2 \end{vmatrix} = (ل-م)(م-ن)(ن-ل)$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 1 & ل & ل^2 \\ 1 & م & م^2 \\ 1 & ن & ن^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[ص_3-ص_1]{ص_2-ص_1} \begin{vmatrix} 1 & ل & ل^2 \\ 0 & م-ل & م^2-ل^2 \\ 0 & ن-ل & ن^2-ل^2 \end{vmatrix}$$

(م - ل) من الصف الثاني

(ن - ل) من الصف الثالث

$$\Leftarrow (م-ل)(ن-ل)\begin{vmatrix} 1 & ل & ل^2 \\ 0 & 1 & م+ل \\ 0 & 1 & ن+ل \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{ص_3-ص_2} (م-ل)(ن-ل)\begin{vmatrix} 1 & ل & ل^2 \\ 0 & 1 & م+ل \\ 0 & 0 & ن-م \end{vmatrix}$$

$$= (م-ل)(ن-ل)(ن-م)$$

$$= -1(ل-م) \times (ن-ل) \times -1(م-ن)$$

$$= (ل-م)(م-ن)(ن-ل) \quad \#$$

٢ حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} \text{٣س+٢} & \text{٢س+١} & \text{س} \\ \text{٤س+٣} & \text{٣س+٢} & \text{٢س+١} \\ \text{١٠س+٩} & \text{٥س+٦} & \text{٣س+٣} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل

$$\text{ع}_٢ - ٢\text{ع}_١ \Longleftarrow \quad \begin{vmatrix} \text{٣س+٢} & ١ & \text{س} \\ \text{٤س+٣} & \text{-س} & \text{٢س+١} \\ \text{١٠س+٩} & \text{-س} & \text{٣س+٣} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\text{ع}_٣ - ٣\text{ع}_١ \Longleftarrow \quad \begin{vmatrix} ٢ & ١ & \text{س} \\ \text{-٢س} & \text{-س} & \text{٢س+١} \\ \text{س} & \text{-س} & \text{٣س+٢} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\text{ع}_٣ - ٢\text{ع}_٢ \Longleftarrow \quad \begin{vmatrix} \cdot & ١ & \text{س} \\ \cdot & \text{-س} & \text{٢س+١} \\ \text{٣س} & \text{-س} & \text{٣س+٢} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\text{٣س} \begin{vmatrix} ١ & \text{س} \\ \text{-س} & \text{٢س+١} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\text{٣س}\,(\text{-س}^٢ - \text{٢س} - ١) = \text{صفر}$$

$$\text{-٣س}\,(\text{س}^٢ + \text{٢س} + ١) = \text{صفر}$$

إما $\text{-٣س} = \text{صفر}$ أو $\text{س}^٢ + \text{٢س} + ١ = \text{صفر} \Longleftarrow (\text{س}+١)^٢ = ٠$

$\Longleftarrow \text{س} = \text{صفر}$ $\qquad$ $\text{س} = -١$

③ بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١٢ & ١٠ & ١٧ \\ ٨ & ١١ & ١٣ \\ -٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل ص١ - ص٢
ص٢ - ص٣

$$\Longleftarrow \begin{vmatrix} ٤ & ٤ & ٤ \\ ١٠ & ١٠ & ١٠ \\ -٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٤ \times ١٠ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ -٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٤ \times ١٠ \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

④ بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ - \text{ب جـ} \\ ١ & \text{ب} & \text{ب}^٢ - \text{جـ أ} \\ ١ & \text{جـ} & \text{جـ}^٢ - \text{أ ب} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل ص٣ - ص١
ص٢ - ص١

$$\Longleftarrow \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ - \text{ب جـ} \\ ٠ & \text{أ} - \text{ب} & \text{أ}^٢ - \text{ب جـ} - \text{ب}^٢ + \text{جـ أ} \\ ٠ & \text{أ} - \text{جـ} & \text{أ}^٢ - \text{ب جـ} - \text{جـ}^٢ + \text{أ ب} \end{vmatrix}$$

$$= ١ \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & \text{أ}^٢ - \text{ب}^٢ + \text{جـ}(\text{أ} - \text{ب}) \\ \text{أ} - \text{جـ} & \text{أ}^٢ - \text{جـ}^٢ + \text{ب}(\text{أ} - \text{جـ}) \end{vmatrix} + ٠$$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب}) + \text{جـ}(\text{أ} - \text{ب}) \\ \text{أ} - \text{جـ} & (\text{أ} - \text{جـ})(\text{أ} + \text{جـ}) + \text{ب}(\text{أ} - \text{جـ}) \end{vmatrix}$$

$\Longleftarrow$

* تابع س٤ /

$$= \begin{vmatrix} (\text{أ} - \text{ب})[\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}] & \text{أ} - \text{ب} \\ (\text{أ} - \text{جـ})[\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}] & \text{أ} - \text{جـ} \end{vmatrix}$$

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & \text{أ} - \text{ب} \\ \text{أ} - \text{جـ} & \text{أ} - \text{جـ} \end{vmatrix} (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}) =$$ #

---

٥) استخدم خصائص المحددات لإثبات أنه:

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} - 1 & \text{ب} + \text{جـ} \\ 1 & \text{ب} - 1 & \text{جـ} + \text{أ} \\ 1 & \text{جـ} - 1 & \text{ب} + \text{أ} \end{vmatrix}$$

الحل ع١ + ع٢ ⟸

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} - 1 & \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1 \\ 1 & \text{ب} - 1 & \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1 \\ 1 & \text{جـ} - 1 & \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} - 1 & 1 \\ 1 & \text{ب} - 1 & 1 \\ 1 & \text{جـ} - 1 & 1 \end{vmatrix} (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1)$$

$$\text{صفر} = \text{صفر} \times (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - 1) =$$

٦) بدون فك المحدد أثبت أنه:

$$\begin{vmatrix} س & أ & أ \\ أ & س & أ \\ أ & أ & س \end{vmatrix} = (س+2أ)(س-أ)^2$$

الحل

$$\begin{vmatrix} س & أ & أ \\ أ & س & أ \\ أ & أ & س \end{vmatrix} \xrightarrow{ص_3 + -ص_1} \begin{vmatrix} س & أ & أ \\ أ & س & أ \\ أ-س & 0 & س-أ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{ع_1 + ع_3} \begin{vmatrix} س+أ & أ & أ \\ 2أ & س & أ \\ 0 & 0 & س-أ \end{vmatrix} \xrightarrow{ص_2 + -ص_1}$$

$$\begin{vmatrix} س+أ & أ & أ \\ أ-س & س-أ & 0 \\ 0 & 0 & س-أ \end{vmatrix} \xrightarrow{ع_1 + ع_2} \begin{vmatrix} س+2أ & أ & أ \\ 0 & س-أ & 0 \\ 0 & 0 & س-أ \end{vmatrix}$$

$$= (س+2أ)(س-أ)^2 \quad \#$$

٧) برهن باستخدام خصائص المحددات أنه

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & ب \\ 1-ب & ب & ب-1 \\ ب & -ب & 1 \end{vmatrix} = 1-ب^2$$

الحل

$$\xrightarrow[-ب\,ص_1 + ص_3]{(ب-1)\,ص_1 + ص_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & ب \\ 0 & 1 & ب^2-1 \\ 0 & 0 & 1-ب^2 \end{vmatrix} = 1-ب^2 \quad \#$$

⑧ أوجد قيمة ك التي تجعل (س − ١) أحد عوامل

$$\begin{vmatrix} س & ٢ & ٤ \\ ك & ك+س & ك+٥ \\ ٣ & ك+٢ & -١ \end{vmatrix}$$

الحل ∵ (س − ١) أحد العوامل ⟸ س = ١ أحد جذور المحدد

∴ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ١ & ك+١ & ك+٥ \\ ٣ & ك+٢ & -١ \end{vmatrix}$ = صفر

⟸ نكمل الحل ونجد أن ك = ٢ أو ك = ٣

⑨ في أي مثلث أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & جا^٢أ & جتا٢أ \\ ١ & جا^٢ب & جتا٢ب \\ ١ & جا^٢ج & جتا٢ج \end{vmatrix}$ = صفر

الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & جا^٢أ & جتا^٢أ - جا^٢أ \\ ١ & جا^٢ب & جتا^٢ب - جا^٢ب \\ ١ & جا^٢ج & جتا^٢ج - جا^٢ج \end{vmatrix}$

⟸ ع٣ + ع٢

$\begin{vmatrix} ١ & جا^٢أ & جتا^٢أ \\ ١ & جا^٢ب & جتا^٢ب \\ ١ & جا^٢ج & جتا^٢ج \end{vmatrix}$ ⟸ ع٢ + ع٣

تابع ⟸

تابع س٩

$$= \begin{vmatrix} 1 & \text{جا}^2\text{أ} & \text{جا}^2\text{أ} + \text{جتا}^2\text{أ} \\ 1 & \text{جا}^2\text{ب} & \text{جا}^2\text{ب} + \text{جتا}^2\text{ب} \\ 1 & \text{جا}^2\text{جـ} & \text{جا}^2\text{جـ} + \text{جتا}^2\text{جـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{جا}^2\text{أ} & 1 \\ 1 & \text{جا}^2\text{ب} & 1 \\ 1 & \text{جا}^2\text{جـ} & 1 \end{vmatrix}$$

= صفر #

(١٠) بدون فك المحدد أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} \text{س} - \text{ص} & \text{س} - \text{ع} & \text{ع} \\ \text{س} - \text{ص} & \text{ع} & \text{س} - \text{ع} \\ -\text{ص} & \text{س} - \text{ع} & \text{س} + \text{ع} \end{vmatrix} = \text{س}\,(\text{٢س} - \text{ص})(\text{٢ع} - \text{س})$$

الحل

$\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3$

$$\begin{vmatrix} \text{٢س} - \text{ص} & \text{س} - \text{ع} & \text{ع} \\ \text{٢س} - \text{ص} & \text{ع} & \text{س} - \text{ع} \\ \text{٢س} - \text{ص} & \text{س} - \text{ع} & \text{س} + \text{ع} \end{vmatrix}$$

$$(\text{٢س} - \text{ص}) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} - \text{ع} & \text{ع} \\ 1 & \text{ع} & \text{س} - \text{ع} \\ 1 & \text{س} - \text{ع} & \text{س} + \text{ع} \end{vmatrix}$$

$\text{ع}_2 + \text{ع}_3$

$$(\text{٢س} - \text{ص}) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{ع} \\ 1 & \text{س} & \text{س} - \text{ع} \\ 1 & \text{٢س} & \text{س} + \text{ع} \end{vmatrix}$$

يتبع

تابع حل

$$\Longleftarrow \quad \text{س}(٢\text{س}-\text{ص}) \begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{ع} \\ ١ & ١ & \text{س}-\text{ع} \\ ١ & ٢ & \text{س}+\text{ع} \end{vmatrix}$$

$$\text{ع}_١ - \text{ع}_٢ \Longleftarrow \quad \text{س}(٢\text{س}-\text{ص}) \begin{vmatrix} ٠ & ١ & \text{ع} \\ ٠ & ١ & \text{س}-\text{ع} \\ ١- & ٢ & \text{س}+\text{ع} \end{vmatrix}$$

ونفك المحدد فينتج

$$(٢\text{س}-\text{ص})(\text{س}) \times ١-(\text{س}-\text{ع}-\text{ع}-\text{ع})$$

$$= (٢\text{س}-\text{ص}) \times \text{س} \times (٢\text{ع}-\text{س}) \quad \#$$

(11) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} (\text{أ}+\text{ب})^٢ & \text{أ}^٢+\text{ب}^٢ & \text{أب} \\ (\text{أ}+\text{د})^٢ & \text{ج}^٢+\text{د}^٢ & \text{جد} \\ (\text{هـ}+\text{و})^٢ & \text{هـ}^٢+\text{و}^٢ & \text{هـو} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل فك المربع الكامل

في $\text{ع}_١ \Longleftarrow$

$$\begin{vmatrix} \text{أ}^٢+٢\text{أب}+\text{ب}^٢ & \text{أ}^٢+\text{ب}^٢ & \text{أب} \\ \text{أ}^٢+٢\text{أد}+\text{د}^٢ & \text{ج}^٢+\text{د}^٢ & \text{جد} \\ \text{هـ}^٢+٢\text{هـو}+\text{و}^٢ & \text{هـ}^٢+\text{و}^٢ & \text{هـو} \end{vmatrix}$$

تابع س ١١

$\xLeftarrow{\text{٢ع٣}}$

$$\begin{vmatrix} \text{٢أب} & \text{أ}^2+\text{ب}^2 & \text{أ}^2+\text{٢أب}+\text{ب}^2 \\ \text{٢جـد} & \text{جـ}^2+\text{د}^2 & \text{جـ}^2+\text{٢جـد}+\text{د}^2 \\ \text{٢هـو} & \text{هـ}^2+\text{و}^2 & \text{هـ}^2+\text{٢هـو}+\text{و}^2 \end{vmatrix}$$

$\xLeftarrow{\text{ع٣}+\text{ع٢}}$ ع١ − (ع٢ + ع٣)

$$\begin{vmatrix} \text{٢أب} & \text{أ}^2+\text{ب}^2 & 0 \\ \text{٢جـد} & \text{جـ}^2+\text{د}^2 & 0 \\ \text{٢هـو} & \text{هـ}^2+\text{و}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

= صفر #

(١٢) أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ع}+\text{ل} & \text{س}+\text{ص} \\ \text{س} & \text{س}+\text{ل} & \text{ص}+\text{ع} \\ \text{ص} & \text{ص}+\text{ل} & \text{ع}+\text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل ع١ + ع٣ $\Leftarrow$

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ع}+\text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ \text{س} & \text{س}+\text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ \text{ص} & \text{ص}+\text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \end{vmatrix}$$

$\xLeftarrow{\text{ع٢}-\text{ع٣}}$

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ \text{س} & \text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \\ \text{ص} & \text{ل} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \end{vmatrix}$$

تابع س١٢

$$ل(س+ص+ع)\begin{vmatrix} 1 & 1 & ع \\ 1 & 1 & س \\ 1 & 1 & ص \end{vmatrix}$$

$$= ل(س+ص+ع) \times \text{صفر} = \text{صفر} \; \#$$

(١٣) باستخدام خواص المحدد أثبت أنه :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ أ^3 & ب^3 & جـ^3 \end{vmatrix} = (أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ)(أب+بجـ+جـأ)$$

الحل $ع_1 - ع_2$ ، $ع_2 - ع_3$ $\longrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ أ^2-ب^2 & ب^2-جـ^2 & جـ^2 \\ أ^3-ب^3 & ب^3-جـ^3 & جـ^3 \end{vmatrix}$$

* بأخذ أ-ب عامل مشترك من $ع_1$
* بأخذ ب-جـ عامل مشترك من $ع_2$

$$(أ-ب)(ب-جـ)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ أ+ب & ب+جـ & جـ^2 \\ أ^2+أب+ب^2 & ب^2+بجـ+جـ^2 & جـ^3 \end{vmatrix}$$

$$= (أ-ب)(ب-جـ)\begin{vmatrix} أ+ب & ب+جـ \\ أ^2+أب+ب^2 & ب^2+بجـ+جـ^2 \end{vmatrix}$$

وبفك المحدد نحصل على

$$= (أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ)(أب+بجـ+جـأ) \; \#$$

(١٤) بدون فك المحدد أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & \text{ص} & \text{ص}^2 \\ 1 & \text{ع} & \text{ع}^2 \end{vmatrix} = (\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س})$$

الحل

$$\xrightarrow[\text{ص}_3 - \text{ص}_2]{\text{ص}_2 - \text{ص}_1} \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 0 & \text{ص}-\text{س} & \text{ص}^2-\text{س}^2 \\ 0 & \text{ع}-\text{ص} & \text{ع}^2-\text{ص}^2 \end{vmatrix}$$

م.ت (ص − س) من الصف الثاني

م.ت (ع − ص) من الصف الثالث

$$\xrightarrow{} (\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص}) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 0 & 1 & \text{س}+\text{ص} \\ 0 & 1 & \text{ص}+\text{ع} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{} (\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص}) \begin{vmatrix} 1 & \text{س}+\text{ص} \\ 1 & \text{ص}+\text{ع} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ص}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص})(\text{ع}+\cancel{\text{ص}}-\cancel{\text{ص}}-\text{س})$$

$$= -1 \times (\text{س}-\text{ص}) \times -1 \times (\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س})$$

$$= (\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س}) \quad \#$$

(١٥) أثبت بدون فك المحددات أنه

$$\begin{vmatrix} \text{ل}_1+\text{م}_1\text{س} & \text{م}_1\text{س}-\text{ل}_1 & \text{ن}_1 \\ \text{ل}_2+\text{م}_2\text{س} & \text{م}_2\text{س}-\text{ل}_2 & \text{ن}_2 \\ \text{ل}_3+\text{م}_3\text{س} & \text{م}_3\text{س}-\text{ل}_3 & \text{ن}_3 \end{vmatrix} = 2\text{س} \begin{vmatrix} \text{ل}_1 & \text{م}_1 & \text{ن}_1 \\ \text{ل}_2 & \text{م}_2 & \text{ن}_2 \\ \text{ل}_3 & \text{م}_3 & \text{ن}_3 \end{vmatrix}$$

الحل $\text{ع}_1 - \text{ع}_2 \Longleftarrow$

$$\begin{vmatrix} 2\text{ل}_1 & \text{م}_1\text{س}-\text{ل}_1 & \text{ن}_1 \\ 2\text{ل}_2 & \text{م}_2\text{س}-\text{ل}_2 & \text{ن}_2 \\ 2\text{ل}_3 & \text{م}_3\text{س}-\text{ل}_3 & \text{ن}_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} \text{ل}_1 & \text{م}_1\text{س}-\text{ل}_1 & \text{ن}_1 \\ \text{ل}_2 & \text{م}_2\text{س}-\text{ل}_2 & \text{ن}_2 \\ \text{ل}_3 & \text{م}_3\text{س}-\text{ل}_3 & \text{ن}_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{ع}_2 + \text{ع}_1 = 2 \begin{vmatrix} \text{ل}_1 & \text{م}_1\text{س} & \text{ن}_1 \\ \text{ل}_2 & \text{م}_2\text{س} & \text{ن}_2 \\ \text{ل}_3 & \text{م}_3\text{س} & \text{ن}_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\text{س} \begin{vmatrix} \text{ل}_1 & \text{م}_1 & \text{ن}_1 \\ \text{ل}_2 & \text{م}_2 & \text{ن}_2 \\ \text{ل}_3 & \text{م}_3 & \text{ن}_3 \end{vmatrix} \quad \#$$

(١٦) بدون فك المحدد أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1 \\ ب^2 & ب & 1 \\ جـ^2 & جـ & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ جـ & ب & أ \\ أب & جـأ & بجـ \end{vmatrix}$$

(الحل)

*ملاحظة / عند تبديل صفوف المحدد بأعمدة وأعمدة المحدد بنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير.

$$\begin{vmatrix} بجـ & أ & 1 \\ أجـ & ب & 1 \\ أب & جـ & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ جـ & ب & أ \\ أب & جـأ & بجـ \end{vmatrix}$$

اضرب ص١ في $\frac{أ}{أ}$

اضرب ص٢ في $\frac{ب}{ب}$

اضرب ص٣ في $\frac{جـ}{جـ}$

$$\begin{vmatrix} أ.ب.جـ & أ^2 & أ \\ أ.ب.جـ & ب^2 & ب \\ أ.ب.جـ & جـ^2 & جـ \end{vmatrix} \frac{1}{أبجـ}$$

خذ أبجـ عامل مشترك من ع٣

$$\begin{vmatrix} 1 & أ^2 & أ \\ 1 & ب^2 & ب \\ 1 & جـ^2 & جـ \end{vmatrix} \cancel{أبجـ} \times \frac{1}{\cancel{أبجـ}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & أ^2 & أ \\ 1 & ب^2 & ب \\ 1 & جـ^2 & جـ \end{vmatrix}$$

* تابع س ١٦

(تبديل ع٣ مع ع٢) $= -1 \times \begin{vmatrix} \text{أ} & 1 & \text{أ}^2 \\ \text{ب} & 1 & \text{ب}^2 \\ \text{جـ} & 1 & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$

(تبديل ع٢ مع ع١) $-1 \times -1 \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$ #

(١٧) استخدم خواص المحددات في إثبات أنه :-

$$\begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص}+2 & \text{س} & \text{ص} \\ 1 & \text{ص}+2\text{س}+1 & \text{ص} \\ 1 & \text{س} & \text{س}+2\text{ص}+1 \end{vmatrix} = 2(\text{س}+\text{ص}+1)^3$$

الحل: $ع_1 + ع_2 + ع_3 \longleftarrow$

$$\begin{vmatrix} 2(\text{س}+\text{ص}+1) & \text{س} & \text{ص} \\ 2(\text{س}+\text{ص}+1) & \text{ص}+2\text{س}+1 & \text{ص} \\ 2(\text{س}+\text{ص}+1) & \text{س} & \text{س}+2\text{ص}+1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(\text{س}+\text{ص}+1) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{ص} \\ 1 & \text{ص}+2\text{س}+1 & \text{ص} \\ 1 & \text{س} & \text{س}+2\text{ص}+1 \end{vmatrix}$$

تابع س١٧

$$\xrightarrow[ص_3 - ص_1]{ص_2 - ص_1} 2(س+ص+1)\begin{vmatrix} 1 & س & ص \\ 0 & س+ص+1 & 0 \\ 0 & 0 & س+ص+1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(س+ص+1)^3 \quad \#$$

(١٨) باستخدام خواص المحددات أثبت أنه:

$$\begin{vmatrix} س & أ & ب \\ أ & س & ب \\ أ & ب & س \end{vmatrix} = (س-أ)(س-ب)(س+أ+ب)$$

(الحل) $ع_1 + ع_2 + ع_3$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} س+أ+ب & أ & ب \\ س+أ+ب & س & ب \\ س+أ+ب & ب & س \end{vmatrix}$$

$$= (س+أ+ب)\begin{vmatrix} 1 & أ & ب \\ 1 & س & ب \\ 1 & ب & س \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[ص_2 - ص_3]{ص_1 - ص_2} (س+أ+ب)\begin{vmatrix} 0 & أ-س & 0 \\ 0 & س-ب & ب-س \\ 1 & ب & س \end{vmatrix}$$

تابع س١٨ $\quad (س+أ+ب)\begin{vmatrix} أ-س & 0 \\ س-ب & ب-س \end{vmatrix}$

$$\Leftarrow (س+أ+ب)(أ-س)(ب-س)$$

$$= (س+أ+ب)(س-أ)(س-ب) \quad \#$$

(١٩) باستخدام خصائص المحددات أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} 1 & أ & أ \\ 1 & ب & أ \\ 1 & أ & -ب \end{vmatrix} = (أ+ب)(أ-ب)$$

الحل

$\xleftarrow[ص_3 - ص_1]{ص_2 - ص_1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & أ & أ \\ 0 & ب-أ & 0 \\ 0 & 0 & -ب-أ \end{vmatrix} = (ب-أ)(-ب-أ) = -(أ-ب) \times -(أ+ب)$$

$$= (أ-ب)(أ+ب) \quad \#$$

(٢٠) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ب(جـ-أ) & أ(ب-جـ) & أجـ \\ أ(ب-جـ) & جـ(أ-ب) & بجـ \\ جـ(أ-ب) & ب(جـ-أ) & أب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} بجـ & أ^2 & أ^3 \\ ب^2 & أجـ & ب^3 \\ جـ^2 & جـ^2 & أب \end{vmatrix}$$

الحل

الطرف الأيمن

$\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 \text{ ، } \text{ع}_2 + \text{ع}_3$

$$\frac{1}{\text{أبجـ}}\begin{vmatrix} \text{جـ}\,\text{أ}^2 & \text{أ}^2\text{ب} & \text{أبجـ} \\ \text{ب}^2\text{جـ} & \text{أبجـ} & \text{أب}^2 \\ \text{أبجـ} & \text{ب}\,\text{جـ}^2 & \text{جـ}^2\text{أ} \end{vmatrix} \xleftarrow[\text{ص}_3 \times \frac{\text{جـ}}{\text{جـ}}]{\text{ص}_1 \times \frac{\text{أ}}{\text{أ}} \quad \text{ص}_2 \times \frac{\text{ب}}{\text{ب}}} \begin{vmatrix} \text{جـأ} & \text{أب} & \text{بجـ} \\ \text{بجـ} & \text{جـأ} & \text{أب} \\ \text{أب} & \text{بجـ} & \text{جـأ} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ}^2 & \text{بجـ} \\ \text{ب}^2 & \text{أجـ} & \text{ب}^2 \\ \text{أب} & \text{جـ}^2 & \text{جـ}^2 \end{vmatrix} \cancel{\text{أبجـ}} \times \frac{1}{\cancel{\text{أبجـ}}} \xleftarrow{\text{عامل مشترك}}$$

$\text{ع}_1 \leftarrow \text{أ}$

$\text{ع}_2 \leftarrow \text{ب}$

$\text{ع}_3 \leftarrow \text{جـ}$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ}^2 & \text{بجـ} \\ \text{ب}^2 & \text{أجـ} & \text{ب}^2 \\ \text{أب} & \text{جـ}^2 & \text{جـ}^2 \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيسر} \ \#$$

(٢١) أثبت أنه

$$\begin{vmatrix} \text{ب}+\text{جـ} & \text{جـ}+\text{أ} & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{ل}+\text{م} & \text{م}+\text{ن} & \text{ن}+\text{ل} \\ \text{ص}+\text{ع} & \text{ع}+\text{س} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ن} & \text{ل} & \text{م} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

(الحل)

الطرف الأيمن /

$$\xleftarrow{\text{ع}_1 - \text{ع}_2 + \text{ع}_3} \begin{vmatrix} ٢\text{ب} & \text{جـ}+\text{أ} & \text{أ}+\text{ب} \\ ٢\text{ل} & \text{م}+\text{ن} & \text{ن}+\text{ل} \\ ٢\text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix}$$

٢ عامل مشترك من ع_1

$$\longleftarrow \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{جـ}+\text{أ} & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{ل} & \text{م}+\text{ن} & \text{ن}+\text{ل} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix}$$

$$\xleftarrow{\text{ع}_3 - \text{ع}_1} ٢ \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{جـ}+\text{أ} & \text{أ} \\ \text{ل} & \text{م}+\text{ن} & \text{ن} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{س} \end{vmatrix}$$

$$\xleftarrow{\text{ع}_2 - \text{ع}_3} ٢ \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ص} & \text{ع} & \text{س} \end{vmatrix}$$

تابع س ٢١

$$= -\text{م} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ج} & \text{ب} \\ \text{ك} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{س} & \text{ع} & \text{ص} \end{vmatrix}$$

$$= -١ \times -١ \times \text{م} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ك} & \text{ل} & \text{م} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

$$= \text{م} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ك} & \text{ل} & \text{م} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} \#$$

٢٢ حل المعادلة الآتية

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٣ & \text{س} & ٥ \\ -١ & ٠ & \text{س}+١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & ٣ \\ ١ & ٢\text{س} \end{vmatrix}$$

الحل باستخدام خصائص المحددات للطرف الأيمن

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٣ & \text{س} & ٥ \\ -١ & ٠ & \text{س}+١ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{ص}_٣ + \text{ص}_١} \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٣ & \text{س} & ٥ \\ ٠ & ٠ & \text{س}+٢ \end{vmatrix}$$

تابع س٢٢

نفك المحدد باستخدام ص٣ $\Leftarrow (\text{س}+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & \text{س} \end{vmatrix}$

$= (\text{س}+2)(\text{س}-0) = \text{س}^2 + 2\text{س}$

الطرف الأيسر

$\begin{vmatrix} \text{س} & 3 \\ 1 & 2\text{س} \end{vmatrix} = 2\text{س}^2 - 3$

نساوي الطرف الأيمن بالأيسر

$\text{س}^2 + 2\text{س} = 2\text{س}^2 - 3 \Leftarrow \text{س}^2 - 2\text{س} - 3 = 0$

$\Leftarrow (\text{س}-3)(\text{س}+1) = 0$

$\Leftarrow \text{س} = 3 \text{ ، } \text{س} = -1$

(٢٣) أثبت باستخدام خصائص المحددات أنه

$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix} = (\text{أ}+2\text{ب})(\text{أ}-\text{ب})^2$

الحل $\xrightarrow[\text{ع}_1+\text{ع}_3]{\text{ع}_1+\text{ع}_2} \begin{vmatrix} \text{أ}+2\text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{أ}+2\text{ب} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ}+2\text{ب} & \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{من ع}_1]{\text{عامل مشترك}} (\text{أ}+2\text{ب}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & \text{ب} \\ 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ 1 & \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$

$$= \;\; (أ + ٢ب) \begin{vmatrix} ب & ب & ١ \\ ٠ & أ - ب & ٠ \\ أ - ب & ٠ & ٠ \end{vmatrix} \;\; \xleftarrow[\text{ص}_٢ - \text{ص}_١]{\text{ص}_٣ - \text{ص}_١} \;\; =$$

نجد المحدد من خلال ضرب عناصر القطر الرئيسي

$$= (أ + ٢ب)\,(١)\,(أ - ب)\,(أ - ب)$$

$$= (أ + ٢ب)\,(أ - ب)^٢ \quad \#$$

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درس

النظير الضربي للمصفوفة المربعة

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس النظير الضربي للمصفوفة المربعة (دفعة 2004)

① إذا كان $أ = \begin{bmatrix} \text{س} & ٣ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$ وكان $|أ| = |أ^{-1}|$ فإن إحدى

قيم س الممكنة

(أ) ٤ (ب) ٨ (ج) −٤ (د) ٢

② إذا كان $أ^{-1} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

فإن $(أ \times ب)^{-1} =$

(أ) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & -\frac{٣}{٢} \\ -\frac{٣}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ \frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} ١ & -\frac{٢}{٣} \\ \frac{٣}{٢} & ١ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

٣) إذا كان $(أ + أ ب)^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ وكانت $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

حيث $(أ + أ ب)$ مصفوفة غير منفردة فإن المصفوفة ب =

أ) $\begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ -١٨ & -٧ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ٧ \\ -١٨ & ٢ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} -٦ & ٢ \\ -١٨ & -٧ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٦ & ٢ \\ -١٨ & ٧ \end{bmatrix}$

٤) إذا كانت $س = \begin{bmatrix} أ & ٣ \\ ب & ج \end{bmatrix}$ وكان $س = سَ^{١}$ فإن أ + ج =

أ) -١ ب) صفر ج) $\frac{١}{٢}$ د) -٣

٥) إذا كانت $ب^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٢ & ٦ \end{bmatrix}$ ، $(س \times ب)^{-١} = \frac{ب}{|ب|}$

فإن المصفوفة س =

أ) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & ٠ \\ -\frac{٤}{٣} & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & ١ \\ -\frac{٤}{٣} & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & ٣ \\ -\frac{٣}{٤} & ٣ \end{bmatrix}$

⑥ إذا كانت $ب^{-1} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ وكان $ب \times أ - \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = و$

فإن المصفوفة $أ^{-1} =$

أ) $\begin{bmatrix} -٦ & -١٢ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} -\frac{١}{٥} & -\frac{٢}{٥} \\ -\frac{١}{٦} & -\frac{١}{٦} \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{٢}{٥} \\ -\frac{١}{٦} & -\frac{١}{٦} \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} -\frac{١}{٥} & \frac{٩}{٢} \\ \frac{١}{٦} & \frac{١}{٦} \end{bmatrix}$

⑦ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

فإن حل المعادلة المصفوفية $أ^{-1} \times (س^{-1} \times ب)^{-1} = م_٢ + ب$ هي س

=

أ) $\begin{bmatrix} ٢٨ & ٥٢ \\ ١٤ & -١٤ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} -٢٨ & -٥٢ \\ -١٤ & ١٤ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ٢٨ & ١ \\ -١٤ & ٥٢ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} -٢٨ & -٥٢ \\ -١٤ & ١٤ \end{bmatrix}$

٨) إذا علمت أن أ، ب مصفوفتان من الرتبة الثانية حيث أن

$(٢ \text{أ} \text{ب}^{-١})^{-١} - \text{م}_٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ وكان $(٤\text{أ})^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

فإن ب =

أ) $\begin{bmatrix} ١٦ & -٨ \\ ١٢ & ١٤ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} \frac{-١٦}{٢٠} & \frac{٨}{٢٠} \\ \frac{-١٢}{٢٠} & \frac{-١٤}{٢٠} \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢٠} & -٨ \\ \frac{-١٢}{٢٠} & \frac{-٤٤}{٢٠} \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} \frac{١٦}{٢٠} & \frac{-٨}{٢٠} \\ \frac{١٢}{٢٠} & \frac{٤٤}{٢٠} \end{bmatrix}$

٩) حل المعادلة المصفوفية

$\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} \times \text{س} \times \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ هو س =

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & -٧ \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} -١ & -٣ \\ -٢ & -٧ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٢ & -٧ \end{bmatrix}$

(١٠) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ فإن $أ^{-١} . ب - ٤٢أ_{٢} =$

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & -٨ \\ ١٥ & ٠ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} -١ & ٨ \\ ١٥ & ٠ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ٨ \\ -١٥ & -١ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ١ & -٨ \\ -١٥ & ١ \end{bmatrix}$

حلول أسئلة اختبار درس
النظير الضربي للمصفوفة المربعة

(١) $|أ^{-١}| = \frac{١}{|أ|} \Leftarrow |أ| = \frac{١}{|أ|}$ ($|أ| = |أ^{-١}|$ معطى)

$\therefore |أ||أ| = ١$

كذلك

لكن $|أ| = -٢س + ٩ \Leftarrow |أ|^{٢} = ١$

$\Leftarrow (-٢س + ٩)^{٢} = ١$

$\Leftarrow$ إما $-٢س + ٩ = ١$ أو $-٢س + ٩ = -١$

$\Leftarrow -٢س = -٨$ ، $-٢س = -١٠$

$\Leftarrow س = ٤$ ، $س = ٥$

$\therefore$ إحدى قيم س الممكنة هي (٤) فرع (أ)

(٢) $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

$(أ \times ب)^{-١} = ب^{-١} \times أ^{-١}$

نجد $ب^{-١}$

$|ب| = ٢ \Leftarrow ب^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ -\frac{١}{٢} & ١ \end{bmatrix}$

$(أ \times ب)^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ -\frac{١}{٢} & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ -\frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ فرع (ب)

(٣) $(أ + أب)^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$

$(أ + أب)^{-١} = س$ (مجرد تسمية)

$\left((أ + أب)^{-١}\right)^{-١} = س^{-١}$

$\Leftarrow$ $أ + أب = س^{-١}$ لذلك نوجد $س^{-١}$

$|س| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix} = ١٤ - ١٥ = -١$

$س^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} -٣ & ٧ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow$ $أ + أب = \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ (اضرب في $أ^{-١}$ من اليمين للجهتين)

$أ^{-١}(أ + أب) = أ^{-١} \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$م + ب = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow$ $م + ب = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ٨ & -١٨ \end{bmatrix}$ $\Leftarrow$ $ب = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ٨ & -١٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٧ & -١٨ \end{bmatrix}$ فرع (د)

④ $\text{س} = \text{س}^{-1}$ (اضرب في س للطرفين)

$\text{س} \times \text{س} = \text{س} \times \text{س}^{-1}$

$\text{س}^{2} = \text{م} \Leftarrow |\text{س}|^{2} = |\text{م}| \Leftarrow |\text{س}| = \pm 1$

$\text{س}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -٣ & \text{ج} \\ \text{أ} & -\text{ب} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ٣ & \text{أ} \\ \text{ج} & \text{ب} \end{bmatrix}$ (عندما $|\text{س}| = 1$)

(مرفوض لأن $\text{س}^{-1} = \text{س}$ معطى)

$\text{س}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -٣ & \text{ج} \\ \text{أ} & -\text{ب} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -\text{ج} \\ -\text{أ} & \text{ب} \end{bmatrix}$ (عندما $|\text{س}| = -1$)

$\because \text{س}^{-1} = \text{س}$

$\therefore \begin{bmatrix} ٣ & -\text{ج} \\ -\text{أ} & \text{ب} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & \text{أ} \\ \text{ج} & \text{ب} \end{bmatrix}$

من تساوي المصفوفتين $-\text{ج} = \text{أ} \Leftarrow \text{أ} + \text{ج} = $ صفر

فرع (ب)

٥) $(س \times ب)^{-1} = \frac{ب}{|ب|}$

$\Leftarrow ب^{-1} \times س^{-1} = \frac{ب}{|ب|}$ (اضرب في ب من جهة اليمين)

$ب \times ب^{-1} \times س^{-1} = ب \times ب \times \frac{1}{|ب|} \Leftarrow س^{-1} = ب^{2} \times \frac{1}{|ب|} \rightarrow (*)$

$|ب^{-1}| = ١٢$

$ب = (ب^{-1})^{-1} = \frac{1}{١٢} \begin{bmatrix} ٠ & ٦ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} \Leftarrow ب = \frac{1}{١٢} \times ٢ \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ب = \frac{1}{٦} \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ب^{2} = \frac{1}{٦} \times \frac{1}{٦} \times \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

$ب^{2} = \frac{1}{٣٦} \begin{bmatrix} ٠ & ٩ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ عوض عن $ب^{2}$ في (*)

$س^{-1} = \frac{1}{٣٦} \begin{bmatrix} ٠ & ٩ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \times \frac{1}{\frac{1}{١٢}} = \frac{١٢}{٣٦} \begin{bmatrix} ٠ & ٩ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow س^{-1} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ \frac{1}{٣} & \frac{٤}{٣} \end{bmatrix} \Leftarrow |س^{-1}| = ٣ \times \frac{1}{٣} - ٠ = ١$

$\therefore س = (س^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} ٠ & \frac{1}{٣} \\ ٣ & \frac{-٤}{٣} \end{bmatrix}$ فرع (م)

⑥ $ب \times أ - \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ب \times أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ب \times أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ (اضرب الطرفين في $ب^{-١}$ من جهة اليمين)

$ب^{-١} ب أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \Leftarrow أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ -٥ & -١٢ \end{bmatrix}$

$|أ| = ٥ \times -١٢ - (٦ \times -٥) = -٣٠$

$أ^{-١} = \frac{١}{-٣٠} \begin{bmatrix} -١٢ & -٦ \\ ٥ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٥} & \frac{١}{٥} \\ -\frac{١}{٦} & -\frac{١}{٦} \end{bmatrix}$ فع (ج)

⑦ $أ^{-١} \times (س^{-١} \times ب)^{-١} = م_٢ + ب$

$\Leftarrow أ^{-١} \times ب^{-١} \times س = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow (ب أ)^{-١} \times س = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$ اضرب في (ب أ) من اليمين

$\Leftarrow (ب أ)(ب أ)^{-١} \times س = ب أ \times \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow س = ب أ \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix} \longrightarrow (*)$

لكن $ب أ = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٢ & ١٠ \\ ١٤ & ٠ \end{bmatrix}$

عوض عن ب أ في (*)

$\therefore س = \begin{bmatrix} -١٢ & ١٠ \\ ١٤ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix} \Leftarrow س = \begin{bmatrix} ٥٢ & ٢٨ \\ -١٤ & ١٤ \end{bmatrix}$

فع (أ)

(٨) $\left(٢أب^{-1}\right)^{-1} - م_٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

$\frac{١}{٢} \left(ب^{-1}\right)^{-1} أ^{-1} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$\frac{١}{٢} ب أ^{-1} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \Leftarrow ب أ^{-1} = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ب أ^{-1} أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix} \times أ$

$\Leftarrow ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix} \times أ \longleftarrow (*)$

لكن $(٤أ)^{-1} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \frac{١}{٤} أ^{-1} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \Leftarrow أ^{-1} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ -٢ & ٢ \end{bmatrix}$

$|أ^{-1}| = ٨ + ١٢ = ٢٠ \Leftarrow أ = \frac{١}{٢٠} \begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

عوض عن أ في (*)

$ب = \frac{١}{٢٠} \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \Leftarrow ب = \frac{١}{٢٠} \begin{bmatrix} ١٦ & -٨ \\ ١٢ & ٤٤ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow ب = \begin{bmatrix} \frac{١٦}{٢٠} & \frac{-٨}{٢٠} \\ \frac{١٢}{٢٠} & \frac{٤٤}{٢٠} \end{bmatrix}$ فقط (د)

$$(٩)\quad \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix} \times \text{س} \times \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix} \times \text{س} \times \underbrace{\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}}_{\text{م}_٢} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix} \times \text{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix} \longrightarrow (*)$$

$$\text{محدد} \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix} = ١ - ٠ = ١ \quad (١)$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}^{-1} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣- & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣- & ١- \end{bmatrix}$$

(اضربها من جهة اليمين ١- ع (*))

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣- & ١- \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}}_{\text{م}_٢} \times \text{س} = \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣- & ١- \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣- & ١- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix} \longrightarrow \text{س} = \begin{bmatrix} ١- & ٣- \\ ٢- & ٧- \end{bmatrix}$$

فرع (ج)

$$(١٠)\quad \text{م}^{-1} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\text{م}^{-1} \cdot \text{ب} - ٢٤ \text{م}_٢$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣- & ٤- \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix} - ٢٤ \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢٤ & ٨- \\ ١٥ & ٤- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢٤ & ٠ \\ ٠ & ٢٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٨- \\ ١٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

فرع (أ)

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار الوحدة الثالثة

(المصفوفات والمحددات)

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الثالثة (المصفوفات والمحددات)

رياضيات 12 علمي دفعة 2004

(١) إذا كان $\begin{bmatrix} -٣ & س^٢-١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص+٥ & ٨ \\ س+١ & ٢ \end{bmatrix}$

فإن قيم س، ص على الترتيب هي :

(أ) ٣ ، -٨ (ب) -٨ ، ٣ (جـ) -٣ ، -٨ (د) ±٣ ، -٨

(٢) إذا كان جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & صفر \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ + ب فإن ب جـ - أ جـ =

(أ) $\begin{bmatrix} ١٦ & ٥ \\ ١٨ & ٣ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٩ & ١٢ \\ ١١ & ١٠ \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} -١٦ & -٥ \\ -١٨ & -٣ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -٩ & -١٢ \\ -١١ & -١٠ \end{bmatrix}$

(٣) قيم س، ص على الترتيب التي تجعل

$\begin{bmatrix} ص & س \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & -١ & ١ \\ ٤ & ٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & -٣ & ٤ \end{bmatrix}$

(أ) ١ ، $\frac{١}{٤}$ (ب) -١ ، $-\frac{١}{٤}$ (جـ) -١ ، $-\frac{١}{٤}$ (د) ١ ، $-\frac{١}{٤}$

(٤) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٦ & ١ \end{bmatrix}$ فإن قيمة

المصفوفة ٢٢أ + ٧٢ب - ٥(أ + ٢ب) =

(أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ١٧ & ١٧ \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ -٣٤ & ٥١ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٣٤ & ٥١ \end{bmatrix}$

⑤ حل المعادلة المصفوفية

$$-٣\left(س + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}\right) = س + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

أ) $\begin{bmatrix} \frac{٧}{٤} & \frac{١٠}{٤} \\ -٣ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -\frac{٧}{٤} & -\frac{١٠}{٤} \\ -٣ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} \frac{٧}{٤} & -\frac{١٠}{٤} \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} \frac{٧}{٤} & -\frac{١٠}{٤} \\ ٣ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

⑥ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ك & ٢ \\ ٥ & ك+١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -ك \\ -٢ك & -١ \end{bmatrix}$ فإن قيمة

ك التي تجعل $|أ+ب| =$ صفر هي ؟

أ) ١ ، ١٠ ب) -١ ، ١٠ ج) -١ ، -١٠ د) ٠ ، ١٠

⑦ إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{bmatrix}$ ، $|٣ب| = -١٨$

فإن $\begin{vmatrix} ل & ع \\ ل-٣ص & ع-٣س \end{vmatrix} =$

أ) ٦ ب) -٦ ج) ٢ د) -٢

(٨) عند حل معادلتين باستخدام كريمر كانت س = ٢

|أس| + ٤|أص| = ١٠ وكانت |٤أص| = ٦٤ فإن قيمة ص =

(أ) -٣ (ب) ٤/٣ (جـ) -٦ (د) -٤/٣

(٩) عند حل النظام التالي باستخدام طريقة جاوس فإن قيم أ، ب، جـ على الترتيب هي ؟

٤أ + ٥ب + جـ = ١٤

أ + ٣ب + ٢جـ = ٧

ب + ١٠أ = ١٢

(أ) -١، ٢، ١ (ب) ٠، ١، -٢ (جـ) ١، ٢، ٠ (د) ١، -١، ٢

(١٠) إذا كان $س^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

فإن ع التي تحقق $ع^{-1} \times س = ص$ هي ؟

(أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ -٣ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -٥ & \frac{١}{٢} \\ -٣ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -٥ & -١ \\ -٣ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

(١١) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ فما قيمة س، ص ∈ ح بحيث $أ^{٢} + س أ + ص م_{٢} = و_{٢\times٢}$

(أ) س = ١ ، ص = -٥ (ب) س = -١ ، ص = -٥

(جـ) س = ٠ ، ص = -١ (د) س = ٠ ، ص = ١

(١٢) إذا كانت أ، ب، ج، د مصفوفات بحيث ٣أ + ب ج = د

فإذا علمت أن رتبة ب = ٥×٢ ورتبة د = ٥×٣ ، فما رتبة

أ، ج على الترتيب ؟

(أ) ٥×٣ ، ٢×٣ (ب) ٥×٢ ، ٢×٣

(ج) ٢×٣ ، ٣×٢ (د) ٢×٥ ، ٣×٥

(١٣) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ & -١ \\ -٢ & ٩ & ١ \end{bmatrix}$ فإن قيمة $\left(\sum_{هـ=١}^{٣} أ_{٢هـ} \right)^{٢}$ =

(أ) ٢١ (ب) ٣٦ (ج) ٦٤ (د) ٢٨٩

(١٤) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} س+١ & ١ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٣ \\ ٢ & ٣ & س+٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة

فإن قيمة س =

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{-١}{٣}$ (ج) $\frac{-١}{١٠}$ (د) $\frac{١}{١٠}$

(١٥) إذا كان ص = ٢$س^{-١}$ ، |ص| = ٤ حيث س مصفوفة من الرتبة

٢×٢ فما قيمة |$ص^{٢}$ س|

(أ) -٤ (ب) ٤ (ج) ١٦ (د) -١٦

(١٦) عند استخدام قاعدة كريمر في ايجاد حل نظام مكون من معادلتين خطيتين في متغيرين إحداهما $ص = \frac{١}{٢} - س$ وُجد أن

$|أ_س| + |أ_ص| = ٧$ فإن $|أ| =$

(أ) ٦ (ب) ١٤ (ج) ١٦ (د) ٢

(١٧) عند حل نظام باستخدام قاعدة كريمر وجد أن

$أ \times أ_س = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $أ_ص \times أ_س = \begin{bmatrix} ٢٦ & ٦ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن قيمة ص

(أ) ٢٤ (ب) ٢٦ (ج) ٦ (د) ٣١

(١٨) إذا كانت $أ^{-١} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب^{-١}أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن $أ + ب^{-١} =$

(أ) $\begin{bmatrix} -٤ & ٩ \\ -٦ & ٧ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ -٤ & ٩ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -٤ & ٧ \\ -٦ & ٩ \end{bmatrix}$

(١٩) قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} ٢ & ٢س & -١ \\ ٠ & -١ & ٤ \\ ٢ & س & ١ \end{vmatrix} = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ١٧ & -٢ \\ س & ٢ \end{vmatrix}$ هي

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) $\frac{١}{٦}$ (د) $-\frac{١}{٦}$

(٢٠) إذا كانت س ، ص مصفوفتان غير منفردتين من الرتبة ن وكان

$|-٣س \times ص^{-١}| = ٢٧$ ، $|س| = ٢$ ، $|ص| = ٦$ فإن ن =

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ٥

حلول أسئلة اختبار الوحدة الثالثة

(المصفوفات والمحددات)

دفعة 2004

(١) $\begin{bmatrix} \text{ص}+٥ & ٨ \\ \text{س}+١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & \text{س}^٢-١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

$\text{س}^٢ - ١ = ٨ \Leftarrow \text{س}^٢ = ٩ \Leftarrow \text{س} = \pm ٣$

كذلك $\text{س} + ١ = ٤ \Leftarrow \text{س} = ٣$

$\therefore \text{س} = \{+٣ ، -٣\} \cap \{+٣\} = ٣$

$\text{ص} + ٥ = -٣ \Leftarrow \text{ص} = -٨$ فرع (أ)

(٢) $\text{ب ج} - \text{أ ج} = (\text{ب} - \text{أ})\,\text{ج}$

$= \begin{bmatrix} -٥ & -٢ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -١٦ & -٥ \\ -١٨ & -٣ \end{bmatrix}$ فرع (ج)

(٣) الطرف الأيمن

$\begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٩ & -٣ & ٣ \\ -٨ & ٠ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & -٣ & ٤ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} ٩\text{س} - ٨\text{ص} & -٣\text{س} & ٣\text{س} - ٤\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & -٣ & ٤ \end{bmatrix}$

-٣س = -٣ ⟸ س = ١

٣×١ - ٤ص = ٤ ⟸ -٤ص = ١ ⟸ ص = $-\frac{١}{٤}$

عوض عن س ، ص

٩س - ٨ص

= ٩×١ - ٨× $-\frac{١}{٤}$ = (١١) ✓ ⟸ س = $\boxed{١}$ ، ص = $\boxed{-\frac{١}{٤}}$ فرع (د)

(٤) ٢٢أ + ٢٧ب - ٥أ - ١٠ب = ١٧أ + ١٧ب = ١٧(أ + ب)

أ + ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

١٧(أ + ب) = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ -٣٤ & ٥١ \end{bmatrix}$ فرع (ج)

(٥) -٣س + -٣ $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ = س + $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

= -٣س + $\begin{bmatrix} -٦ & -٩ \\ -١٢ & ٣ \end{bmatrix}$ = س + $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

⟸ -٣س - س = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} -٦ & -٩ \\ -١٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ⟸ -٤س = $\begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ١٢ & -٢ \end{bmatrix}$

∴ س = $-\frac{١}{٤}$ $\begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ١٢ & -٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -\frac{٧}{٤} & -\frac{١٠}{٤} \\ -٣ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ فرع (ب)

(٦) $أ + ب = \begin{bmatrix} ٢-ل & ل+٢ \\ ل & ٥-٢ل \end{bmatrix}$

$|أ+ب| = (٢-ل)(٥-٢ل) - ل(ل+٢)$

$= ١٠ - ٤ل - ٥ل + ٢ل^٢ - ل^٢ - ٢ل$

$= ل^٢ - ١١ل + ١٠$

لكن $|أ+ب| = ٠ \Leftarrow ل^٢ - ١١ل + ١٠ = ٠$

$\Leftarrow (ل - ١٠)(ل - ١) = ٠$

$\therefore$ إما $ل = ١٠$ أو $ل = ١$ مع (أ)

(٧) $|٣ب| = -١٨ \Leftarrow ٣^٢|ب| = -١٨ \Leftarrow |ب| = -٢$

كذلك $|ب| = س ل - ص ع = -٢ \longleftarrow (*)$

$\begin{vmatrix} ع & ل \\ ع-٣س & ل-٣ص \end{vmatrix} = ع(ل-٣ص) - ل(ع-٣س)$

$= \cancel{ع ل} - ٣ع ص - \cancel{ل ع} + ٣ل س$

$= ٣(ل س - ص ع)$

$= ٣ \times |ب| = ٣ \times -٢ = -٦$ مع (ب)

(٨) $|٤ أ_{ص}| = ٦٤ \Leftarrow (٤)^{٢} |أ_{ص}| = ٦٤$

$\Leftarrow |أ_{ص}| = \frac{٦٤}{١٦} = ٤$

$|أ_{س}| + ٤|أ_{ص}| = ١٠$

$|أ_{س}| + ٤ \times ٤ = ١٠ \Leftarrow |أ_{س}| = ١٠ - ١٦ \Leftarrow |أ_{س}| = -٦$

$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} \Leftarrow ٢ = \frac{-٦}{|أ|} \Leftarrow |أ| = -٣$

$ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{٤}{-٣}$ فرع (د)

(٩) $\left[\begin{array}{ccc|c} ٤ & ٥ & ١ & ٤ \\ ١ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ١٠ & ١ & ٠ & ١٢ \end{array}\right] \xLeftarrow{-١٠ص_٢ + ص_٣} \left[\begin{array}{ccc|c} ٤ & ٥ & ١ & ١٤ \\ ١ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ٠ & -٢٩ & -٢٠ & ٥٨ \end{array}\right]$

تبديل $ص_١$ ب $ص_٢$ $\leftrightarrow$

$\Leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ٤ & ٥ & ١ & ١٤ \\ ٠ & -٢٩ & -٢٠ & ٥٨ \end{array}\right]$

$-٤ص_١ + ص_٢$

$\Leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ٠ & -٧ & -٧ & -١٤ \\ ٠ & -٢٩ & -٢٠ & -٥٨ \end{array}\right]$

$-\frac{١}{٧} ص_٢$

$\Leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ٠ & ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & -٢٩ & -٢٠ & -٥٨ \end{array}\right]$

$٢٩ص_٢ + ص_٣$

$\Leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ٠ & ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٩ & ٠ \end{array}\right]$

بالتعويض بطريقة عكسية

٩جـ = صفر ⟸ جـ = صفر

ب + جـ = ٢ ⟸ ب + ٠ = ٢ ⟸ ب = ٢

أ + ٣ب + ٢جـ = ٧ ⟸ أ + ٦ + ٠ = ٧ ⟸ $\boxed{\text{أ} = 1}$

∴ (أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ٠) فرع (جـ)

(١٠) $ع^{-1} \times س = ص$ (اضرب الطرفين في $س^{-1}$ من اليسار)

$ع^{-1} \times س \times س^{-1} = ص\, س^{-1}$

$ع^{-1} = ص\, س^{-1}$

$$ع^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|ع^{-1}| = -12 + 10 = -2$$

$$ع = (ع^{-1})^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -\frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}$$ فرع (أ)

(١١) $$أ^2 = أ \times أ = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$أ^2 + س\, أ + ص\, م_2 = و_2$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2س & س \\ 3س & -س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ص & 0 \\ 0 & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[٧ + ٢س + ص   ١ + س] = [٠   ٠]
[٣ + ٣س   ٤ - س + ص] = [٠   ٠]

٣ + ٣س = ٠ ⟸ س = -١

كذلك ١ + س = ٠ ⟸ س = -١

∴ س = -١ ✓

٤ - س + ص = ٠ ⟸ ٤ + ١ + ص = ٠ ⟸ ص = -٥

كذلك ٧ + ٢س + ص = ٠ ⟸ ٧ - ٢ + ص = ٠ ⟸ ص = -٥ ✓

∴ س = -١ ، ص = -٥   فرع (ب)

(١٢) ٣أ + ب جـ = د ، ب = ٢×٥
د = ٣×٥

٣أ + ب جـ = د

٣×٥   ٢×٥   ٣×٢   ٣×٥

أ ⟵ ٣×٥   فرع (أ)

جـ ⟵ ٣×٢

١٣)

$$\left(\sum_{هـ=١}^{٣} أ_{٢هـ} \right)^{٢}$$

(تعني مجموع المدخلات في الصف الثاني من العمود الأول للعمود الثالث)^{٢} = (٢ + ٥ − ١)^{٢} = ٣٦ فرع ب

١٤) أ منفردة ⟸ |أ| = صفر

$$|أ| = (س+١) \begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & س+٢ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & س+٢ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

⟸ (س+١) (٠ − ٩) − [٦ − (س+٢)] + ٢ × (٣ − ٠) = صفر

⟸ −٩س − ٩ − س − ٢ + ٦ + ٦ = ٠

⟸ −١٠س + ١ = ٠ ⟸ −١٠س = −١ ⟸ س = $\frac{١}{١٠}$ فرع د

١٥) ص = ٢س$^{-١}$ ⟸ |ص| = |٢س$^{-١}$| ⟸ |ص| = ٤|س$^{-١}$|

⟸ ٤ = ٤|س$^{-١}$|

⟸ |س$^{-١}$| = ١ ⟸ |س| = ١

|ص^{٢}س| = |ص|^{٢} × |س| = ١٦ × ١ = ١٦ فرع جـ

16) ص + س = $\frac{1}{2}$ ⟵ (*)

|أس| + |أص| = ٧ (÷ |أ| حيث |أ| ≠ صفر)

$\frac{|\text{أس}|}{|\text{أ}|} + \frac{|\text{أص}|}{|\text{أ}|} = \frac{٧}{|\text{أ}|}$

س + ص = $\frac{٧}{|\text{أ}|}$ ⟵ (**)

من (*) و (**) $\frac{٧}{|\text{أ}|} = \frac{1}{2}$ ⟸ |أ| = ١٤ منع (ب)

17) أ × أس = $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ (نأخذ المحدد للطرفين)

⟸ |أ × أس| = $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ ⟸ |أ| × |أس| = ٤ ⟵ (*)

كذلك أص × أس = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢٦ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ (نأخذ المحدد للطرفين)

|أص| × |أس| = $\begin{vmatrix} ٦ & ٢٦ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix}$ ⟸ |أص| × |أس| = ٢٤ ⟵ (**)

بقسمة (**) ع (*)

$\frac{|\text{أص}| \times \cancel{|\text{أس}|}}{|\text{أ}| \times \cancel{|\text{أس}|}} = \frac{٢٤}{٤}$ ⟸ $\frac{|\text{أص}|}{|\text{أ}|} = ٦$

⟸ ص = ٦ منع (ج)

(١٨) $|\text{أ}^{-1}| = -1 \neq$ صفر

$\text{أ} = (\text{أ}^{-1})^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$\text{ب}^{-1}\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ اضرب طرفي المعادلة في أ^{-1} من اليسار

$\text{ب}^{-1}\text{أ}\,\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Leftarrow \text{ب}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

$\therefore \text{أ} + \text{ب}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$ نوع (د)

(١٩) $\begin{vmatrix} -1 & 2\text{س} & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & \text{س} & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 17 \\ 2 & \text{س} \end{vmatrix}$

$-1(-2) - 2\text{س}(8) + 2(4\text{س} + 1) = \frac{1}{2}(-2\text{س} - 34)$

$2 - 16\text{س} + 8\text{س} + 2 = -\text{س} - 17$

$\Leftarrow 2 - 16\text{س} + 8\text{س} + 2 + \text{س} + 17 = 0$

$\Leftarrow -7\text{س} + 21 = 0 \Leftarrow \frac{\cancel{-7}\text{س}}{\cancel{-7}} = \frac{-21}{-7}$

$\therefore \text{س} = 3$ نوع (أ)

(٢٠) $|-٣س \times ص^{-١}| = ٢٧$ ، $|س| = ٢$ ، $|ص| = ٦$ ، ن = ؟

(الحل) $|-٣س \times ص^{-١}| = ٢٧$

$(-٣)^{ن} \, |س| \times |ص|^{-١} = ٢٧$

$(-٣)^{ن} \times \cancel{٢}_{١} \times \dfrac{١}{\cancel{٦}_{٣}} = ٢٧$

$\Leftarrow (-٣)^{ن} = (٣)^{٤} \Leftarrow \boxed{ن = ٤}$ فرع (ب)

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

اختبارات الوحدة الخامسة دفعة 2022 مع الحلول

- اختبار درس التجزئة ومجموع ريمان.
- اختبار درسي (التكامل المحدود، العلاقة بين التفاضل والتكامل).
- اختبار درس خصائص التكامل المحدود.
- اختبار درس تطبيقات التكامل المحدود (المساحة).
- اختبار الوحدة الخامسة (التكامل المحدود وتطبيقاته).

تمنياتي لكم بالتفوق والتميز

أ. هدى أسامة فرج

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درس

التجزئة ومجموع ريمان

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس التجزئة ومجموع ريمان

دفعة 2004

① في التجزئة المنتظمة $\{ ٣ ، ٣ + \frac{٤}{ن} ، ٣ + \frac{٨}{ن} ، \ldots ، ٥ \}$

ما هي عدد الفترات الجزئية ؟!

Ⓐ ن   Ⓑ ن + ١   Ⓒ $\frac{ن}{٢}$ Ⓓ $\frac{ن}{٢} + ١$

② إذا كانت $ح$ تجزئة منتظمة للفترة [أ ، ب] والعنصر الثالث منها يساوي (٢) وكانت $ح_٢$ تجزئة منتظمة للفترة [أ ، ب] والعنصر الخامس منها يساوي (٤) فما قيمة أ ، ب

Ⓐ أ = ٤ ، ب = ٢٠   Ⓑ أ = −٤ ، ب = ٢٠

Ⓒ أ = −٤ ، ب = −٢٠   Ⓓ أ = ٤ ، ب = −٢٠

③ في التجزئة المنتظمة للفترة [−٢ ، ٨] ، إذا كان العنصر التاسع يزيد عن العنصر السابع بمقدار ١ ، فما عدد عناصر التجزئة ؟!

Ⓐ ٢٠   Ⓑ ٢١   Ⓒ ٣٠   Ⓓ ٣١

(٤) إذا كان ق(س) اقتران معرف على الفترة [١، ١١] وكانت ح_ن تجزئة منتظمة للفترة بحيث طول الفترة الجزئية = ٢ ، وكان م(ح_ن ، ق) = ١٢ ، عندما س*_ر = س_ر ، م(ح_ن ، ق) = ١٨ عندما س*_ر = س_{ر-١} ، فإن قيمة ق(١١) − ق(١) =

أ) −٣ ب) +٣ ج) ٥ د) −٥

(٥) إذا كانت ح_{١٥} تجزئة منتظمة للفترة [أ، ب] وكان $\sum_{ر=1}^{15}$ (س_ر − س_{ر-١}) = ٣٠ ، أجد طول الفترة الجزئية [أ، س_١]

أ) ٣٠ ب) ٢ ج) ١ د) $\frac{٥}{٣}$

(٦) إذا كان ح_{٢٠} تجزئة منتظمة للفترة [٢، ١٢] فإن الفترة الجزئية العاشرة في هذه التجزئة هي:

أ) [٥ ، ٦,٥] ب) [٦ ، ٦,٥] ج) [٦,٥ ، ٧] د) [٧ ، ٧,٥]

(٧) إذا كانت ح_ن = {١، ــــ، ١٠، س، ص، ع، ٢٢، ــــ، ٢٨} تجزئة منتظمة للفترة [١، ٢٨] فإن س، ص، ع على الترتيب:

أ) −١٣، ١٦، ١٩ ب) −١٣، ١٦، −١٩
ج) ١٣، −١٦، ١٩ د) ١٣، ١٦، ١٩

⑧ إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين معرفين على الفترة [٢ ، ١١]

وكان هـ(س) = ٣ق(س) + س بحيث م(σ٤ ، ق) = ٦

فإن م(σ٤ ، هـ) = (معتبراً سَر* = سر)

علماً بأن σ٤ تجزئة منتظمة للفترة [٢ ، ١١]

أ) ١٠ ب) ١٨ ج) ٢٨ د) ٢٠

⑨ إذا كانت σ٦ = {أ ، -٢ ، ـــــ ، ٨} تجزئة منتظمة للفترة

فإن قيمة أ تساوي

أ) -٦ ب) -٥ ج) -٣ د) -٤

⑩ إذا كان ق(س) = ٢س - ٤ معرفاً على [-١ ، ٢ب] وكان

م(σن ، ق) = (٤ن - ١) / ن + ٣ ، فما قيمة الثابت ب ؟

أ) -١ ب) ١ ج) ٣ د) -٣

حلول أسئلة اختبار درس
التجزئة ومجموع ريمان

(١) التجزئة {٣ ، ٣ + ٤/ن ، ٣ + ٨/ن ، ــــ ، ٥}

عدد الفترات الجزئية = طول الفترة الكلية / طول الفترة الجزئية = (ب − أ) / (س~ر~ − س~ر−١~)

= (٥ − ٣) / (٣ + ٤/ن − ٣) = ٢ / (٤/ن)

= ٢ × ن/٤ = $\boxed{\text{ن}/٢}$ فرع (ج)

(٢) س~ر~ = أ + (ب − أ)/ن × ر

العنصر الثالث س~٢~ = أ + (ب − أ)/~~٨~~ ٤ × ~~٢~~ ١ = ٢

= أ + (ب − أ)/٤ = ٢ ⟸ (٤أ + ب − أ)/٤ = ٢

⟸ ٤أ − أ + ب = ٨ ⟸ ٣أ + ب = ٨ ⟵ (*)

العنصر الخامس س~٤~ = أ + (ب − أ)/~~١٢~~ ٣ × ~~٤~~ ١ = ٤

= أ + (ب − أ)/٣ = ٤ ⟸ ٣أ + ب − أ = ١٢

⟸ ٢أ + ب = ١٢ ⟵ (**)

بحل معادلة (*) و (**)

−٣أ − ~~ب~~ = −٨

٢أ + ~~ب~~ = ١٢

⟸ −أ = ٤ ⟸ أ = (−٤) ⟸ ب = (٢٠)

4

(٣) العنصر الثامن = س٨ ، العنصر السابع = س٧

س٨ − س٧ = ١

س٨ = −٢ + (٨+٢)/ن × ٨

س٧ = −٢ + (٨+٢)/ن × ٧

س٨ − س٧ = −٢ + (٨+٢)/ن × ٨ − (−٢ + (٨+٢)/ن × ٧) = ١

= ~~−٢~~ + ٨٠/ن ~~+ ٢~~ − ٧٠/ن = ٨٠/ن − ٧٠/ن = ١

⇐ ٢٠/ن = ١ ⇐ ن = ٢٠

∴ عدد عناصر التجزئة = ن + ١ = ٢٠ + ١ = ٢١ فرع (ب)

(٤) ل = (ب − أ)/ن ⇐ ٢ = ١٠/ن ⇐ ن = ٥

ط٥ = {٠، ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠}

م(ط٥ ، هـ) = ٢ $\sum_{ر=١}^{٥}$ هـ(سر) = ١٢ ⟵ (*)

م(ط٥ ، هـ) = ٢ $\sum_{ر=١}^{٥}$ هـ(سر−١) = ١٨ ⟵ (**)

بطرح المعادلتين ينتج

٢ $\sum_{ر=١}^{٥}$ هـ(سر) − ٢ $\sum_{ر=١}^{٥}$ هـ(سر−١) = ١٢ − ١٨ = −٦

⇐ ٢ [$\sum_{ر=١}^{٥}$ هـ(سر) − $\sum_{ر=١}^{٥}$ هـ(سر−١)] = −٦

$\Leftarrow \left[\sum_{ر=1}^{٥} \text{ق}(\text{س}_{ر}) - \sum_{ر=1}^{٥} \text{ق}(\text{س}_{ر-1}) \right] = -٣$

$\Leftarrow \sum_{ر=1}^{٥} \underbrace{\left[\text{ق}(\text{س}_{ر}) - \text{ق}(\text{س}_{ر-1}) \right]} = -٣$

مجموع أطوال الفترات الجزئية = طول الفترة الكلية

= ب − أ

$\Leftarrow \sum_{ر=1}^{٥} \text{ق}(\text{س}_{ر} - \text{س}_{ر-1}) = -٣$

$\Leftarrow \text{ق}(١١) - \text{ق}(١) = -٣$ فرع (أ)

(٥) $\sum_{ر=1}^{١٥} (\text{س}_{ر} - \text{س}_{ر-1}) = ٣٠$

$١٥ \times \Delta\text{س} = ٣٠ \Leftarrow \Delta\text{س} = ٢$ فرع (ب)

(٦)

الفترة الجزئية العاشرة $[\text{س}_{٩} ، \text{س}_{١٠}]$

$\text{س}_{ر} = \text{أ} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \times ر$

$\text{س}_{٩} = ٢ + \frac{١٠}{٢٠} \times ٩ = ٦{,}٥$

$\text{س}_{١٠} = ٢ + \frac{١٠}{٢٠} \times ١٠ = ٧$

∴ الفترة الجزئية العاشرة $[٦{,}٥ ، ٧]$ فرع (جـ)

(٧) $ك_ن$ = {١ ، ---- ، ١٠ ، س ، ص ، ع ، ٢٢ ، ---- ، ٢٨}

عدد الفترات الجزئية بين [١٠ ، ٢٢] هو ل = $\frac{٢٢-١٠}{٤}$ = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣

عدد الفترات الجزئية في [١ ، ٢٨] هو ل = $\frac{٢٨-١}{ن}$

⇐ ٣ = $\frac{٢٧}{ن}$ ⇐ $\boxed{ن = ٩}$

∴ $ك_٩$ = {١ ، ---- ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ٢٢ ، ---- ، ٢٨}

س = ١٣ ، ص = ١٦ ، ع = ١٩ فرع (د)

(٨) طول الفترة الجزئية = $\frac{١٠-٢}{٤}$ = (٢)

$ك_٤$ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠}

م($ك_٤$ ، ق) = ٦ ⇐ ٢ $\sum_{ر=١}^{٤}$ ق($ح_ر$) = ٦ ⇐ $\sum_{ر=١}^{٤}$ ق($ح_ر$) = ٣

م($ك_٤$ ، هـ) = ٢ $\sum_{ر=١}^{٤}$ هـ($ح_ر$) = ٢ $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٣ق($ح_ر$) + $ح_ر$)

= ٢ [٣ $\sum_{ر=١}^{٤}$ ق($ح_ر$) + $\sum_{ر=١}^{٤}$ $ح_ر$] = ٢ × [٣ × ٣ + (٤ + ٦ + ٨ + ١٠)]

= (٧٤) فرع (أ)

(٩) حن = {أ ، -٢ ، ـــــ ، ٨}

$\frac{٨ - أ}{٦}$ = -٢ - أ

٨ - أ = -١٢ - ٦أ ⟸ ٥أ = -٢٠ ⟸ أ = -٤

(١٠) يؤجل للدرس القادم

(الحل) $\int_{-١}^{٢ب}$ (٢س - ٤) ءس = نها$_{ن \leftarrow \infty}$ م (حن ، ن)

⟸ $\int_{-١}^{٢ب}$ (٢س - ٤) ءس = نها$_{ن \leftarrow \infty}$ $\frac{٤ن - ١}{ن}$ + $\frac{٣}{١}$

⟸ $\int_{-١}^{٢ب}$ (٢س - ٤) ءس = نها$_{ن \leftarrow \infty}$ $\frac{٤ن - ١ + ٣ن}{ن}$

= نها$_{ن \leftarrow \infty}$ $\frac{٧ن - ١}{ن}$ = نها$_{ن \leftarrow \infty}$ $\frac{\cancel{ن}(٧ - \frac{١}{ن})}{\cancel{ن}}$ = ٧

∵ $\int_{-١}^{٢ب}$ (٢س - ٤) ءس = ٧ ⟸ $\left[\frac{\cancel{٢}س^٢}{\cancel{٢}} - ٤س\right]_{-١}^{٢ب}$ = ٧

⟸ ٤ب² - ٨ب - (١+٤) = ٧

⟸ ٤ب² - ٨ب - ١٢ = ٠ ⟸ ب² - ٢ب - ٣ = ٠

⟸ (ب - ٣)(ب + ١) = ٠

⟸ ب = ٣ ، ب = -١ مرفوضة

∴ $\boxed{ب = ٣}$

فرع (٢)

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درسي

(التكامل المحدود، العلاقة بين التفاضل والتكامل)

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار ذاتي (التكامل المحدود، العلاقة بين التفاضل والتكامل) دفعة 2004

① إذا كان ق(س) = $\int_{س}^{٢} (٣ص - ٢)\, دص + \int_{٠}^{أ} ٣ص^{٢}\, دص$ ، ق(٢) = ٨

فإن قيمة الثابت أ =

أ) ٢ ب) -٢ جـ) $\frac{٨}{٣}$ د) ٨

② إذا كان $\int_{س}^{١}$ ق(ص) دص = $س^{٢}$ + جـ س + ١ ، ق(س) متصل في

[٠، ١] فإن قيمة جـ =

أ) ٢ ب) -٢ جـ) صفر د) -١

③ إذا كان ق اقتران متصل لجميع قيم س، وكان $\int_{٠}^{س}$ ق(ص) دص

= س - جتاس + ٢ ، فإن قيمة قَ(π) =

أ) ١ ب) -١ جـ) صفر د) π

④ إذا كان ت(س) = $\begin{cases} ٢هـ^{س} + س + جـ ، & ٠ \leq س \leq ١ \\ لوهـ س + أس^{٢} + ب ، & ١ < س < ٣ \end{cases}$

هو الاقتران المكامل للاقتران المتصل ق(س) فإن الثوابت

أ، ب، جـ على الترتيب =

(أ) هـ ، هـ-١ ، -٢ (ب) -هـ ، هـ ، ٢

(جـ) هـ ، هـ+٢ ، ٢ (د) هـ ، هـ+٢ ، هـ-١

(ب) $\int_{1}^{هـ}$ د(س) دس =

(أ) هـ^{2} - هـ + ١ (ب) هـ^{3} - هـ + ١

(جـ) هـ^{3} + هـ (د) هـ^{2} + ١

(٥) إذا كان د(س) = $\frac{1}{س}$ $\int_{3}^{س}$ (٢ص - ٣ دَ(ص)) دص فإن دَ(٣) =

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) $\frac{1}{2}$

(٦) إذا كان د(س) معرفاً على [٠ ، ٢] وكانت ك ن تجزئة منتظمة لها بحيث م(ك ن ، د) = $\frac{٣ن - ١}{١ - ٢ن}$ - $\frac{1}{2}$ فإن قيمة

$\int_{0}^{2}$ (٢ د(س) - ١) دس =

(أ) -٤ (ب) -٥ (جـ) -٦ (د) -٧

(٧) إذا كان أ < ب وكان أ − ب = −٦

وكان $\int_{أ}^{ب} \frac{س}{|س|} \, دس = ٢$ فإن قيمة أ ، ب على الترتيب

(أ) −٢ ، ٥ (ب) ٢ ، ٤ (ج) −١٢ ، ٤ (د) −٢ ، ٤

(٨) قيمة $\int_{١}^{هـ} \frac{دس}{٢س + س \, لو_{هـ} س} =$

(أ) ١ (ب) $لو_{هـ} \frac{٤}{٣}$ (ج) $لو_{هـ} \frac{٣}{٢}$ (د) صفر

(٩) إذا علمت أن $\int_{-١}^{٤} د(س) \, دس = ٩$ وكان

$م(ن، ن) = \frac{(ن+١)(١-٢أن)}{ن^{٢}}$ حيث كان تجزئة نونية منتظمة

للفترة [−١، ٤] فإن قيمة الثابت أ =

(أ) $-\frac{٩}{٢}$ (ب) $\frac{٩}{٢}$ (ج) صفر (د) ٩

(١٠) إذا كان د(س) قابل للتكامل على [١، ٥] بحيث $\int_{١}^{٥} د(س) \, دس$

= ٢ ، وكان $م(ن، د) = \frac{أن^{٢}+١}{١-٣ن} + ن + ب$

فإن قيمة أ ، ب على الترتيب:

(أ) ٣ ، $\frac{٧}{٣}$ (ب) −٣ ، $\frac{٧}{٣}$ (ج) ٣ ، $\frac{٣}{٧}$ (د) −٣ ، $\frac{٣}{٧}$

حلول أسئلة اختبار درس

(التكامل المحدود، العلاقة بين التفاضل والتكامل)

دفعة 2004

① $ق(٢) = \int_{٢}^{٢} (٣ص - ٢)\, دص + \int_{٠}^{أ} ٣ص^{٢}\, دص = ٨$

$\Leftarrow$ صفر $+ \left[\frac{٣ص^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{أ} = ٨$

$\Leftarrow أ^{٣} - ٠ = ٨ \Leftarrow أ = ٢$ فرع (أ)

② $ت(س) = \int_{١}^{س} ق(ص)\, دص = -(س^{٢} + ب س + ١)$

بـ ت(١) = صفر

$\Leftarrow ت(١) = \frac{١}{-١}(١ + ب + ١) = \frac{\text{صفر}}{-١} \Leftarrow ٢ + ب =$ صفر

$\Leftarrow ب = -٢$ فرع (ب)

③ $ت(س) = س - جتا س + ٢$

$ق(س) = تَ(س) = ١ + جا س$

$قَ(س) = تً(س) = جتا س$

$قً(س) = -جا س \Leftarrow قً(\pi) = -جا \pi =$ صفر

فرع (ج)

٤ (أ)

ق(١) = صفر ⟸ ق(١) = ٢هـ^{٠} + ٠ + جـ ⟸ ٢ + جـ = ٠

⟸ جـ = (-٢) ✓

∵ ق(س) اقتران متصل على مجاله ⟸ ق(س) متصل عند س = ١

∴ ق(١) = نهـا ق(س) = نهـا ق(س)
س ← ١$^{-}$ ، س ← ١$^{+}$

⟸ ٢هـ + ١ - ٢ = لو$_{هـ}$ ١ + أ × ١ + ب ⟸ ٢هـ - ١ = أ + ب ← (*)

لكن ق(س) = قَ(س) = { ٢هـ^{س} + ١ ، ٠ < س < ١
$\frac{١}{س}$ + ٢أس ، ١ < س < ٣
غ.م ، س = ٠ ، ٣

∵ ق(س) اقتران متصل على مجاله ⟸ قَ(١)$^{+}$ = قَ(١)$^{-}$

⟸ ١ + ٢أ = ٢هـ + ١ ⟸ ٢أ = ٢هـ ⟸ $\boxed{\text{أ = هـ}}$ (**)

من (*) و (**) ٢هـ - ١ = هـ + ب ⟸ $\boxed{\text{ب = هـ - ١}}$ ✓

∴ ق(س) = { ٢هـ^{س} + س - ٢ ، ٠ ≤ س ≤ ١
لو$_{هـ}$ س + هـ س^{٢} + (هـ - ١) ، ١ < س ≤ ٣

(ب) ∫$_{١}^{هـ}$ قَ(س) ءس = ق(هـ) - ق(١)

⟸ لو$_{هـ}$ هـ + هـ × هـ^{٢} + (هـ - ١) - (٢هـ + ١ - ٢)

$\Leftarrow 1 + هـ^3 + هـ - 1 - 2هـ - 1 + 2$

$= هـ^3 - هـ + 1$ فرع (ب)

(5) $د(س) = \frac{1}{س} \int_{3}^{س} \left(2ص - 3\,دَ(ص)\right) دص$

اشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س (وفق قاعدة الضرب)

$دَ(س) = \frac{1}{س} \times \left(2س - 3\,دَ(س)\right) + \int_{3}^{س} \left(2ص - 3\,دَ(ص)\right) دص \times \frac{-1}{س^2}$

$\therefore دَ(3) = \frac{1}{3} \times \left(2\times 3 - 3\,دَ(3)\right) + \underbrace{\int_{3}^{3} \left(2ص - 3\,دَ(ص)\right) دص}_{صفر} \times \frac{-1}{س^2}$

$\Leftarrow دَ(3) = \frac{1}{3} \times \left(6 - 3\,دَ(3)\right) +$ صفر

$دَ(3) = 2 - دَ(3) \Leftarrow دَ(3) = 1$ فرع (جـ)

(6) $\int_{0}^{2} \left(2د(س) - 1\right) دس = \int_{0}^{2} 2د(س)\, دس - \int_{0}^{2} 1\, دس$

$= 2 \times -2 - س\Big|_{0}^{2}$

$= -4 - 2 = -6$

في الخلف

$\int_{\cdot}^{٢} ح(س)\, ءس = \underset{ن \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٣ن - ١}{١ - ٢ن} - \dfrac{١}{٢}$ (توحيد المقامات ١)

$= \underset{ن \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٦ن - ٢ - ١ + ٢ن}{٢ - ٤ن}$

$= \underset{ن \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٨ن - ٣}{٢ - ٤ن} = \dfrac{٨}{-٤} = -٢$

(٧) $|س| = \begin{cases} س \text{ ، } س \geq ٠ \\ -س \text{ ، } س < ٠ \end{cases}$

$\int_{أ}^{ب} \dfrac{س}{|س|}\, ءس = \int_{أ}^{٠} \dfrac{س}{-س}\, ءس + \int_{٠}^{ب} \dfrac{س}{س}\, ءس$

$= \int_{أ}^{٠} -١\, ءس + \int_{٠}^{ب} ١\, ءس$

$= -(٠ - أ) + (ب - \text{صفر}) \Leftarrow أ + ب = ٢ \leftarrow (١)$

لكن $أ - ب = -٦ \leftarrow (٢)$

بحل (١) ، (٢) ينتج أن $أ = -٢$ ، $ب = ٤$ فرع (د)

(٨) $$\int_{1}^{\text{هـ}} \frac{\text{دس}}{\text{٢س} + \text{س لوهـ س}} = \int_{1}^{\text{هـ}} \frac{\text{دس}}{\text{س}(\text{٢} + \text{لوهـ س})}$$

افرض ص = ٢ + لوهـ س

$$\text{دص} = \frac{1}{\text{س}} \text{ دس}$$

عندما س = ١ ⟸ ص = ٢

عندما س = هـ ⟸ ص = ٣

$$\therefore \int_{1}^{\text{هـ}} \frac{\text{دس}}{\text{س}(\text{٢} + \text{لوهـ س})} = \int_{2}^{3} \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \text{لوهـ ص} \Big|_{2}^{3}$$

$$= \text{لوهـ ٣} - \text{لوهـ ٢} = \text{لوهـ} \frac{3}{2}$$ فرع (ج)

(٩) $$\int_{-1}^{4} \text{ق(س) دس} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{(\text{ن}+1)(1-\text{٢أن})}{\text{ن}^2}$$

$$9 = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{ن} - \text{٢أن}^2 + 1 - \text{٢أن}}{\text{ن}^2} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \left[\cancel{\frac{\text{ن}}{\text{ن}^2}} - \text{٢أ} + \cancel{\frac{1}{\text{ن}^2}} - \cancel{\frac{\text{٢أ}}{\text{ن}}} \right]$$

$$9 = -\text{٢أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{9}{-2}$$

(١٠) أ) $\int_{١}^{ن} \text{ق}(\text{ر})\,\text{ءر} = ٢ \Leftarrow \lim\limits_{ن \to \infty} \text{م}(\text{ح}_ن ، \text{ق}_ن) = ٢$

$\therefore \lim\limits_{ن \to \infty} \frac{\text{أ}ن^٢ + ١}{١ - ٣ن} + \frac{ن}{١} + \frac{\text{ب}}{١} = ٢$

$\Leftarrow \lim\limits_{ن \to \infty} \frac{\text{أ}ن^٢ + ١ + ن(١ - ٣ن) + \text{ب}(١ - ٣ن)}{١ - ٣ن} = ٢$

$\Leftarrow \lim\limits_{ن \to \infty} \frac{\text{أ}ن^٢ + ١ + ن - ٣ن^٢ + \text{ب} - ٣\text{ب}ن}{١ - ٣ن} = ٢$

$\therefore \lim\limits_{ن \to \infty} \frac{(\text{أ} - ٣)ن^٢ + (١ - ٣\text{ب})ن + (١ + \text{ب})}{١ - ٣ن} = ٢$

∵ النهاية موجودة ∴ درجة البسط = درجة المقام

$\Leftarrow \text{أ} - ٣ = ٠ \Leftarrow \text{أ} = ٣$ ✓

كذلك $\frac{١ - ٣\text{ب}}{-٣} = ٢ \Leftarrow ١ - ٣\text{ب} = -٦$

$\Leftarrow -٣\text{ب} = -٧$

$\Leftarrow \text{ب} = \frac{٧}{٣}$

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درس

(خصائص التكامل المحدود)

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس خصائص التكامل المحدود

دفعة 2024

① إذا كان $\int_{1}^{أ} |٢س - ٢| \, دس = ٥$ ، جد قيمة/قيم أ حيث أ > ١

(أ) ٣ ، -١   (ب) -٣ ، ١   (ج) ٢ ، -٣   (د) -٢ ، -٣

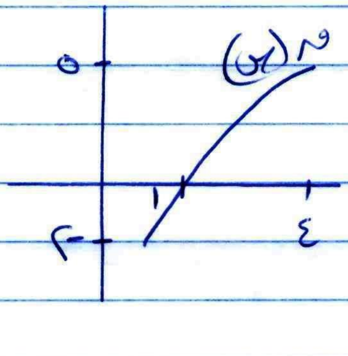
② جد $\int_{-1}^{2} \left(|س| + \left[\frac{س}{٢} \right] \right) دس$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $-\frac{٣}{٢}$ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

③ ما أكبر قيمة للتكامل $\int_{1}^{3} (٢ق(س) + ٣) \, دس$ إذا كان
٢ ≤ ق(س) ≤ ٥ ∀ س ∈ [١ ، ٣]

(أ) -١٤   (ب) ١٤   (ج) -٢٦   (د) ٢٦

④ في الشكل المجاور والذي يمثل
منحنى ق(س) المعرف على [١ ، ٤]
أكبر قيمة للمقدار $\int_{1}^{4} (٢ - ٣ق(س)) \, دس$



(أ) ٢٤   (ب) -٢٤   (ج) -٣٩   (د) ٣٩

⑤ دون إجراء التكامل، أصغر قيمة للمقدار $\int_{-4}^{1} \frac{1}{\sqrt{س^2+9}}\, دس$

أ) 1 ب) $\frac{3}{5}$ جـ) $\frac{5}{3}$ د) -1

⑥ دون إجراء التكامل، أصغر قيمة وأكبر قيمة للمقدار التالي بالترتيب

$\int_{0}^{2\pi} \sqrt{1+3جا^2 س}\, دس$

أ) π ، 2π ب) 4π ، 8π

جـ) 2π ، 4π د) 0 ، 2π

⑦ إذا كان $\int_{1}^{5} 2ق(س)\, دس = -8$ ، $\int_{1}^{3} (ق(س)-2)\, دس = 1$

جد $\int_{-3}^{-5} ق(-س)\, دس =$

أ) 9 ب) -9 جـ) -7 د) 7

⑧ إذا كان $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (جاس + هـ^س)\, دس = أ$ ، $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (جتاس)\, دس = ب$

فما قيمة أ + ب = ؟

أ) $هـ^{\pi} - 1$ ب) $هـ^{\pi} + 1$ جـ) $هـ^{\frac{\pi}{2}} + 1$ د) $هـ^{\frac{\pi}{2}} - 1$

⑨ قيمة $\int_{٠}^{٣} \left[٣س^{٢} - \int_{٢}^{٢} هـ^{س} \, د س \right] د س =$

(أ) $هـ^{٣}$ (ب) $-هـ^{٣}$ (ج) ٢٧ (د) ٢٤

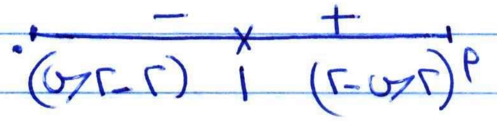
⑩ إذا كان $\int_{أ}^{١} ٣س|س| \, د س = -٧$ ، جد أ بحيث أ ∈ ح.

(أ) −٨ (ب) −٢ (ج) −٩ (د) −٣

حلول أسئلة اختبار درس
(خصائص التكامل المحدود) دفعة 2004

(١)

$٢س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ١$



$$\int_{٠}^{١} (٢ - ٢س)\, ءس + \int_{١}^{a} (٢س - ٢)\, ءس = ٥$$

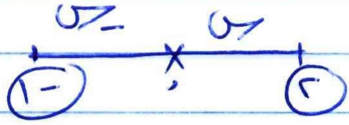
$$\left[٢س - س^٢\right]_{٠}^{١} + \left[س^٢ - ٢س\right]_{١}^{a} = ٥$$

$$(٢ - ١) + a^٢ - ٢a - (-١) = ٥ \Leftarrow a^٢ - ٢a - ٣ = ٠$$

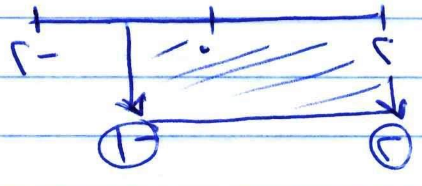
$$\Leftarrow (a - ٣)(a + ١) = ٠$$

$$\Leftarrow a = ٣ \text{ ، } a = -١$$ فرع (أ)

(٢) $|س| = \begin{cases} س & ، س \geq ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$



$[\frac{س}{٢}]$



$$\therefore \int_{-١}^{٠} (-س - ١)\, ءس + \int_{٠}^{٢} (س + ٠)\, ءس$$

$$= ٠ - (-\frac{١}{٢} + ١) + ٢ = \frac{١}{٢} - ١ + ٢ = ١ + \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$$ فرع (ج)

③ $٢ \leq \text{د}(\text{س}) \leq ٥$ $(\times ٢)$

$٤ \leq ٢\text{د}(\text{س}) \leq ١٠$ $(+٣)$

$٧ \leq ٢\text{د}(\text{س}) + ٣ \leq ١٣$ نكامل الأطراف

$\int_{١}^{٣} ٧ \leq \int_{١}^{٣} (٢\text{د}(\text{س}) + ٣)\,\text{دس} \leq \int_{١}^{٣} ١٣\,\text{دس}$

$٧(٣-١) \leq \int_{١}^{٣} (٢\text{د}(\text{س}) + ٣)\,\text{دس} \leq ١٣(٣-١)$

$١٤ \leq \int_{١}^{٣} (٢\text{د}(\text{س}) + ٣)\,\text{دس} \leq ٢٦$

∴ أكبر قيمة = ٢٦ فرع (د)

④ من الرسم $-٢ \leq \text{د}(\text{س}) \leq ٥$ $(\times -٣)$

$٦ \geq -٣\text{د}(\text{س}) \geq -١٥$ $(+٢)$

$٨ \geq ٢ - ٣\text{د}(\text{س}) \geq -١٣$ نكامل الأطراف

$\int_{١}^{٤} ٨\,\text{دس} \geq \int_{١}^{٤} (٢ - ٣\text{د}(\text{س}))\,\text{دس} \geq \int_{١}^{٤} -١٣\,\text{دس}$

$٢٤ \geq \int_{١}^{٤} (٢ - ٣\text{د}(\text{س}))\,\text{دس} \geq -٣٩$

∴ $-٣٩ \leq \int_{١}^{٤} (٢ - ٣\text{د}(\text{س}))\,\text{دس} \leq ٢٤$ ← أكبر قيمة

أصغر قيمة

فرع (أ)

٥) $س \in [-٢ ، ١]$

$\Leftarrow -٢ \le س \le ١ \Leftarrow ٠ \le س^{٤} \le ١٦$ $(+٩)$

$\Leftarrow ٩ \le س^{٤} + ٩ \le ٢٥$ $(\sqrt{})$

$\Leftarrow ٣ \le \sqrt{س^{٤}+٩} \le ٥$

$\Leftarrow \frac{١}{٣} \ge \frac{١}{\sqrt{س^{٤}+٩}} \ge \frac{١}{٥}$ تكامل

$\int_{-٢}^{١} \frac{١}{٥} \, دس \le \int_{-٢}^{١} \frac{١}{\sqrt{س^{٤}+٩}} \, دس \le \int_{-٢}^{١} \frac{١}{٣} \, دس$

$\Leftarrow \frac{٣}{٥} \le \int_{-٢}^{١} \frac{١}{\sqrt{س^{٤}+٩}} \, دس \le ١$

$\therefore$ أصغر قيمة للتكامل $= \frac{٣}{٥}$ فرع (ب)

٦) $٠ \le س \le ٢\pi$ وكذلك $٢\pi \le س \le ٤\pi$

$\Leftarrow -١ \le جتا\,س \le ١$ $\Leftarrow -١ \le جتا\,س \le ١$

$\therefore ٠ \le جتا^{٢}س \le ١ \Leftarrow ٠ \le ٣جتا^{٢}س \le ٣$

$\Leftarrow ١ \le ١ + ٣جتا^{٢}س \le ٤$

$\Leftarrow ١ \le \sqrt{١ + ٣جتا^{٢}س} \le ٢$

$\therefore \int_{٠}^{٢\pi} ١ \, دس \le \int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{١+٣جتا^{٢}س} \, دس \le \int_{٠}^{٢\pi} ٢ \, دس$

$\Leftarrow ٢\pi \le \int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{١+٣جتا^{٢}س} \, دس \le ٤\pi$ فرع (ج)

(7) $\int_{1}^{5} 2\,ق(س)\,دس = -8 \Leftarrow \int_{1}^{5} ق(س)\,دس = -4 \leftarrow (*)$

$\int_{1}^{3} \left(ق(س) - 2\right) دس = 1 \Leftarrow \int_{1}^{3} ق(س)\,دس - 2(3-1) = 1$

$\Leftarrow \int_{1}^{3} ق(س)\,دس - 4 = 1$

$\Leftarrow \int_{1}^{3} ق(س)\,دس = 5 \leftarrow (**)$

$\int_{-3}^{-5} ق(-س)\,دس$ افرض $ص = -س$

$دص = -دس$

عندما $س = -3 \Leftarrow ص = 3$

عندما $س = -5 \Leftarrow ص = 5$

$\therefore \int_{-3}^{-5} ق(-س)\,دس = -\int_{3}^{5} ق(ص)\,دص$

$= -\left[\int_{3}^{1} ق(ص)\,دص + \int_{1}^{5} ق(ص)\,دص\right]$

$= -\left[\int_{3}^{1} ق(س)\,دس + \int_{1}^{5} ق(س)\,دس\right]$

$= -\left[-5 - 4\right] = -(-9) = 9$ فرع (م)

(٨) $\text{أ} + \text{ب} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}})\, \text{دس} + \int_{\frac{\pi}{٢}}^{٠} \text{جتا}^{٢}\text{س}\, \text{دس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}})\, \text{دس} - \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتا}^{٢}\text{س}\, \text{دس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} -\text{جتا}\,٢\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس} = \left[\frac{-\text{جا}\,٢\text{س}}{٢} + \text{هـ}^{\text{س}} \right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= \cancel{\frac{-\text{جا}(\pi)}{٢}} + \text{هـ}^{\frac{\pi}{٢}} - \left(\cancel{\frac{-\text{جا}\,٠}{٢}} + \text{هـ}^{٠} \right) = \text{هـ}^{\frac{\pi}{٢}} - \text{هـ}^{٠}$

$= \text{هـ}^{\frac{\pi}{٢}} - ١$ فرع (د)

(٩) $\int_{٠}^{٣} \left(٣\text{س}^{٢} - \int_{٢}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس} \right) \text{دس}$

$= \frac{٣\text{س}^{٣}}{٣} - \text{صفر} = ٢٧ - ٠ = ٢٧$ فرع (ج)

أ < ٠

(١٠) $|\text{س}| = \begin{cases} \text{س}، & \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س}، & \text{س} < ٠ \end{cases}$

$\text{أ} \quad ٠ \quad ١$ ؛ $-$ بين أ و ٠، $+$ بين ٠ و ١

$\int_{\text{أ}}^{١} ٣\text{س}\,|\text{س}|\, \text{دس} = \int_{\text{أ}}^{٠} (٣\text{س} \times -\text{س})\, \text{دس} + \int_{٠}^{١} (٣\text{س} \times \text{س})\, \text{دس} = -٧$

$\int_{\text{أ}}^{٠} -٣\text{س}^{٢}\, \text{دس} + \int_{٠}^{١} ٣\text{س}^{٢}\, \text{دس} = -٧ \Leftarrow -\text{س}^{٣} \Big|_{\text{أ}}^{٠} + \text{س}^{٣} \Big|_{٠}^{١} = ٧$

$\Leftarrow \text{أ}^{٣} + ١ = -٧$

$\therefore \text{أ} = -٢$ فرع (ب)

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درس

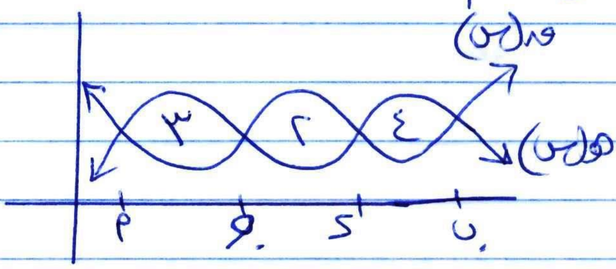
تطبيقات التكامل المحدود (المساحة)

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس تطبيقات التكامل المحدود
(المساحات)
دفعة 2004

① إذا كان ق، هـ اقترانين متصلين في [أ، ب] وكانت مساحات المناطق بين الاقترانين كما هو موضح في الشكل التالي فإن

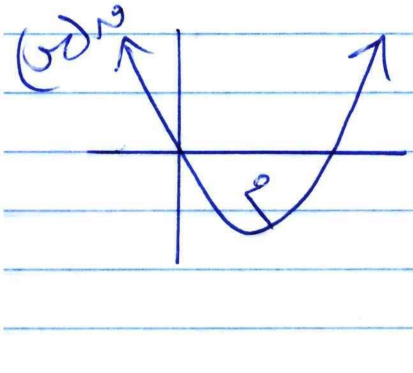


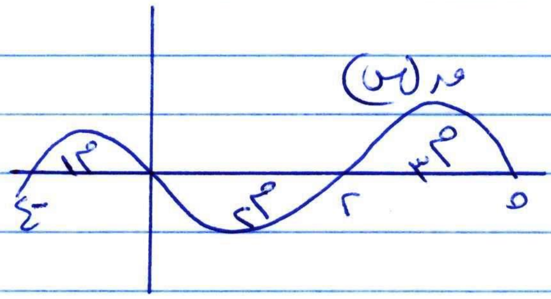
$\int_{ج}^{ب} \left(ق(س) - هـ(س)\right) د س$

أ) ٢ ب) -٢ ج) ٥ د) -٥

② في الشكل المجاور إذا كانت المساحة (م) المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات (٨) وحدات مربعة فإن $\int_{٠}^{٥} \left(١ - ق(س)\right) د س$

أ) ١٣ ب) -١٣ ج) ٣ د) -٣





٣) بالاعتماد على الشكل المجاور

والذي يمثل منحنى الاقتران ق(س)

إذا كانت م$_١$ = ٧ وحدات مربعة ، م$_٢$ = ٤

وحدات مربعة ، م$_٣$ = ٥ وحدات مربعة (أ)

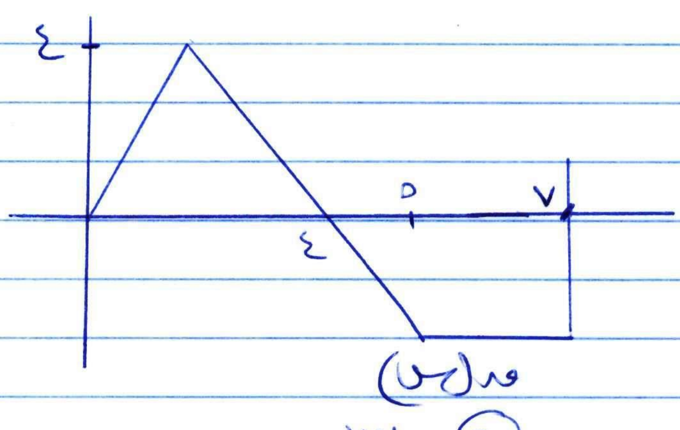
فإن $\int_{٢}^{٤} \frac{ق(س)}{٢}$ دس =

أ) ٣ ب) -٣ ج) $\frac{-٣}{٢}$ د) $\frac{٣}{٢}$

ب) المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات

في الفترة [-٤ ، ٥]

أ) ١٢ ب) -١٢ ج) ١٦ د) -١٦

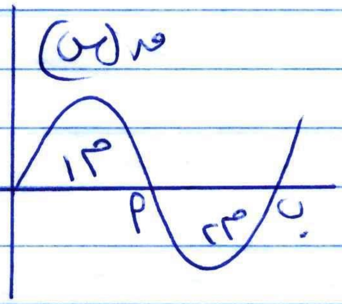


٤) معتمداً على الشكل المجاور

والذي يمثل منحنى ق(س)

فإن قيمة $\int^{٧}$ |ق(س)| دس =

أ) ١٥ ب) -١٥ ج) ١٣ د) -١٣



٥) الشكل المجاور يمثل المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات، إذا علمت أن $م_1 + م_2 = ٦$ وحدات مربعة

وكان $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس = -٤ ، فما قيمة $\int^{ب}$ ق(س) دس

أ) ٢ ب) ٦ ج) -٢ د) ١٠

٦) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات التالية:

ق(س) = $-س^3$ ، ل(س) = ٦ - س ، هـ(س) = $\frac{1}{2}$ س

أ) ١٢ وحدة مربعة ب) ١٠ وحدة مربعة

ج) ٢٤ وحدة مربعة د) ٢٢ وحدة مربعة

٧) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س + ٦ ، & س \le -١ \\ ٣س^2 + ١ ، & س > -١ \end{cases}$

فإن المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات والمستقيم

س = ١ هي:

أ) ٨ وحدات مربعة ب) ٤ وحدات مربعة

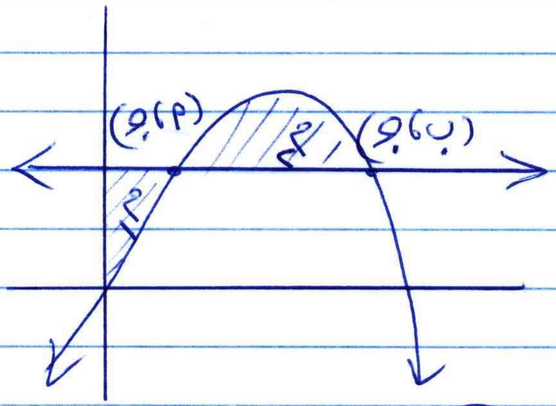
ج) ٩ وحدات مربعة د) ٢ وحدة مربعة

٨) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{1}{4}$س² والعمودي المرسوم له عند النقطة (٤،٤) ومحور السينات

أ) $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة   ب) $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة

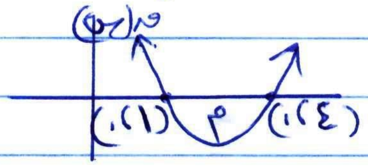
ج) $\frac{5}{12}$ وحدة مربعة   د) $\frac{7}{12}$ وحدة مربعة

٩) رسم المستقيم ص = ج ، فقطع منحنى ق(س) = ٢س - ٣س² في النقطتين (أ، ج) ، (ب، ج) ، حيث أ، ب، ج أعداد موجبة مكوناً المنطقتين م١، م٢ كما في الشكل المجاور ، جد قيمة ج التي تجعل مساحة المنطقتين متساويتين



أ) ٢   ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{1}{4}$

١٠) في الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [١، ٤] ، وإذا كانت مساحة المنطقة م تساوي (٥) وحدات مربعة



جد قيمة $\int_{-1}^{2}$ (٣ - ق(س+٢)) ءس

أ) ٢٤   ب) ١٤   ج) ٦   د) ٤

اختبار درس تطبيقات التكامل المحدود

حلول الأسئلة

(١) $\int_{أ}^{ب} \left(د(س) - هـ(س)\right) دس = \int_{أ}^{د} \left(د(س) - هـ(س)\right) دس$

$+ \int_{د}^{ب} \left(هـ(س) - د(س)\right) دس$

$= ٢ - ٤ = -٢$ ∴ فرع ب

(٢) $\int_{٠}^{٥} ١ \, دس - \int_{٠}^{٥} د(س) \, دس$

$= ١(٥ - ٠) - (-٨) = ٥ + ٨ = ١٣$ ∴ فرع أ

(٣) فرع أ

$\int_{-٤}^{٠} د(س) \, دس = ٧$ ، $\int_{٠}^{٢} د(س) \, دس = -٤$

$\int_{-٤}^{٢} د(س) \, دس = ٧ - ٤ = ٣$

∴ $\int_{٢}^{-٤} \frac{د(س)}{٢} \, دس = \frac{١}{٢} \int_{٢}^{-٤} د(س) \, دس$

$= \frac{١}{٢} \times (-٣) = -\frac{٣}{٢}$ ∴ فرع ج

فرع (ب)

م = م$_١$ + م$_٢$ + م$_٣$ = ٧ + ٤ + ٥ = (١٦) فرع (جـ)

(٤) مساحة الشكل = مساحة المثلث + مساحة شبه المنحرف

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ + $\frac{١}{٢}$ (٣ + ٢) × ٢

= ٨ + ٥ = (١٣)

∴ $\int$ |د(س)| ءس = (١٣) فرع (جـ)

(٥) م$_١$ + م$_٢$ = ٦ وحدات مربعة

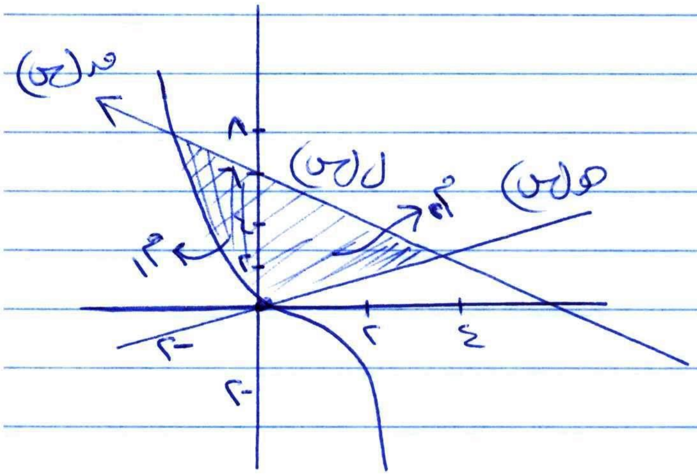
وكان $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس = −٤ ⟸ م$_٢$ = | $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس | = ٤ وحدات مربعة

∴ م$_١$ = ٦ − ٤ = (٢) وحدات مربعة.

$\int_{ب}^{جـ}$ د(س) ءس = $\int_{ب}^{أ}$ د(س) ءس + $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس = ٢ + −٤ = (−٢)

فرع (د)

(٦) (الحل)



أولاً/ نوجد نقاط التقاطع بين منحنى د(س) ، هـ(س)

$-س^3 = \frac{1}{2}س \Leftarrow 2س^3 + س = 0$

$\Leftarrow س(2س^2 + 1) = 0 \Leftarrow س = 0$

* نوجد نقاط التقاطع بين المنحنى د(س) ، ل(س)

$-س^3 = 6 - س \Leftarrow س^3 - س + 6 = 0 \Leftarrow (س+2)(س^2 - 2س + 3) = 0$

$\Leftarrow س = -2$

* نوجد نقاط تقاطع المنحنى ل(س) ، هـ(س)

$\frac{1}{2}س = 6 - س \Leftarrow \frac{1}{2}س + س - 6 = 0 \Leftarrow \frac{3}{2}س = 6$

$\Leftarrow س = 4$

$م = م_1 + م_2$

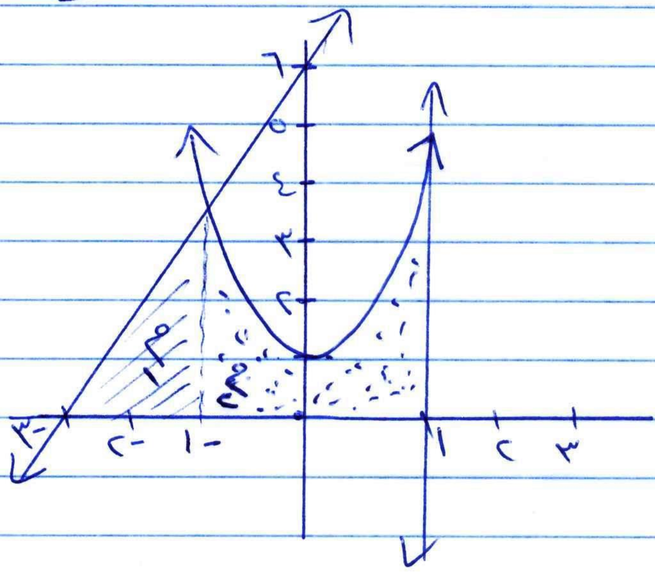
$م = \int_{-2}^{0} (6 - س + س^3)\,دس + \int_{0}^{4} (6 - س - \frac{1}{2}س)\,دس$

$م = \int_{-2}^{0} (س^3 - س + 6)\,دس + \int_{0}^{4} (6 - \frac{3}{2}س)\,دس$

$م = \left[\frac{س^4}{4} - \frac{س^2}{2} + 6س\right]_{-2}^{0} + \left[6س - \frac{3}{4}س^2\right]_{0}^{4}$

م = ٠ - (١٦/٤ - ٤/٢ + (٦ × -٢)) + (٦ × ٤ - ٣/٤ × ١٦) - ٠

م = -(٤ - ٢ - ١٢) + (٢٤ - ٢٢ - ١٢) = ١٠ + ١٢ = ٢٢ وحدة مربعة فرع (د)



(٧) الحل

أولاً/ نجد نقاط التقاطع

٢س + ٦ = ٠ ⟸ س = -٣

* ٣س^٢ + ١ = ٠ مرفوض

* س = ١ معطى

* ٢س + ٦ = ٣س^٢ + ١ ⟸ ٣س^٢ - ٢س - ٥ = ٠

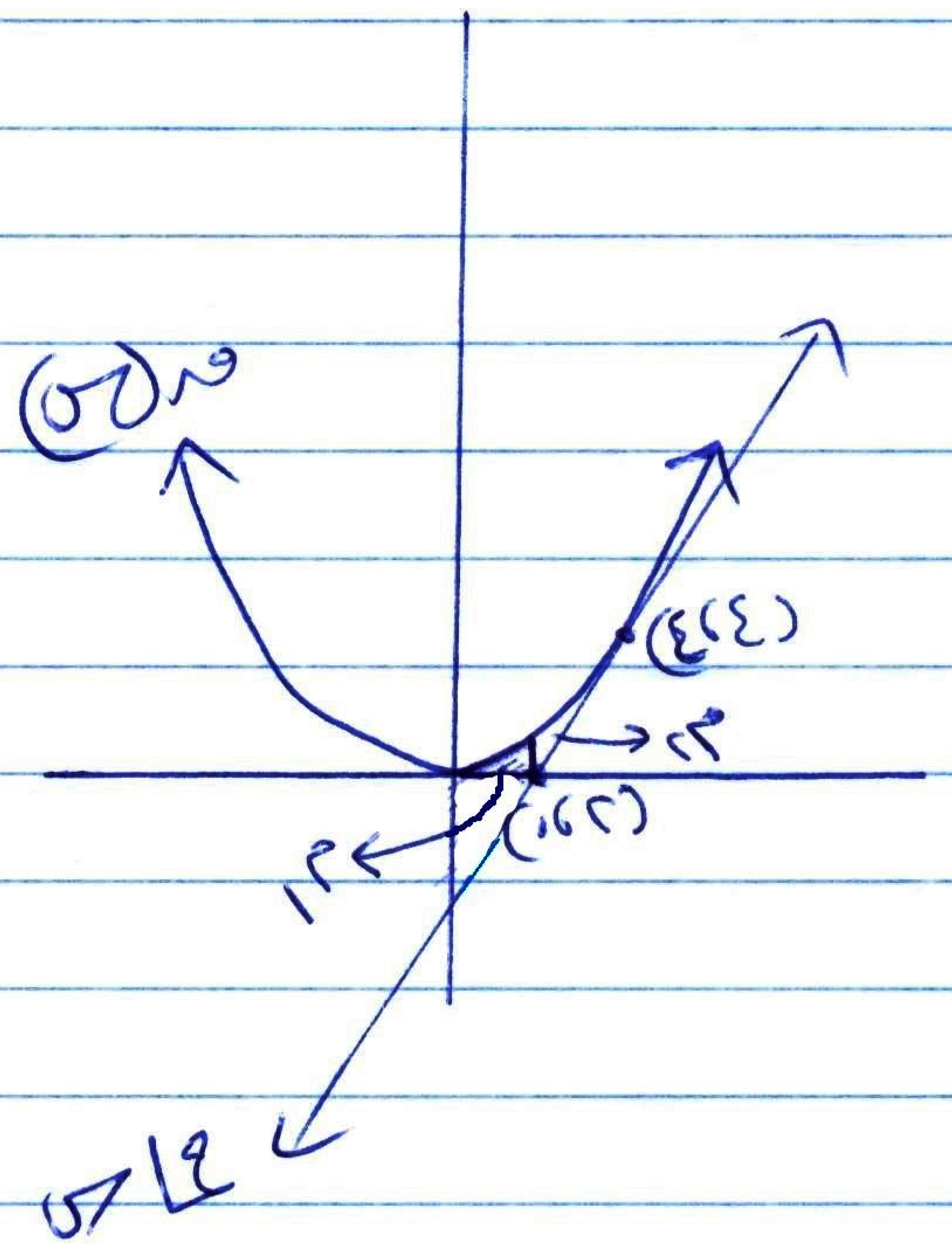
⟸ س = -١ ، س = ٥/٣ خارج المساحة المطلوبة. مرفوض

م = ∫ من -٣ إلى -١ (٢س + ٦) ءس + ∫ من -١ إلى ١ (٣س^٢ + ١) ءس

= (س^٢ + ٦س) | من -٣ إلى -١ + (س^٣ + س) | من -١ إلى ١

= (١ - ٦) - (٩ - ١٨) + (١ + ١) - (-١ - ١) = -٥ - (-٩) + ٢ - (-٢)

= ٤ + ٤ = ٨ وحدات مربعة



(٨) الحل

أولاً/ نجد نقاط تقاطع المماس مع محور السينات

$\text{٢س} - ٤ = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٢$

∴ نقطة التقاطع (٢، ٠)

* نقط تقاطع المماس مع ق(س) هي (٤، ٤) (نقطة التماس)

$\therefore \text{م} = \int_{٠}^{٢} \text{ق(س)}\, \text{دس} + \int_{٢}^{٤} \left(\text{ق(س)} - \text{ص}\right) \text{دس}$

ميل المماس ق'(٤) = ٢
⟸ م = ٢

معادلة المماس (ص)

$(\text{ص} - ٤) = \text{م}(\text{س} - ٤)$

$\Leftarrow \boxed{\text{ص} = \text{٢س} - ٤}$

$\therefore \text{م} = \int_{٠}^{٢} \tfrac{١}{٤}\text{س}^٢\, \text{دس} + \int_{٢}^{٤} \left(\tfrac{١}{٤}\text{س}^٢ - \text{٢س} + ٤\right) \text{دس}$

$\Leftarrow \text{م} = \tfrac{١}{١٢}\text{س}^٣ \Big|_{٠}^{٢} + \left(\tfrac{١}{١٢}\text{س}^٣ - \text{س}^٢ + \text{٤س}\right)\Big|_{٢}^{٤}$

$\Leftarrow \text{م} = \tfrac{٨}{١٢} + \tfrac{١٦}{٣} - ١٦ + ١٦ - \left(\tfrac{٨}{١٢} - ٤ + ٨\right) = \tfrac{٤}{٣}$ وحدة مربعة

فرع ب

(9) م₁ = ∫ من . إلى أ (جـ − ٢س + ٣س²) ءس = (جـس − $\frac{\cancel{2}س^2}{\cancel{2}}$ + س³) |من . إلى أ

⇐ م₁ = جـأ − أ² + أ³

⇐ م₂ = ∫ من أ إلى ب (٢س − ٣س² − جـ) ءس = (س² − س³ − جـس) |من أ إلى ب

⇐ م₂ = ب² − ب³ − جـب − أ² + أ³ + جـأ

م₁ = م₂

⇐ $\cancel{جـأ}$ − $\cancel{أ^2}$ + أ³ = ب² − ب³ − جـب − $\cancel{أ^2}$ + أ³ + $\cancel{جـأ}$

⇐ ب² − ب³ − جـب = صفر

⇐ ب (ب − ب² − جـ) = صفر ⇐ −ب² + ب − جـ = صفر ← (*)

بـ ق(ب) = جـ ⇐ ٢ب − ٣ب² = جـ (عوض في *)

⇐ ب − ب² − ٢ب + ٣ب² = صفر ⇐ ٢ب² − ب = صفر

⇐ ب (٢ب − ١) = صفر ⇐ ب = $\frac{1}{2}$

عوض في (*) ⇐ $\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{4}$ − جـ = صفر ⇐ $\frac{1}{4}$ − جـ = صفر

⇐ جـ = $\frac{1}{4}$ مْ ع (5)

(١٠) الحل

$\int_{١}^{٤} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = -٥$ (لأن المساحة أسفل محور السينات)

$\int_{-١}^{٢} \left(٣ - \text{د}(\text{س}+٢)\right) \text{ءس} = \int_{-١}^{٢} ٣\, \text{ءس} - \int_{-١}^{٢} \text{د}(\text{س}+٢)\, \text{ءس}$

افرض ص = س + ٢ ، عندما س = -١ ⟸ ص = ١

⟸ ءص = ءس ، عندما س = ٢ ⟸ ص = ٤

$\therefore \int_{-١}^{٢} \left(٣ - \text{د}(\text{س}+٢)\right) \text{ءس} = \int_{-١}^{٢} ٣\, \text{ءس} - \int_{١}^{٤} \text{د}(\text{ص})\, \text{ءص}$

$= ٣\left(٢ - (-١)\right) - (-٥)$

$= (٣ \times ٣) + ٥ = ١٤$ فرع (ب)

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار الوحدة الخامسة

التكامل المحدود وتطبيقاته

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الخامسة

التكامل المحدود وتطبيقاته

دفعة 2004

(١) إذا كان د(س) متصل وكان $\int_{٢أ+١}^{ب+٢} \text{د(س)}\, \text{دس} - \int_{٣}^{٧} \text{د(س)}\, \text{دس} = \int_{٧}^{١٢} \text{د(س)}\, \text{دس}$ ، فإن قيمة أ ، ب على الترتيب =

(أ) ١ ، -٢ (ب) ٢ ، ١ (جـ) -٢ ، ١ (د) ١ ، ٢

(٢) إذا كان $\int_{-١}^{١} \frac{١}{\text{س}^{٤}+١}\, \text{دس} = \frac{\pi}{٢}$ ، فإن $\int_{-١}^{١} \frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٤}+١}\, \text{دس} =$

(أ) $١ - \frac{\pi}{٢}$ (ب) $٢ - \frac{\pi}{٢}$ (جـ) $٢ + \frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(٣) إذا كانت المساحة المحصورة بين د(س) = لوهـ س ، ص = ١ والمستقيم س = جـ ومحور السينات تساوي (٢) وحدة مربعة فإن قيمة جـ =
(جـ > هـ)

(أ) هـ + ٢ (ب) ٢هـ + ١ (جـ) هـ + ١ (د) ٢هـ

٤) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{جاس - جا^{3}س} \; دس =$

أ) $\frac{2}{3}$ ب) $\frac{-2}{3}$ ج) صفر د) $\frac{3}{2}$

٥) إذا كان $|د(س)| \leq 3$، د(س) متصل وكان

$2م + 1 \leq \int_{-1}^{2} د(س) \, دس \leq 4ن - 3$ فإن قيمة م، ن على الترتيب

أ) ٥، −٣ ب) −٥، ٣ ج) ٥، ٣ د) −٣، −٥

٦) إذا كان العنصر الخامس في التجزئة $ح_{16}$ من الفترة [أ، ب] يساوي ٦ والعنصر التاسع يساوي ٧، فإن قيمة أ، ب على الترتيب =

أ) ٩، ٤ ب) ٥، ٣ ج) ٤، ٩ د) ٥، ٩

٧) $\int_{2}^{3} \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س} + \sqrt{5 - س}} \; دس =$

أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{-1}{2}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{-1}{4}$

⑧ أكبر وأصغر قيمة للمقدار $\int_{0}^{\pi} \frac{6}{3-2\text{جتا}^2 س}\, دس$ (على الترتيب)

أ) $6\pi ، 3\pi$ ب) $6\pi ، 2\pi$ ج) $\pi ، 2\pi$ د) $0 ، 2\pi$

⑨ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس - 3 & ، 1 \le س \le 4 \\ ب س^2 - 4س + 1 & ، 4 < س \le 6 \end{cases}$

هو الاقتران المكامل للاقتران ه(س) المعرف على $[1، 6]$ جد:

١) الثوابت أ، ب على الترتيب؟

أ) $3 ، \frac{3}{2}$ ب) $-3 ، 9$ ج) $\frac{3}{2} ، -3$ د) $-3 ، -\frac{3}{2}$

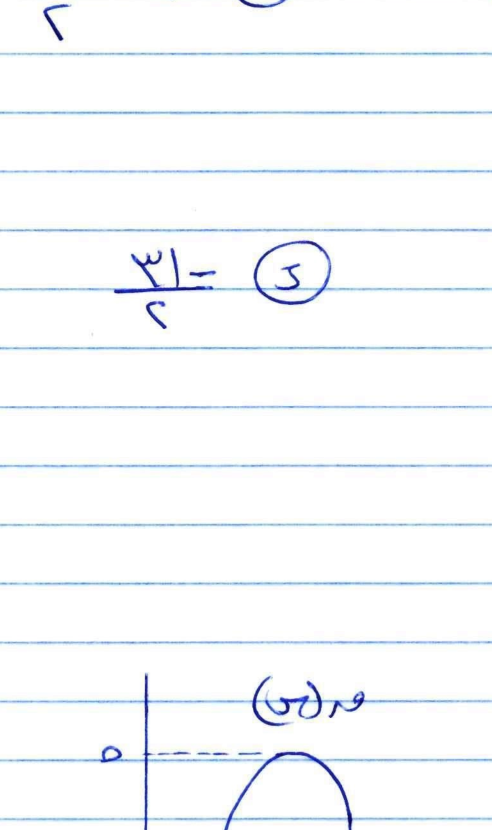
٢) $\int_{2}^{5} ه(س)\, دس =$

أ) $\frac{-2}{31}$ ب) $\frac{2}{31}$ ج) $\frac{31}{2}$ د) $\frac{-31}{2}$

⑩ بالاعتماد على الشكل المجاور

الذي يبين منحنى ه(س) فإن

أكبر قيمة للمقدار $\int_{0}^{1} هـ^س\, ه(هـ^س)\, دس$



أ) ٢هـ + ٢ ج) ٥هـ - ٥

ب) ٢هـ - ٢ د) ٥هـ + ٥

حلول أسئلة اختبار الوحدة الخامسة

دفعة 2004

(1) الحل

$$\int_{\text{٢أ}+1}^{\text{٥ب}+2} \text{ق(س) ءس} = \int_{3}^{7} \text{ق(س) ءس} + \int_{7}^{12} \text{ق(س) ءس}$$

$$= \int_{3}^{12} \text{ق(س) ءس}$$

$$\Leftarrow \int_{\text{٢أ}+1}^{\text{٥ب}+2} \text{ق(س) ءس} = \int_{3}^{12} \text{ق(س) ءس}$$

∴ ٢أ + ١ = ٣ ⇐ ٢أ = ٢ ⇐ أ = ١

فرع ء

كذلك ٥ب + ٢ = ١٢ ⇐ ٥ب = ١٠ ⇐ ب = ٢

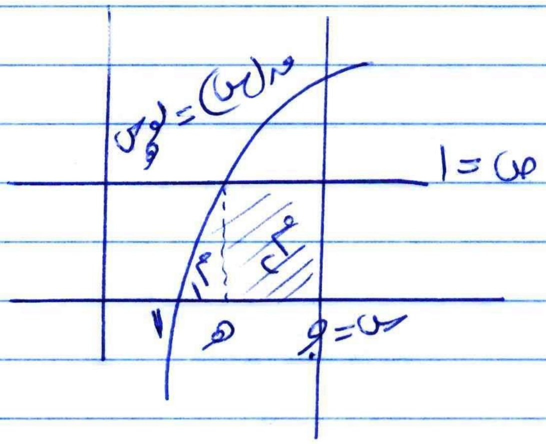
(2)

$$\int_{-1}^{1} \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2+1}\,\text{ءس} = \int_{-1}^{1} \frac{\text{س}^2+1-1}{\text{س}^2+1}\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\text{س}^2+1}{\text{س}^2+1}\,\text{ءس} - \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\text{س}^2+1}\,\text{ءس}}_{\frac{\pi}{2}\ \text{(معطى)}}$$

$$= \int_{-1}^{1} 1\,\text{ءس} - \frac{\pi}{2} = 1\left(1-(-1)\right) - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

فرع ب



٣) نوجد نقاط تقاطع

ق(س) مع ص = ١

$لو_{هـ} س = ١ \Leftarrow س = هـ^{١}$

$\Leftarrow س = هـ$

$م = م_١ + م_٢$

$= \int_{١}^{هـ} لو_{هـ} س \, دس + \int_{هـ}^{جـ} ١ \, دس = ٢$

نفرض أن $ق = لو_{هـ} س \Leftarrow دق = \frac{١}{س} دس$ تكامل بالأجزاء

$دع = دس \Leftarrow ع = س$

$\therefore \int لو_{هـ} س = ق \times ع - \int ع \times دق = س \, لو_{هـ} س - \int \cancel{س} \times \frac{١}{\cancel{س}} دس$

$= س \, لو_{هـ} س - س$

$\Leftarrow \left[س \, لو_{هـ} س - س \right]_{١}^{هـ} + ١ (جـ - هـ) = ٢$

$\Leftarrow (هـ \, لو_{هـ} هـ - هـ) - (١ \, لو ١ - ١) + جـ - هـ = ٢$

$صفر - صفر + ١ + جـ - هـ = ٢$

$\therefore جـ = هـ + ٢ - ١ = هـ + ١$ فرع جـ

(٤) ∫ من ٠ إلى $\frac{\pi}{2}$ √(جاس − جا٣س) دس = ∫ من ٠ إلى $\frac{\pi}{2}$ √(جاس(١ − جا٢س)) دس

= ∫ من ٠ إلى $\frac{\pi}{2}$ √جاس × √جتا٢س دس = ∫ من ٠ إلى $\frac{\pi}{2}$ √(جاس × جتا٢س) دس

= ∫ من ٠ إلى $\frac{\pi}{2}$ √جاس × |جتاس| دس

∵ جتاس > ٠ في (٠، $\frac{\pi}{2}$)
∴ |جتاس| > ٠

= ∫ من ٠ إلى $\frac{\pi}{2}$ √جاس × جتاس دس

افرض م = جاس ⟸ دم = جتاس دس

عندما س = ٠ ⟸ م = جا(٠) = صفر

عندما س = $\frac{\pi}{2}$ ⟸ م = ١

∴ ∫ من ٠ إلى $\frac{\pi}{2}$ √جاس × جتاس دس = ∫ من ٠ إلى ١ √م × دم = ∫ من ٠ إلى ١ م$^{\frac{1}{2}}$ دم = $\frac{2}{3}$ م$^{\frac{3}{2}}$ | من ٠ إلى ١

= $\frac{2}{3}$ فرع (م)

(٥) |ق(س)| ≤ ٣ ⟸ −٣ ≤ ق(س) ≤ ٣ (تكامل)

⟸ ∫ من −١ إلى ٢ −٣ دس ≤ ∫ من −١ إلى ٢ ق(س) دس ≤ ∫ من −١ إلى ٢ ٣ دس

⟸ −٣(٢+١) ≤ ∫ من −١ إلى ٢ ق(س) دس ≤ ٣(٢+١)

⟸ −٩ ≤ ∫ من −١ إلى ٢ ق(س) دس ≤ ٩

⟸ ٢أ + ١ = -٩ ⟸ أ = -٥

كذلك ٤ن - ٣ = ٩ ⟸ ن = ٣

(٦) العنصر الخامس = ٦ ⟸ ح٥ = ٦ ⟸ أ + د × ٤ = ٦

العنصر التاسع = ٧ ⟸ ح٨ = ٧ ⟸ أ + د × ٨ = ٧

أ + ٤د = ٦ ← (١)

أ + ٨د = ٧ ← (٢)

بحل (١) ، (٢) د = $\frac{١}{٤}$ ، أ = ٥

لكن د = $\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}$ ⟸ $\frac{١}{٤} = \frac{\text{ب} - ٥}{١٦}$ ⟸ ب = ٩ مع د

(٧) افرض $\int_{٢}^{٣} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{٥ - \text{س}}}\, \text{ءس} = \text{أ}$

افرض ص = ٥ - س ⟸ ءص = - ءس

عندما س = ٢ ← ص = ٣

عندما س = ٣ ← ص = ٢

∴ $\int_{٣}^{٢} \frac{\sqrt{٥ - \text{ص}}}{\sqrt{٥ - \text{ص}} + \sqrt{\text{ص}}}\, - \text{ءص} = \text{أ}$

$= -\int_{٣}^{٢} \frac{\sqrt{٥ - \text{ص}}}{\sqrt{٥ - \text{ص}} + \sqrt{\text{ص}}}\, \text{ءص} = \text{أ} = \int_{٢}^{٣} \frac{\sqrt{٥ - \text{س}}}{\sqrt{٥ - \text{س}} + \sqrt{\text{س}}}\, \text{ءس} = \text{أ}$ ← (*)

* $\int_{٢}^{٣} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{٥ - \text{س}}}\, \text{ءس} = \text{أ}$ ← (**)

بجمع (*) و (**)

$٢\text{أ} = \int_{٢}^{٣} \frac{\sqrt{٥ - \text{س}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{٥ - \text{س}}}\, \text{ءس}$ ⟸ $٢\text{أ} = \int_{٢}^{٣} ١\, \text{ءس}$

$٢أ = ١(٣-٢) \Leftarrow ٢أ = ١ \Leftarrow أ = \frac{١}{٢}$ ضع (أ)

$$\because \int_{٢}^{٣} \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}+\sqrt{٥-س}}\, دس = \frac{١}{٢}$$

(٨) $-١ \le \text{جتا}\, س \le ١ \Leftarrow ٠ \le \text{جتا}^{٢} س \le ١$

$\Leftarrow -٢ \le -٢\,\text{جتا}^{٢} س \le ٠$

$\Leftarrow ١ \le ٣-٢\,\text{جتا}^{٢} س \le ٣$

$\Leftarrow \frac{١}{٣} \le \frac{١}{٣-٢\,\text{جتا}^{٢} س} \le ١$

$\Leftarrow ٢ \le \frac{٦}{٣-٢\,\text{جتا}^{٢} س} \le ٦$

$\Leftarrow \int_{٠}^{\pi} ٢\, دس \le \int_{٠}^{\pi} \frac{٦}{٣-٢\,\text{جتا}^{٢} س} \le \int_{٠}^{\pi} ٦\, دس$

$\Leftarrow ٢\pi \le \int_{٠}^{\pi} \frac{٦}{٣-٢\,\text{جتا}^{٢} س}\, دس \le ٦\pi$

أصغر قيمة   أكبر قيمة

ضع (ب)

(9) (أ) $\bar{ق}(1) =$ صفر ⇐ $أ - 3 =$ صفر ⇐ $أ = 3$

$\bar{ق}(س)$ متصل على $[1, 6]$ ⇐ $\lim_{س \to 4^-} ح(س) = \lim_{س \to 4^+} ح(س) = ح(1)$

⇐ $\lim_{س \to 4^-} 3س - 3 = \lim_{س \to 4^+} بس^2 - 4س + 1$

⇐ $9 = 16ب - 16 + 1$ ⇐ $ب = \frac{3}{2}$ فرع (أ)

(ب) $\int_2^5 د(س)\, دس = \bar{ق}(5) - \bar{ق}(2)$

$= (\frac{3}{2} \times 25 - 20 + 1) - (3 \times 2 - 3) = \frac{31}{2}$ فرع (ب)

(10) من الرسم $د(س) \geq 0$ ، $\forall س \in [1, هـ]$

∴ $0 \leq د(س) \leq 5$

$\int_0^1 هـ^س\, د(هـ^س)\, دس$

افرض $ص = هـ^س$

$دص = هـ^س\, دس$

عندما $س = 0$ ⇐ $ص = 1$

عندما $س = 1$ ⇐ $ص = هـ$

$= \int_1^{هـ} د(ص)\, دص$

لكن $د(س) \leq 5$ تكامل الطرفين

$\int_1^{هـ} د(ص)\, دص \leq \int_1^{هـ} 5\, دص$ ⇐ $\int_1^{هـ} د(ص)\, دص \leq 5(هـ - 1)$

⇐ $\int_1^{هـ} د(ص)\, دص \leq 5هـ - 5$

أكبر قيمة

فرع (ج)

(9)

رياضيات الثاني عشر علمي

اختبار الوحدة الثالثة (المصفوفات والمحددات)

مراجعات دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الثالثة (المصفوفات والمحددات)
مراجعات - دفعة 2004

① إذا كان $\frac{١}{٢}$ (أ - ب) = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

فما قيمة ٤أ - ٣(ب + م٢ + أ) + ٢ب

(أ) $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٤- & ١- \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix}$

② عند حل المعادلات الآتية بطريقة جاوس فإن س، ص، ع على الترتيب

س + ص + ع = ١

س - ص + ع = ٤

س - ص - ع = -١

(أ) {س = ٠، ص = $\frac{٣}{٢}$، ع = $\frac{٢}{٥}$}

(ب) {س = ٠، ص = $\frac{-٣}{٢}$، ع = $\frac{٥}{٢}$}

(جـ) {س = ١، ص = $\frac{٢}{٣}$، ع = $\frac{-٥}{٢}$}

(د) {س = -١، ص = $\frac{-٢}{٣}$، ع = $\frac{٥}{٢}$}

③ بدون فك المحدد إذا كان $\begin{vmatrix} ع+٢ & ص & س \\ ع & ص+٢ & س \\ ع & ص & س+٢ \end{vmatrix}$ = -٤

فإن قيمة س + ص + ع = (أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) $\frac{١}{٢}$

④ بدون فك المحدد قيمة

$$\begin{vmatrix} أ & أ+ب & أ+2ب \\ أ+2ب & أ & أ+ب \\ أ+ب & أ+2ب & أ \end{vmatrix} =$$

أ) $9ب(أ-ب)$ ب) $-2ب(2أ+5ب)$

ج) $9ب^2(أ+ب)$ د) $9ب^2(أ-2ب)$

⑤ قيمة س التي تحقق المعادلة

$$\begin{vmatrix} س+1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & س+2 \end{vmatrix} = 0$$

أ) $\frac{-1}{10}$ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{-2}{3}$ د) $\frac{1}{10}$

⑥ إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية بحيث أنه

$|أس| = 5|أ| = -\frac{1}{3}|أص|$ فما قيمتي س، ص على الترتيب

أ) $5 ، -15$ ب) $-5 ، 15$ ج) $5 ، -\frac{5}{3}$ د) $5 ، -1$

(٧) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ \\ -١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٩ & جـ \end{bmatrix}$ فما قيمة جـ

التي تجعل المصفوفة ب أ منفردة ؟

(أ) -٣ (ب) ٣ (جـ) صفر (د) ح

(٨) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$ فإن

قيمة س ، ص على الترتيب حيث أ + (ب - أ) $س^{-1}$ + ص $م_{٢}$ = ب

(أ) -٤ ، ٤ (ب) ٥ ، ٤ (جـ) ٤ ، ٣ (د) ١ ، -١

(٩) إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $أ^{-1}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ فإن المصفوفة

س حيث س + $(أ \cdot س^{-1})^{-1}$ = ب

(أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٢ & -٢ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -٢ & ٢ \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

(١٠) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثالثة

وكان |أ| = $\frac{١}{|ب|}$ فإن إحدى العبارات الآتية صحيحة دائماً

(أ) أ = $ب^{-1}$ (ب) أ = -ب (جـ) أ = $(ب)^{-1}$ (د) أ = $(ب^{-1})^{-1}$

حلول أسئلة اختبار الوحدة الثالثة

مراجعات - دفعة 2004

(١) $\frac{1}{2}(\text{أ} - \text{ب}) = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \Leftarrow ٢ \times \frac{1}{2}(\text{أ} - \text{ب}) = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow (\text{أ} - \text{ب}) = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

$٤\text{أ} - ٣(\text{ب} + \text{م}_٢ + \text{أ}) + ٢\text{ب} = ٤\text{أ} - ٣\text{ب} - ٣\text{م}_٢ - ٣\text{أ} + ٢\text{ب}$

$= \text{أ} - \text{ب} - ٣\text{م}_٢$

$= \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} - ٣\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

فرع (أ)

(٢) $\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & ١ & ٤ \\ ١ & -١ & -١ & -١ \end{array}\right]$ اضرب ص١ في (-١) ثم أضفه لـ ص٢ ، ص٣ $\Leftarrow$

$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ٠ & -٢ & ٠ & ٣ \\ ٠ & -٢ & -٢ & -٢ \end{array}\right]$ اضرب ص٢ في (-١) ثم أضفه لـ ص٣ $\Leftarrow$

$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ٠ & -٢ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٠ & -٢ & -٥ \end{array}\right] \Leftarrow$

$-٢\text{ع} = -٥ \Leftarrow \text{ع} = \frac{٥}{٢}$

كذلك $-٢\text{ص} = ٣ \Leftarrow \text{ص} = -\frac{٣}{٢}$

$س + ص + ع = ١$ (عوض عن ص، ع)

$س - \frac{٣}{٢} + \frac{٥}{٢} = ١ \Leftarrow س = ٠$

$\Leftarrow \{ س = ٠ ،\ ص = \frac{-٣}{٢} ،\ ع = \frac{٥}{٢} \}$ فرع (ب)

(٣)

$$\begin{vmatrix} س & ص & ع+٢ \\ س & ص+٢ & ع \\ س+٢ & ص & ع \end{vmatrix} = -٤$$

نجمع $ع_٢ + ع_٣$ ثم نضيفها لـ $ع_١$

$$\begin{vmatrix} س+ص+ع+٢ & ص & ع+٢ \\ س+ص+ع+٢ & ص+٢ & ع \\ س+ص+ع+٢ & ص & ع \end{vmatrix} = -٤$$

نأخذ $(س+ص+ع+٢)$ عامل مشترك من $ع_١$

$$(س+ص+ع+٢) \begin{vmatrix} ١ & ص & ع+٢ \\ ١ & ص+٢ & ع \\ ١ & ص & ع \end{vmatrix} = -٤$$

$-ص_١ + ص_٢ ،\ -ص_١ + ص_٣ \Leftarrow (س+ص+ع+٢) \begin{vmatrix} ١ & ص & ع+٢ \\ ٠ & ٢ & -٢ \\ ٠ & ٠ & -٢ \end{vmatrix} = -٤$

$\Leftarrow (س+ص+ع+٢) \times (١ \times ٢ \times -٢) = -٤$

$\Leftarrow (س+ص+ع+٢) \times -٤ = -٤ \Leftarrow س+ص+ع = -١$ فرع (ج)

④

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+٢\text{ب} \\ \text{أ}+٢\text{ب} & \text{أ} & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+٢\text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$$

اجمع ع٢ + ع٣ ثم أضفها لـ ع١

$$\begin{vmatrix} ٣\text{أ}+٣\text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+٢\text{ب} \\ ٣\text{أ}+٣\text{ب} & \text{أ} & \text{أ}+\text{ب} \\ ٣\text{أ}+٣\text{ب} & \text{أ}+٢\text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$$

أخذ (٣أ + ٣ب) عامل مشترك من ع١

$$(٣\text{أ}+٣\text{ب})\begin{vmatrix} ١ & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+٢\text{ب} \\ ١ & \text{أ} & \text{أ}+\text{ب} \\ ١ & \text{أ}+٢\text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$$

ص٢ + ص٣ وإضافته لص١ $\Leftarrow$ $(٣\text{أ}+٣\text{ب})\begin{vmatrix} ٣ & ٣\text{أ}+٣\text{ب} & ٣\text{أ}+٣\text{ب} \\ ١ & \text{أ} & \text{أ}+\text{ب} \\ ١ & \text{أ}+٢\text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$

بأخذ (٣) عامل مشترك من ص١ $\Leftarrow$ $٩(\text{أ}+\text{ب})\begin{vmatrix} ١ & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+\text{ب} \\ ١ & \text{أ} & \text{أ}+\text{ب} \\ ١ & \text{أ}+٢\text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$

$\text{ص}_2 - \text{ص}_1 \text{ ، } \text{ص}_3 - \text{ص}_1 \Leftarrow ٩(\text{أ}+\text{ب}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+\text{ب} \\ ٠ & -\text{ب} & ٠ \\ ٠ & \text{ب} & -\text{ب} \end{vmatrix}$

$\text{ص}_2 + \text{ص}_3 \Leftarrow ٩(\text{أ}+\text{ب}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+\text{ب} \\ ٠ & -\text{ب} & ٠ \\ ٠ & ٠ & -\text{ب} \end{vmatrix}$

$٩(\text{أ}+\text{ب}) \times (١ \times -\text{ب} \times -\text{ب})$

$= ٩(\text{أ}+\text{ب}) \times \text{ب}^2 = ٩\text{ب}^2(\text{أ}+\text{ب})$ فرع (ج)

٥) $\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$

$\begin{vmatrix} \text{س}+١ & ١ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٣ \\ ٢ & ٣ & \text{س}+٢ \end{vmatrix} = ٠$

$(\text{س}+١) \begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & \text{س}+٢ \end{vmatrix} + -١ \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & \text{س}+٢ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

$\Leftarrow (\text{س}+١)(٠-٩) - [(\text{س}+٢) - ٦] + ٢(٣-٠) = \text{صفر}$

$\Leftarrow -٩\text{س} - ٩ - \text{س} + ٤ + ٦ = \text{صفر}$

$\Leftarrow -١٠\text{س} + ١ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{١٠}$ فرع (د)

(٦) أ مصفوفة من الرتبة الثانية ، $|\text{س أ}| = ٥|\text{أ}| = -\frac{١}{٣}|\text{ص أ}|$

$|\text{س أ}| = ٥|\text{أ}| \Leftarrow \frac{|\text{س أ}|}{|\text{أ}|} = \frac{٥|\text{أ}|}{|\text{أ}|} \Leftarrow \frac{|\text{س أ}|}{|\text{أ}|} = ٥$

$\Leftarrow \text{س} = ٥$

$-\frac{١}{٣}|\text{ص أ}| = ٥|\text{أ}|$

$\frac{-\frac{١}{٣}|\text{ص أ}|}{|\text{أ}|} = \frac{٥|\text{أ}|}{|\text{أ}|} \Leftarrow -\frac{١}{٣}\text{ص} = ٥ \Leftarrow \text{ص} = -١٥$ فرع (أ)

(٧) $\text{ب أ} = \underset{٢\times١}{\begin{bmatrix} \text{جـ} & ٩ \end{bmatrix}} \underset{١\times٢}{\begin{bmatrix} ٣ \\ -١ \end{bmatrix}} = \underset{١\times١}{\begin{bmatrix} ٣\text{جـ} - ٩ \end{bmatrix}}$

$|٣\text{جـ} - ٩| = ٠$ (ب أ مصفوفة منفردة)

$\Leftarrow ٣\text{جـ} - ٩ = ٠ \Leftarrow \text{جـ} = ٣$ فرع (ب)

(٨) $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

$\text{ب} - \text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix}$

$|\text{ب} - \text{أ}| = (٢\times٢) - (٠\times-٦) = ٤$

$(\text{ب} - \text{أ})^{-١} = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ \frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

$$\text{أ} + (\text{ب} - \text{أ})^{-1}\,\text{س} + \text{ص}\,\text{م}_{٢} = \text{ب}$$

$$(\text{ب} - \text{أ})^{-1}\,\text{س} + \text{ص}\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \text{ب} - \text{أ}$$

$$\text{س}\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ \frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{ص} & ٠ \\ ٠ & \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{١}{٢}\text{س} + \text{ص} & ٠ \\ \frac{٣}{٢}\text{س} & \frac{١}{٢}\text{س} + \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\frac{٣}{٢}\text{س} = -٦ \Leftarrow \text{س} = -٦ \times \frac{٢}{٣} = (-٤)$$

$$\frac{١}{٢}\text{س} + \text{ص} = ٢ \Leftarrow \frac{١}{٢} \times -٤ + \text{ص} = ٢ \Leftarrow -٢ + \text{ص} = ٢$$

$$\Leftarrow \text{ص} = (٤)$$

$\therefore$ $\text{س} = -٤$ ، $\text{ص} = ٤$ صح (أ)

(٩) $\text{س} + (\text{أ} \cdot \text{س}^{-1})^{-1} = \text{ب}$

$$\text{س} + \text{س}\,\text{أ}^{-1} = \text{ب} \Leftarrow \text{س}(\text{م}_{٢} + \text{أ}^{-1}) = \text{ب}$$

$$\text{س}\left(\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} \times \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

اضرب في $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}^{-1}$ من اليسار

$$^{١-}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = {}^{١-}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \times س$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ١ & ٣- \end{bmatrix} \frac{١-}{٢} \times \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} = س$$

(ج) فرع $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix} = س$

(ج) فرع (١٠)

رياضيات الثاني عشر علمي

اختبار الوحدة الرابعة (التكامل غير المحدود وتطبيقاته)

مراجعات دفعة ٢٠٢٢

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الرابعة (التكامل غير المحدود وتطبيقاته)

مراجعات - دفعة 2004

(١) إذا كان $\int$ ق(س) دس = س^{٢} - جتاس + ٢ ، فما قيمة ق$'$(١) ؟

(أ) -٣   (ب) ٣   (ج) ١   (د) ٢

(٢) إذا كان منحنى ق(س) يقطع محور السينات عند س = ١ ، س = $\frac{٤}{٣}$

فإذا علمت أنه س^{٤} × (ق$''$(س) - ١٨) = ١٩٢ عند أي نقطة

عليه (س، ص) فإن قاعدة الاقتران ق(س) هي :

(أ) ق(س) = ٣٢س^{٢} + ٩س - ٢١س^{٣} - ٦٢

(ب) ق(س) = ٣٢س$^{-٢}$ - ٩س^{٢} + ٢١س

(ج) ق(س) = -٣٢س$^{-٢}$ - ٩س^{٢} + ٢١س + ٦٢

(د) ق(س) = ٣٢س$^{-٢}$ + ٩س^{٢} + ٢١س - ٦٢

(٣) $\int$ $\frac{\text{س قا}^{٢}\text{س - س ظا}^{٢}\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$ دس =

(أ) $\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + ج   (ب) $\frac{٣}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٣}}$ + ج

(ج) -$\frac{٣}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٣}}$ + ج   (د) -$\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + ج

٤) $\int (س \text{ قا}^2 س + \text{ظا} س) \, دس =$

أ) ظتا س + ج   ب) س ظا س + ج

ج) - س ظتا س + ج   د) - س ظا س + ج

٥) إذا كان هـ(س) ، م(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س) بحيث م(س) = أ س² - ٦س - ٣ ، هـ(س) = ب س + ٦ فما قيم الثابتين أ ، ب على الترتيب؟

أ) صفر ، -٦   ب) ١ ، -٦   ج) ١ ، ٦   د) صفر ، ٦

٦) قيمة $\int هـ^{س} \left(\text{لو}_{هـ} س + \frac{1}{س} \right) دس =$

أ) $هـ^{س}$ + ج   ب) $\text{لو}_{هـ}$ س + ج

ج) $هـ^{س} + \text{لو}_{هـ}$ س + ج   د) $هـ^{س} \, \text{لو}_{هـ}$ س + ج

٧) قيمة $\int \frac{\sqrt{س}}{1 - س\sqrt{س}} \, دس =$

أ) $\frac{2}{3} \text{لو}_{هـ} |\sqrt{س^3} + 1| + ج$ ب) $\frac{-2}{3} \text{لو}_{هـ} |1 - \sqrt{س^3}| + ج$

ج) $\text{لو}_{هـ} |\sqrt{س} + 1| + ج$ د) $\frac{2}{3} \sqrt{س^3} + ج$

(٨) قيمة $\int ٢(١-٢س)^{١٢}\, دس =$

(أ) $-\frac{١}{١٣}(١-٢س)^{١٣} + جـ$ (ب) $\frac{١}{١٣}(١-٢س)^{١٣} + جـ$

(جـ) $-٤٨(١-٢س)^{١١} + جـ$ (د) $٢٤(١-٢س)^{١١} + جـ$

(٩) إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على ح وكان

$\int (ق(س) + ٢)\, دس = س^{٣} + ب س^{٢} + ٩$ ، ق(١) = ٧

فإن قيمة الثابت ب =

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) −١

(١٠) إذا علمت أن $\int ق(س)\, دس = |أ-١|\, س^{٢} + ٣$ ، حيث أ ≥ ٠

، قَ(٢) = ١٠ فإن قيمة أ =

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١١

(١١) $\int \frac{١ - جا٢س}{جاس - جتاس}\, دس =$

(أ) − جتاس − جاس + جـ (ب) − جتاس + جاس + جـ

(جـ) جتاس + جاس + جـ (د) جتاس − جاس + جـ

(١٢) $\int \left(\frac{\text{جتا}\, س}{س^{2}} + \frac{\text{جا}\, س}{س} \right) ء س =$

(أ) $\frac{\text{جتا}\, س}{س} + ج$ (ب) $\frac{\text{جا}\, س}{س} + ج$

(ج) $- \frac{\text{جتا}\, س}{س} + ج$ (د) $- \frac{\text{جا}\, س}{س} + ج$

(١٣) قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة مقدارها ٤٠ م/ث وبتسارع مقداره (−١٠م/ث^٢) فإذا كان ارتفاع الجسم عن سطح الأرض بعد ثانية من حركته يساوي (٨٠م) فإن أقصى ارتفاع يصله الجسم عن سطح الأرض

(أ) ١٤٥م   (ب) ١٢٥م   (ج) ١١٥م   (د) ١١٠م

* حلول أسئلة اختبار الوحدة الرابعة

* مراجعات - دفعة 2004 *

(١) ∫ ق(س) د س = س^{٢} - جتا س + ٢   اشتقاق الطرفين

ق(س) = ٢ س + جا س

ق̀(س) = ٢ + جتا س

ق̀(٠) = ٢ + جتا(٠) = ٢ + ١ = (٣) فرع (ب)

(٢) منحنى ق(س) يقطع محور السينات عند س = ١ ، س = $\frac{٤}{٣}$

س^{٤} × (ق̃(س) - ١٨) = ١٩٢

⇐ ق̃(س) - ١٨ = ١٩٢ س$^{-٤}$

ق̃(س) = ١٩٢ س$^{-٤}$ + ١٨   كامل الطرفين

ق̀(س) = ∫ (١٩٢ س$^{-٤}$ + ١٨) د س

= $\frac{١٩٢ \text{ س}^{-٣}}{-٣}$ + ١٨ س + جـ$_{١}$

= -٦٤ س$^{-٣}$ + ١٨ س + جـ$_{١}$ كامل مرة ثانية

ق(س) = ٣٢ س$^{-٢}$ + ٩ س^{٢} + جـ$_{١}$ س + جـ$_{٢}$

ق(١) = ٠ ⇐ ٣٢ + ٩ + جـ$_{١}$ + جـ$_{٢}$ = ٠

⇐ جـ$_{١}$ + جـ$_{٢}$ = -٤١ ← (*)

كذلك $د\left(\frac{٤}{٣}\right) = ٠ \Leftarrow ٣٢ \times \frac{٩}{١٦} + ٩ \times \frac{١٦}{٩} + \frac{٤}{٣} ج_١ + ج_٢ = ٠$

$\Leftarrow \frac{٤}{٣} ج_١ + ج_٢ = -٣٤ \longleftarrow (**)$

من (١) ، (٢) ينتج أن $\frac{١}{٣} ج_١ = ٧ \Leftarrow ج_١ = ٢١$

$ج_٢ = -٦٢$

$\therefore د(س) = ٣٢س^{-٢} + ٩س^{٢} + ٢١س - ٦٢$ فرع (د)

(٣) $\int \frac{س\,قا^{٢}س - س\,ظا^{٢}س}{\sqrt[٣]{س}}\,دس$

$= \int \frac{س\,(قا^{٢}س - ظا^{٢}س)}{\sqrt[٣]{س}}\,دس$

تذكر

$١ + ظا^{٢}س = قا^{٢}س$

$\Leftarrow قا^{٢}س - ظا^{٢}س = ١$

$= \int \frac{س}{\sqrt[٣]{س}}\,دس = \int س \times س^{-\frac{١}{٣}}\,دس = \int س^{\frac{٢}{٣}}\,دس$

$= \boxed{\frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + ج}$

فرع (ب)

(٤) $\int (س\,قا^{٢}س + ظاس)\,دس$

$= \int س\,قا^{٢}س\,دس + \int ظاس\,دس$

$ص = س$ ، $دع = قا^{٢}س\,دس$

$دص = دس$ ، $ع = ظاس$

التكامل $= س\,ظاس - \cancel{\int ظاس\,دس}$

$+ \cancel{\int ظاس\,دس}$

$= \boxed{س\,ظاس + ج}$ فرع (ب)

6

(٥) ه(س) ، م(س) اقترانيه أصليين لـ ق(س)

⇐ مَ(س) = ق(س) ، هَ(س) = ق(س)

⇐ مَ(س) = هَ(س)

⇐ ٢أس − ٦ = ب (بالتجريب من الخيارات)

أ = ٠ ، ب = −٦ هي اللي تحقق المعادلة

(٢س × ٠ − ٦ = −٦) ✓ ⇐ أ = ٠ ، ب = −٦ فرع (أ)

(٦) $\int \text{هـ}^{\text{س}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \frac{1}{\text{س}} \right) \text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}} \, \text{دس} = \underbrace{\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \, \text{دس}}_{\text{تكامل بالأجزاء}} + \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}} \, \text{دس}$

ق = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س دهـ = $\text{هـ}^{\text{س}}$ دس

دق = $\frac{1}{\text{س}}$ دس هـ = $\text{هـ}^{\text{س}}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \, \text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}} \, \text{دس}$

$\therefore \int \text{هـ}^{\text{س}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \frac{1}{\text{س}} \right) \text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \cancel{\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}} \, \text{دس}} + \cancel{\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}} \, \text{دس}}$

$= \boxed{\text{هـ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \text{جـ}}$ فرع (جـ)

٧) $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{1-\text{س}\sqrt{\text{س}}}\, \text{دس}$

افرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^2 = \text{س} \Leftarrow 2\text{ص}\, \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1$

$\Leftarrow 2\text{ص}\, \text{دص} = \text{دس}$

$\therefore \int \frac{\sqrt{\text{س}}}{1-\text{س}\sqrt{\text{س}}}\, \text{دس} = \int \frac{\text{ص}}{1-\text{ص}^3} \times 2\text{ص}\, \text{دص}$

$= \int \frac{2\text{ص}^2}{1-\text{ص}^3}\, \text{دص}$

افرض $\text{م} = 1-\text{ص}^3 \Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دص}} = -3\text{ص}^2 \Leftarrow \text{دص} = \frac{\text{دم}}{-3\text{ص}^2}$

$\therefore \int \frac{2\text{ص}^2}{1-\text{ص}^3}\, \text{دص} = \int \frac{\cancel{2\text{ص}^2}}{\text{م}} \times \frac{\text{دم}}{\cancel{-3\text{ص}^2}} = \int \frac{-2}{3} \times \frac{1}{\text{م}}\, \text{دم}$

$= \frac{-2}{3}\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{م}| + \text{ج}$

$= \frac{-2}{3}\, \text{لو}_{\text{هـ}} |1-\text{ص}^3| + \text{ج} = \frac{-2}{3}\, \text{لو}_{\text{هـ}} |1-(\sqrt{\text{س}})^3| + \text{ج}$

$= \frac{-2}{3}\, \text{لو}_{\text{هـ}} |1-\sqrt{\text{س}^3}| + \text{ج}$

$$\boxed{\begin{array}{c} (\sqrt{\text{س}})^3 = (\text{س}^{\frac{1}{2}})^3 = \text{س}^{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\text{س}^3} = \text{س}^{\frac{3}{2}} \end{array}}$$

فرع (ب)

(٨) $\int$ ٢ (١ - ٢س)^١٢ دس

= ٢ (١ - ٢س)^١٣ / (١٣ × -٢) + جـ = -١/١٣ (١ - ٢س)^١٣ + جـ   فرع (أ)

(٩) $\int$ (ق(س) + ٢) دس = س^٣ + ب س^٢ + ٩   اشتقاق الطرفين

ق(س) + ٢ = ٣س^٢ + ٢ب س

ق(س) = ٣س^٢ + ٢ب س - ٢

ق(١) = ٧ ⟸ ٣ + ٢ب - ٢ = ٧ ⟸ ٢ب = ٦ ⟸ ب = ٣

فرع (جـ)

(١٠) $\int$ ق(س) دس = |أ - ١| س^٢ + ٣   اشتقاق الطرفين

⟸ ق(س) = ٢ |أ - ١| س

قَ(س) = ٢ |أ - ١|

∵ قَ(٢) = ١٠ ⟸ ٢ |أ - ١| = ١٠ ⟸ |أ - ١| = ٥

إما أ - ١ = ٥   أو   أ - ١ = -٥

⟸ $\boxed{\text{أ} = ٦}$ ✓   أ = -٤ ✗ لأنه أ >

فرع (أ)

(٩)

(١١) $\int \frac{1 - \text{جا}\,2\text{س}}{\text{جا}\,\text{س} - \text{جتا}\,\text{س}}\, \text{ء}\text{س}$

$$1 - \text{جا}\,2\text{س} = \text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} - 2\,\text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س}$$

$$= (\text{جا}\,\text{س} - \text{جتا}\,\text{س})^2$$

$$\therefore \int \frac{1 - \text{جا}\,2\text{س}}{\text{جا}\,\text{س} - \text{جتا}\,\text{س}}\, \text{ء}\text{س} = \int \frac{(\text{جا}\,\text{س} - \text{جتا}\,\text{س})^{\cancel{2}}}{\cancel{(\text{جا}\,\text{س} - \text{جتا}\,\text{س})}}\, \text{ء}\text{س}$$

$$= \int (\text{جا}\,\text{س} - \text{جتا}\,\text{س})\, \text{ء}\text{س} = -\text{جتا}\,\text{س} - \text{جا}\,\text{س} + \text{ج}$$ صنع (٩)

(١٢) $\int \left(\frac{\text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}^2} + \frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}\right) \text{ء}\text{س}$ بتوحيد المقامات

$$= \int \left(\frac{\text{جتا}\,\text{س} + \text{س}\,\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}^2}\right) \text{ء}\text{س} = \int \left(\frac{-\text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}}\right)' \text{ء}\text{س}$$

$$= \frac{-\text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}} + \text{ج}$$

(١٣) ع(٠) = ٤٠ م/ث

$\bar{ت}$ = −١٠ م/ث²

ف(١) = ٨٠ م

ع(ن) = ∫ $\bar{ت}$(ن) ءن

ع(ن) = ∫ −١٠ ءن = −١٠ن + جـ١

لكن ع(٠) = ٤٠ ⇐ جـ١ = ٤٠ ⇐ ع(ن) = −١٠ن + ٤٠

ف(ن) = ∫ ع(ن) ءن = ∫ (−١٠ن + ٤٠) ءن

= $\frac{-١٠ن^٢}{٢}$ + ٤٠ن + جـ٢

ف(ن) = −٥ن² + ٤٠ن + جـ٢

لكن ف(١) = ٨٠ ⇐ ٨٠ = −٥ + ٤٠ + جـ٢ ⇐ جـ٢ = ٤٥

∴ ف(ن) = −٥ن² + ٤٠ن + ٤٥

أقصى ارتفاع يصله الجسم عندما ع = صفر

⇐ −١٠ن + ٤٠ = ٠ ⇐ ن = ٤ ث (زمن الوصول لأقصى ارتفاع)

⇐ أقصى ارتفاع يصله الجسم ف(٤) = −٥×(٤)² + ٤٠×٤ + ٤٥

= $\boxed{١٢٥ \text{ م}}$

رياضيات الثاني عشر علمي

اختبار الوحدة الخامسة (التكامل المحدود وتطبيقاته)

مراجعات دفعة ٢٠٢٢

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الخامسة (التكامل المحدود وتطبيقاته)

مراجعات - دفعة 2004

(١) في $ح_٦$ للتجزئة المنتظمة [أ، ب] إذا كانت الفترة الجزئية الخامسة هي [٢,٥ ، ٥,٥] فإن قيمة أ، ب على الترتيب

(أ) -٤ ، -١٠ (ب) ٤ ، -١٠ (ج) ٤ ، ١٠ (د) -٤ ، ١٠

(٢) قيمة $\int_{٠}^{٤} [٤ - \frac{١}{٢} س] \, د س =$

(أ) ١٠ (ب) ٦ (ج) ٧ (د) ٥

(٣) إذا كان $ص = هـ^{أ جتا س} + لو_{هـ} جا س + \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢ + جا س} \, د س$

وكان $ص'(\frac{\pi}{٢}) = -٢$ ، فما قيمة أ ؟

(أ) ٢ (ب) -٢ (ج) ٣ (د) -٣

(٤) إذا كان $\int_{أ}^{ب} جا^٢ س \, د س = \frac{٣}{٢}$ ، $\int_{أ}^{ب} جتا^٢ س \, د س = \frac{١}{٢}$

فإن قيمة $\int_{أ}^{ب} ٣ جتا ٢ س \, د س =$

(أ) -٣ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) $-\frac{١}{٢}$

(5) $\int_{0}^{ج} س(1-س)\,دس = 0$ ، حيث $ج > 0$. فإن قيمة $ج =$

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{4}{3}$

(6) إذا كان $ص = هـ^{ظاس} + أ\,لو_{هـ}\,قاس + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{دس}{1+ظا^2س}$ وكان

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\frac{\pi}{4}} = 2هـ + 1$ فإن قيمة الثابت $أ =$

(أ) -1 (ب) 1 (ج) 2 (د) -2

(7) إذا كان $\int_{1}^{2} د(س)\,دس = 3$ ، $د(1) = 5$ ، $د(2) = 8$

فما قيمة $\int_{1}^{2} س\,دَ(س)\,دس$ ؟

(أ) صفر (ب) 11 (ج) 5 (د) 8

(8) قيمة $\int_{0}^{4} \sqrt{س^2 - 6س + 9}\,دس =$

(أ) 5 (ب) 4 (ج) 8 (د) 2

(9) إذا كان $د(س)$ معرفاً على الفترة $[-1، 2]$ وكان

$1 \le د(س) \le 4$ فإن أكبر قيمة للمقدار $\int_{-1}^{2} 2د(س)\,دس =$

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 24 (د) 12

(١٠) إذا كان د(س) معرفاً على الفترة [١، ٣] وكان ى تجزئة منتظمة للفترة [١، ٣] بحيث م(ى، د) = $٢ - \frac{٥ - ٣ن}{٢ن}$

فما قيمة $\int_{٣}^{١} ٢د(س) \, ءس$

(أ) ٣٫٥ (ب) -٣٫٥ (ج) ٧ (د) -٧

(١١) إذا كان $\int_{١}^{٢} \left(٢د(س) - س^{٢} - ٦ \right) ءس = ٥٫٠$ ،

فإن $\int_{٢}^{١} \left(\frac{١}{٢} د(س) - س \right) ءس =$

(أ) $-\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) $-\frac{٣}{٢}$

(١٢) إذا كان $\int_{١}^{٣} \left(٢د(س) + ٧هـ(س) \right) ءس = ٢٤$ ،

$\int_{١}^{٣} ٣هـ(س) ءس = -٣٠$ ، $\int_{٨}^{٣} ٣د(س) ءس = -٣٠$ فجد

$\int_{٥}^{١٢} \left(٥د(س - ٤) - ٢س + ١ \right) ءس =$

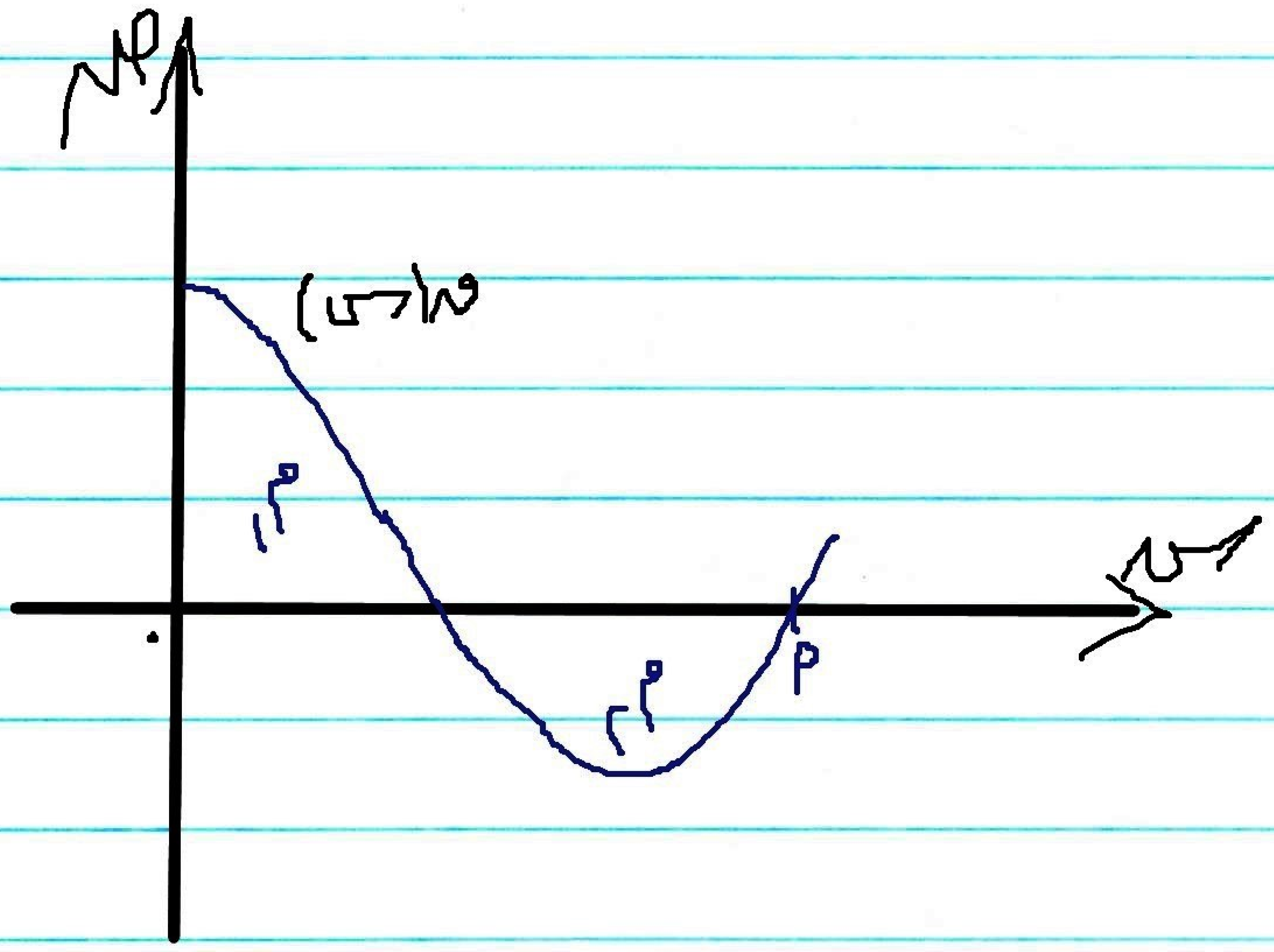
(أ) ١١٢ (ب) -٢٣٥ (ج) ٣٩٧ (د) ٥٠

(١٣) تمثيل الشكل المجاور منحنى ق(س) على الفترة [٠، أ]

فإذا كانت $م_١ = ٨$ وحدة مربعة

$م_٢ = ٦$ وحدات مربعة فإن

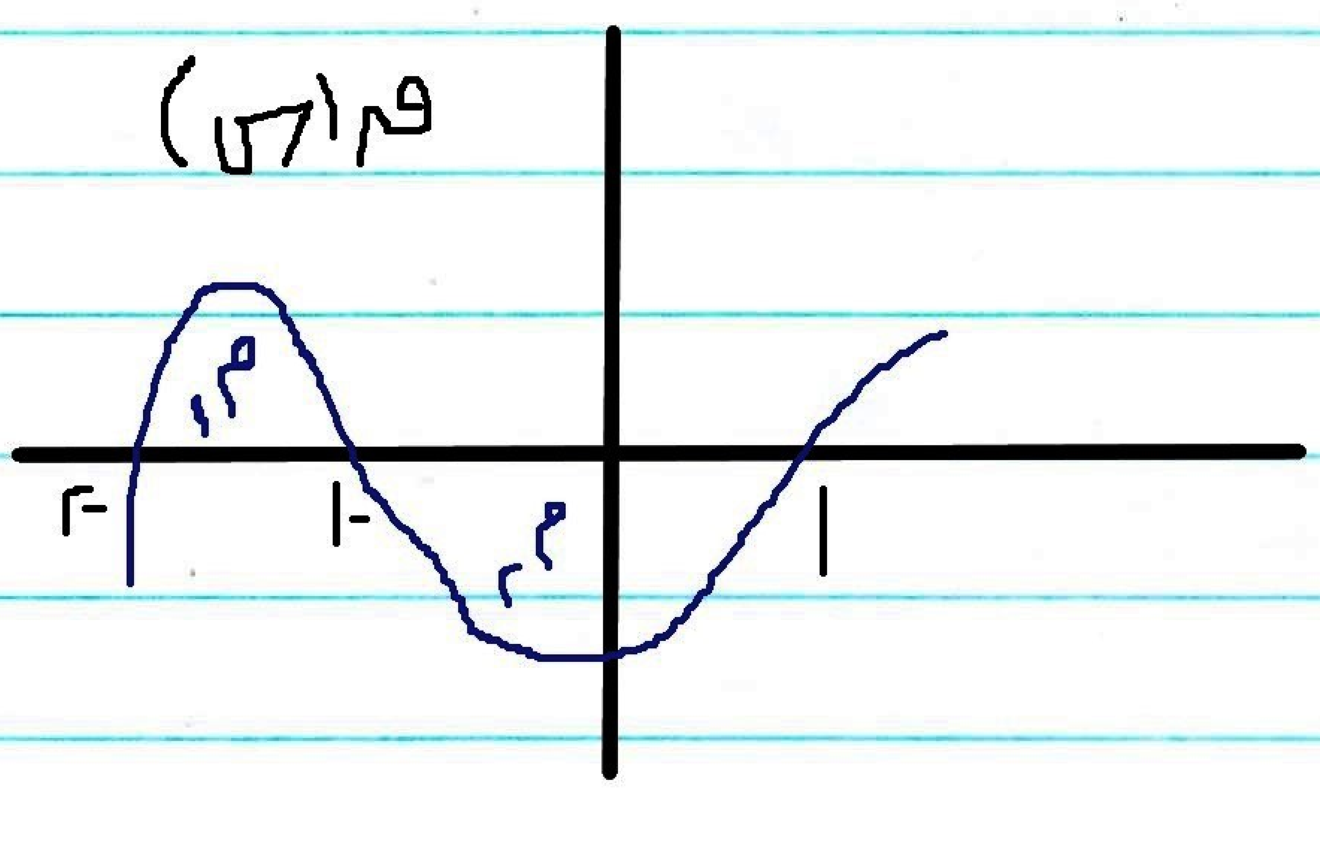
$\int_{٠}^{أ} ق(س) \, دس =$



أ) -١٤   ب) -٢   ج) ١٤   د) ٢

(١٤) في الشكل المجاور $م_١ = ٤$ وحدات مربعة ، $م_٢ = ١٢$ وحدة مربعة

فإن $\int_{-١}^{٢} س \, ق(س^٢ - ٣) \, دس =$



أ) ٤   ب) -٤

ج) -٨   د) ٨

(١٥) ق(س) اقتران متصل ، $\int_{٢}^{س} ق(ص) \, دص = س^٢ - ب س - ١٤$

فإن قيمة ق(٤) =

أ) -٥   ب) ٥   ج) -١٣   د) ١٣

حلول أسئلة اختبار الوحدة الخامسة

مراجعات - دفعة 2004 -

① س٥ = ٥,٥

أ + (ب − أ)/ن × ر = ٥,٥

أ + ٠,٣ × ر = ٥,٥   ٥,٥ − ٥,٢ = ٠,٣

(× ١٠)

١٠أ + ٣ر = ٥٥ ⇐ ١٠أ + ٣ × ٥ = ٥٥

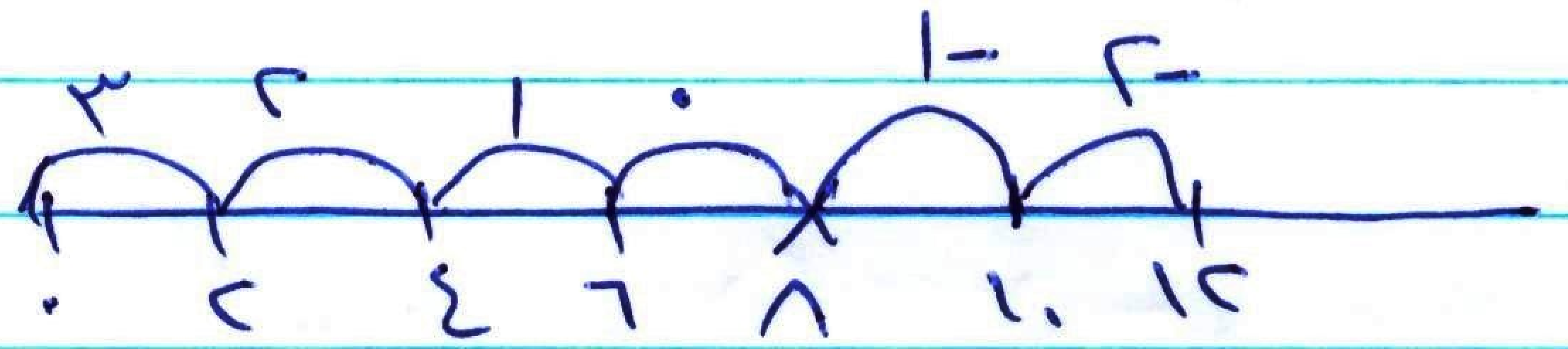
⇐ ١٠أ + ١٥ = ٥٥ ⇐ أ = ٤

(ب − أ)/٢٠ = ٠,٣ ⇐ (ب − ٤)/٢٠ = ٠,٣ ⇐ ب − ٤ = ٦

⇐ ب = ١٠ فرع (ج)

② ∫ من ٠ إلى ٤ [٤ − ½ س] ءس

[٤ − ½ س]



طول الدرجة = ٢

٤ − ½ س = ٠ ⇐ س = ٨

∴ ∫ من ٠ إلى ٤ [٤ − ½ س] ءس = ∫ من ٠ إلى ٢ ٣ ءس + ∫ من ٢ إلى ٤ ٢ ءس

= ٣(٢ − ٠) + ٢(٤ − ٢) = ٦ + ٤ = ١٠

فرع (أ)

5

③ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أ جتا س}} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جا س} + \int^{\pi} \frac{1}{2+\text{جا س}} \, \text{ءس}$

$\text{ص}' = -\text{أ جا س هـ}^{\text{أ جتا س}} + \frac{1}{\text{جا س}} \times \text{جتا س} + \text{صفر}$

$-2 = -\text{أ جا} \frac{\pi}{2} \, \text{هـ}^{\text{أ جتا} \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\text{جا} \frac{\pi}{2}} \times \text{جتا} \frac{\pi}{2}$

$-2 = -\text{أ} \times \text{هـ}^{0} + \frac{1}{1} \times 0 \Leftarrow -2 = -\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = 2$ فرع (أ)

④ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جا}^2 \text{س ءس} = \frac{3}{2}$ ، $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جتا}^2 \text{س ءس} = \frac{1}{2}$

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} 3 (\text{جتا ٢س}) \, \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} 3 (\text{جتا}^2 \text{س} - \text{جا}^2 \text{س}) \, \text{ءس}$

$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} 3 \, \text{جتا}^2 \text{س ءس} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} 3 \, \text{جا}^2 \text{س ءس}$

$= 3 \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

فرع (أ)

⑤ $\int_{0}^{\text{ج}} \text{س} (1 - \text{س}) \, \text{ءس} = 0 \Leftarrow \int_{0}^{\text{ج}} (\text{س} - \text{س}^2) \, \text{ءس} = 0$

$\Leftarrow \left(\frac{1}{2} \text{س}^2 - \frac{1}{3} \text{س}^3 \right) \Big|_{0}^{\text{ج}} = 0 \Leftarrow \frac{1}{2} \text{ج}^2 - \frac{1}{3} \text{ج}^3 = 0 \quad (\times 6)$

$3 \text{ج}^2 - 2 \text{ج}^3 = 0 \Leftarrow \text{ج}^2 (3 - 2\text{ج}) = 0$

إما ج = ٠ مرفوض لأنه ج > ٠.
أو ج = $\frac{3}{2}$ فرع (ب)

⑥

⑥ $ص = هـ^{ظاس} + أ \, لو_{هـ} جتاس + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{دس}{1+ظا^2 س}$

وكانت $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{4}} = ٢هـ + ١$

الحل $\frac{دص}{دس} = هـ^{ظاس} \times قا^2 س + أ \times \frac{-جاس}{جتاس} + صفر$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{4}} = هـ^{ظا\frac{\pi}{4}} \times قا^2\frac{\pi}{4} - أ \, ظا\frac{\pi}{4}$

$٢هـ + ١ = ٢هـ - أ \Leftarrow أ = (-١)$ م ع (أ)

⑦ $\int_{1}^{2} س \, ق''(س) \, دس$

$ص = س$, $دع = ق''(س) \, دس$

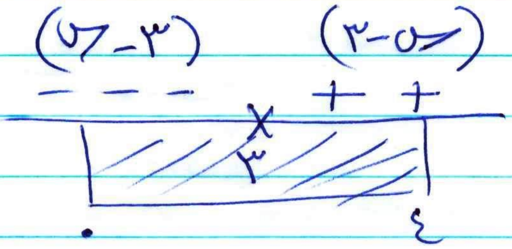
$دص = دس$, $ع = ق'(س)$

$= س \, ق'(س) \Big|_{1}^{2} - \int_{1}^{2} ق'(س) \, دس$

$= ٢ق'(٢) - ق'(١) - ٣ = ٢\times٨ - ٥ - ٣ =$ ⑧ م ع (د)

٨) $\int_{0}^{4} \sqrt{\text{س}^2 - 6\text{س} + 9}\ \text{ءس} = \int_{0}^{4} \sqrt{(\text{س} - 3)^2}\ \text{ءس}$

$= \int_{0}^{4} |\text{س} - 3|\ \text{ءس}$



$\text{س} - 3 = 0 \Leftarrow \text{س} = 3$

$= \int_{0}^{3} (3 - \text{س})\ \text{ءس} + \int_{3}^{4} (\text{س} - 3)\ \text{ءس}$

$= \left[3\text{س} - \frac{\text{س}^2}{2}\right]_{0}^{3} + \left[\frac{\text{س}^2}{2} - 3\text{س}\right]_{3}^{4}$

$= \left[\left(9 - \frac{9}{2}\right) - 0\right] + \left[(8 - 12) - \left(\frac{9}{2} - 9\right)\right] = 4.5 + 0.5 = 5$

٥

فرع (م)

٩) $1 \le \text{ق}(\text{س}) \le 4$

$2 \le 2\text{ق}(\text{س}) \le 8$

$\int_{-1}^{2} 2\ \text{ءس} \le \int_{-1}^{2} 2\text{ق}(\text{س})\ \text{ءس} \le \int_{-1}^{2} 8\ \text{ءس}$

$\left[2\text{س}\right]_{-1}^{2} \le \int_{-1}^{2} 2\text{ق}(\text{س})\ \text{ءس} \le \left[8\text{س}\right]_{-1}^{2}$

$6 \le \int_{-1}^{2} 2\text{ق}(\text{س})\ \text{ءس} \le 24$

أكبر قيمة

فرع (ج)

(10) $م(σن ، ن) = ٢ - \frac{٥ - ٣ن}{٢ن}$

$\int_{١}^{٣} د(س)\, ءس = \lim_{ن \to \infty} م(σن ، ن)$

$= \lim_{ن \to \infty} \frac{٤ن - (٥ - ٣ن)}{٢ن} = \lim_{ن \to \infty} \frac{٧ن - ٥}{٢ن} = \frac{٧}{٢}$

$\Leftarrow \int_{١}^{٣} ٢د(س)\, ءس = ٢ \times \frac{٧}{٢} = ٧$

$\therefore \int_{٣}^{١} ٢د(س)\, ءس = -٧$ فرع (د)

(11) $\int_{١}^{٢} \left(٢د(س) - س^{-٢} - ٦\right) ءس = ٠,٥$

$= \int_{١}^{٢} ٢د(س)\, ءس + \left(س^{-١} - ٦س\right)\Big|_{١}^{٢} = \frac{١}{٢}$

$= \int_{١}^{٢} ٢د(س)\, ءس + \left(\frac{-١}{٢} - ٦\right) = \frac{١}{٢} \Leftarrow \int_{١}^{٢} ٢د(س)\, ءس = ٧$

$\Leftarrow \int_{١}^{٢} د(س)\, ءس = \frac{٧}{٢}$

$\int_{١}^{٢} \left(\frac{١}{٢} د(س) - س\right) ءس = \frac{١}{٢} \int_{١}^{٢} د(س)\, ءس - \int_{١}^{٢} س\, ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٧}{٢} - \frac{١}{٢} س^{٢}\Big|_{١}^{٢}$

$= \frac{٧}{٤} - \left[\frac{٤}{٢} - \frac{١}{٢}\right] = \frac{١}{٤}$ فرع (أ)

(9)

$$\text{(١٢)}\quad \int_{١}^{٣} \left(٢\,\text{د}(\text{س}) + ٧\,\text{هـ}(\text{س})\right) \text{ء}\text{س} = ٢٤$$

$$\int_{١}^{٣} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = -١٠ \quad ،\quad \int_{٨}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = -١٠$$

$$\int_{١}^{٣} ٢\,\text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} + ٧\int_{١}^{٣} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = ٢٤$$

$$\int_{١}^{٣} ٢\,\text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} + ٧ \times -١٠ = ٢٤$$

$$\Leftarrow \int_{١}^{٣} ٢\,\text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = ٢٤ + ٧٠ \Leftarrow ٢\int_{١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = ٩٤$$

$$\Leftarrow \int_{١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = ٤٧$$

$$\int_{٥}^{١٢} \left(٥\,\text{د}(\text{س} - ٤) - ٢\text{س} + ١\right) \text{ء}\text{س}$$

افرض $\text{س} - ٤ = \text{ص} \Leftarrow \text{ء}\text{س} = \text{ء}\text{ص}$

عندما $\text{س} = ٥ \Leftarrow \text{ص} = ١$

عندما $\text{س} = ١٢ \Leftarrow \text{ص} = ٨$

$$\Leftarrow = \int_{٥}^{١٢} ٥\,\text{د}(\text{س} - ٤)\,\text{ء}\text{س} + \int_{٥}^{١٢} (-٢\text{س} + ١)\,\text{ء}\text{س}$$

$$= \int_{١}^{٨} ٥\,\text{د}(\text{ص})\,\text{ء}\text{ص} + \left(-\text{س}^{٢} + \text{س} \Big|_{٥}^{١٢}\right)$$

$$= \left[\int_{١}^{٣} ٥\,\text{د}(\text{ص})\,\text{ء}\text{ص} + \int_{٣}^{٨} ٥\,\text{د}(\text{ص})\,\text{ء}\text{ص}\right] + \left[(-١٥ + ١٢) - (-٢٥ + ٥)\right]$$

10

$$= ٥ \times ٤٧ + ٥ \times ١٠ + (-١٣٢ + ٢٠)$$

$$= ٢٣٥ + ٥٠ + ١١٢ = ٣٩٧ \quad \text{فرع ج}$$

(١٣) $$\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} = ٨ + (-٦) = ٢ \quad \text{فرع د}$$

(١٤) $$\int_{-١}^{٢} \text{س}\, \text{د}(\text{س}^٢ - ٣)\, \text{دس}$$

افرض $\text{ص} = \text{س}^٢ - ٣$

$$\text{دص} = ٢\text{س}\, \text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$$

عندما $\text{س} = -١$ فإن $\text{ص} = -٢$

عندما $\text{س} = ٢$ فإن $\text{ص} = ١$

$$\int_{-١}^{٢} \text{س}\, \text{د}(\text{س}^٢ - ٣)\, \text{دس} = \int_{-٢}^{١} \cancel{\text{س}}\, \text{د}(\text{ص}) \frac{\text{دص}}{٢\cancel{\text{س}}}$$

(*) $$= \frac{١}{٢} \int_{-٢}^{١} \text{د}(\text{ص})\, \text{دص}$$

$$\text{م}_١ = \int_{-٢}^{-١} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} = ٤$$

$$\text{م}_٢ = \int_{-١}^{١} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} = -١٢$$

$$\text{م}_١ + \text{م}_٢ = \text{م} = \int_{-٢}^{١} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} + \int_{-١}^{١} \text{د}(\text{س})\, \text{دس}$$

$= \int_{-٢}^{١} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = ٤ + (-١٢) = -٨$

$\therefore \int_{-٢}^{١} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = -٨$ نعوض في (*)

$\therefore$ التكامل المطلوب $= \frac{١}{٢} \times -٨ = -٤$

(١٥) $\int_{\text{س}}^{٢} \text{د}(\text{ص})\,\text{دص} = \text{س}^٢ - \text{ب}\,\text{س} - ١٤$

$-\text{ت}(\text{س}) = \text{س}^٢ - \text{ب}\,\text{س} - ١٤$

$-\text{تَ}(\text{س}) = ٢\text{س} + ٥$

$\text{د}(\text{س}) = -٢\text{س} + ٥$

$\text{د}(٤) = -٢ \times ٤ + ٥$

$= -١٣$ فرع (ج)

$-\text{ت}(٢) = (٢)^٢ - ٢\text{ب} - ١٤$

$٠ = ٤ - ٢\text{ب} - ١٤$

$\Leftarrow ١٠ = -٢\text{ب}$

$\Leftarrow \text{ب} = -٥$

رياضيات الثاني عشر علمي

اختبار الوحدة (٣، ٤، ٥)

مراجعات دفعة ٢٠٢٢

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة (الثالثة، الرابعة، الخامسة)

مراجعات - دفعة 2004 -

① $\int_{-1}^{1}$ س قَ(س٤) ءس =

(أ) ١ (ب) -١ (ج) صفر (د) ٢

٢) إذا علمت أن ميل المماس لمنحنى ه(س) عند (س، ص) هو ه$^{(ن)}$(س) = ٣ × ه(س) وكان ه(س) يمر بالنقطة (١، هـ) حيث هـ (العدد النيبيري) فإن ه(س) =

(أ) هـ$^{(س+٢)}$ + ٧ (ب) هـ$^{(س-١)}$ (ج) هـ$^{(٣س-١)}$ (د) هـ$^{-س}$

٣) إذا كان أ من الرتبة الثانية وكان أ$_{١٢}$ = ١٦، |أ| = ٤

فإن قيمة أ$^{-١}_{١٢}$ =

(أ) ٤ (ب) -٤ (ج) ١٦ (د) -١٦

٤) إذا كان ق(س) جا س - ه(س) جتا س = ٠، وكان ه($\frac{\pi}{٣}$)

= $\sqrt{٣}$ ، جد ه($\frac{\pi}{٤}$)

(أ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ب) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ج) ١ (د) -١

⑤ قيمة $\displaystyle\int \frac{هـ^{س}\ ظتا هـ^{س} - ١}{لو_{هـ}\left(\frac{جا هـ^{س}}{هـ^{س}}\right)}$ ءس =

أ) $لو_{هـ}\left(\frac{جا هـ^{س}}{هـ^{س}}\right) + جـ$ ب) $لو_{هـ}\left|لو_{هـ}\left(\frac{جا هـ^{س}}{هـ^{س}}\right)\right| + جـ$

جـ) $لو_{هـ}\left(\frac{هـ^{س}}{جا س}\right) + جـ$ د) $لو_{هـ}\left|لو_{هـ}\left(جا هـ^{س}\right)\right| + جـ$

⑥ إذا كان د(س) ≥ ٢ ∀ س ∈ [−١، ٢] فإن أصغر قيمة للمقدار $\displaystyle\int_{-١}^{٢}$ (٢د(س) − ٣) ءس =

أ) ٣ ب) ٧ جـ) ٢ د) −١

⑦ إذا كان $\int$ س^٣ لو_هـ س ءس = $\frac{١}{٤}$ س^٤ لو_هـ س + $\int$ ع ءهـ فإن قيمة ع ءهـ =

أ) س (−١ + لو_هـ س) ب) س ($-\frac{١}{٢}$ + لو_هـ س)

جـ) −س ءس د) لو_هـ س ءس

٨) إذا كان $\int_{م}^{ب} [\frac{1}{2} س + ٣] \, دس = ٢٤$ ، ب > ٠ ، فإن قيمة ب =

أ) ٦ ب) ٧ جـ) -٧ د) -٦

٩) إذا كان $ح_ن$ تجزئة منتظمة للفترة [م ، ٢١] وكان العنصر السادس فيها يساوي ١١ ، $س_٩ = ١٩$ فما عدد عناصر التجزئة

أ) ١٠ ب) ١١ جـ) ٢٠ د) ١٢

١٠) إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على الفترة [١ ، ٥] وكانت $ح_ن$ تجزئة منتظمة للفترة نفسها وكان م($ح_ن$ ، ق) = $\frac{ب ن^2 + ب ن + ١}{٢ن^2 + ٣}$ وكان $\int_{م}^{ٮ} ق(س-١) \, دس = ٨$ ، فما قيمة/قيم

ب = ١٢

أ) ٤ ب) ±٤ جـ) $\sqrt{٨}$ د) ٢

١١) إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} س & -١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ وكان

$\frac{1}{2}|أ| + |ب| = ٢$ فما قيمة/قيم س

أ) ٠ ، ١ ب) -١ جـ) ١ د) ٠ ، -١

(١٢) حل النظام التالي بطريقة جاوس: س + ٣ص − ٢ع = ٥

٢ص + ٣ع = ٢

س − ص + ع = ١

(أ) {س = ١ ، ص = ٠ ، ع = ٢}

(ب) {س = ٠ ، ص = ١ ، ع = ٢}

(ج) {س = −١ ، ص = ٠ ، ع = ٢}

(د) {س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ٠}

(١٣) ∫ هـ^٢س / ((هـ^س − ٢)(هـ^س − ١)) ءس

(أ) − لوهـ |٢ − هـ^س| + لوهـ |هـ^س − ١| + ث

(ب) − لوهـ |هـ^س + ١| + لوهـ |٢ + هـ^س| + ث

(ج) لوهـ |(هـ^س − ١) / (٢ − هـ^س)| + ث

(د) أ + ج صحيحان

(١٤) عند حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بكرامر وُجد أن

٢|أس أص| = ١٢ ، |أ| − ٢|أص| = ٠ ، |−٢أ| = ٨

فإن قيمة س ، ص على الترتيب :

(أ) $\frac{١}{٢}$ ، ٣ (ب) −$\frac{١}{٢}$ ، ٣ (ج) ٣ ، $\frac{١}{٢}$ (د) −٣ ، −$\frac{١}{٢}$

(١٥) إذا كان

$$\begin{vmatrix} \text{٣س} & \text{أ} & \text{٢} \\ \text{٠} & \text{−١} & \text{٢} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{٤} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{٢} & \text{٤} \\ \text{−٧} & \text{س} \end{vmatrix}$$

فإن قيمة س =

(أ) ٢ (ب) −٢ (ج) ٣ (د) ١

حلول أسئلة اختبار الوحدة

(5 ، 4 ، 3)

مراجعات دفعة 2004

① $\int_{-1}^{1} \text{س}\ \text{ق}(\text{س}^2)\ \text{د}\text{س}$

افرض $\text{ص} = \text{س}^2 \Leftarrow \text{د}\text{ص} = 2\text{س}\ \text{د}\text{س} \Leftarrow \text{د}\text{س} = \frac{\text{د}\text{ص}}{2\text{س}}$

عندما $\text{س} = -1 \Leftarrow \text{ص} = 1$

عندما $\text{س} = 1 \Leftarrow \text{ص} = 1$

$$\int_{-1}^{1} \text{س}\ \text{ق}(\text{س}^2)\ \text{د}\text{س} = \int_{-1}^{1} \cancel{\text{س}}\ \text{ق}(\text{ص})\ \frac{\text{د}\text{ص}}{\cancel{2\text{س}}} = \frac{1}{2}\int_{1}^{1} \text{ق}(\text{ص})\ \text{د}\text{ص}$$

= صفر فرع (ج)

② ب ميل المماس هو المشتقة الأولى

$\Leftarrow \text{ن} = 1 \Leftarrow \text{ق}^{(\text{ن})}(\text{س}) = 2^{\text{ن}} \times \text{ق}(\text{س})$

$\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = 2^{1} \times \text{ق}(\text{س})$ [÷ ق(س)]

(بتكامل الطرفين)

$$\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} = 2$$

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\ \text{د}\text{س} = \int 2\ \text{د}\text{س}$$

$\Leftarrow$ لوهـ |ق(س)| = ٢س + جـ

$$هـ^{\text{لوهـ}\,|ق(س)|} = هـ^{٢س + جـ}$$

$\Leftarrow$ ق(س) = $هـ^{٢س+جـ}$ $\Leftarrow$ ق(س) = $هـ^{٢س} \times هـ^{جـ}$

لكن ق(س) تمر بالنقطة (١، هـ)

$\Leftarrow$ ق(١) = هـ

∴ ق(١) = $هـ^{٢} \times هـ^{جـ}$ = هـ $\Leftarrow$ ق(١) = $هـ^{٢+جـ}$ = $هـ^{١}$

$\Leftarrow$ ٢ + جـ = ١ $\Leftarrow$ جـ = -١

∴ $\boxed{ق(س) = هـ^{٢س-١}}$

(٣) بـ أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

∴ نفرض أن $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ ١٦ & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$

|أ| = ٤ .

$$أ^{-١} = \frac{١}{٤} \begin{bmatrix} أ_{٢٢} & -أ_{١٢} \\ -١٦ & أ_{١١} \end{bmatrix}$$

$(أ_{١٢})^{-١} = \frac{١}{٤} \times -١٦ = -٤$ فرع (ب)

④ قَ(س) جاس = ق(س) جتاس $\quad$ [÷ ق(س) جاس]

قَ(س) / ق(س) = جتاس / جاس $\quad$ (تكامل الطرفين)

∫ قَ(س) / ق(س) ءس = ∫ جتاس / جاس ءس

لوهـ |ق(س)| = لوهـ |جاس| + جـ

هـ^(لوهـ |ق(س)|) = هـ^(لوهـ |جاس| + جـ)

هـ^جـ = أ
ثابت

ق(س) = جاس × هـ^جـ

ق(س) = أ جاس

لكن ق($\frac{\pi}{4}$) = $\sqrt{2}$ ⇐ $\sqrt{2}$ = أ جا $\frac{\pi}{4}$ ⇐ أ = $\sqrt{2}$

∴ ق(س) = $\sqrt{2}$ جاس

ق($\frac{\pi}{4}$) = $\sqrt{2}$ جا $\frac{\pi}{4}$ = $\sqrt{2}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = 1 فرع (جـ)

(٥) افرض $ص = لو_{هـ}\left[\dfrac{جا\,هـ^{س}}{هـ^{س}}\right]$

$\therefore ص = لو_{هـ} جا\,هـ^{س} - لو_{هـ} هـ^{س} = لو_{هـ} جا\,هـ^{س} - س$

$دص = \left[\dfrac{جتا\,هـ^{س} \times هـ^{س}}{جا\,هـ^{س}} - ١\right] دس$

$\Leftarrow دص = \left(هـ^{س}\, ظتا\,هـ^{س} - ١\right) دس$

$\therefore \int \dfrac{هـ^{س}\, ظتا\,هـ^{س} - ١}{لو_{هـ}\left[\dfrac{جا\,هـ^{س}}{هـ^{س}}\right]} دس = \int \dfrac{١}{ص} دص$

$= لو_{هـ}|ص| + جـ = لو_{هـ}\left|لو_{هـ}\left[\dfrac{جا\,هـ^{س}}{هـ^{س}}\right]\right| + جـ$

(٦) $ق(س) \le ٢ \Leftarrow ٢ق(س) \le ٤ \Leftarrow ٢ق(س) - ٣ \le ١$

$\int_{-١}^{٢} (٢ق(س) - ٣)\, دس \le \int_{-١}^{٢} ١\, دس$

$\int_{-١}^{٢} (٢ق(س) - ٣)\, دس \le ١(٢ - (-١))$

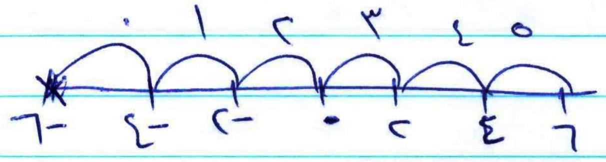
$\int_{-١}^{٢} (٢ق(س) - ٣)\, دس \le (٣)$ $\therefore$ أكبر قيمة للمقدار هي (٣)

فرع (أ)

(4)

٧) الرجوع لـ س٣ ص ١٦٦ من الكتاب الوزاري.

٨) $\int_{٢}^{\text{ب}} \left[\frac{١}{٢}\text{س}+٣\right]\text{ء}\text{س} = ٢٤$ ، $\text{ب} > ٠$.



$\left[\frac{١}{٢}\text{س}+٣\right]$

طول الدرجة = ٢

$\frac{١}{٢}\text{س}+٣=٠ \Leftarrow \text{س} = -٦$

$\int_{٢}^{٤} ٤\,\text{ء}\text{س} + \int_{٤}^{٦} ٥\,\text{ء}\text{س} + \int_{٦}^{\text{ب}} ٦\,\text{ء}\text{س} = ٢٤$

$٤(٤-٢) + ٥(٦-٤) + ٦(\text{ب}-٦) = ٢٤$

$٨+١٠+٦\text{ب}-٣٦ = ٢٤ \Leftarrow ٦\text{ب} = ٤٢ \Leftarrow \text{ب} = ٧$

ضع (ب)

٩) $\text{ح}_{٥} = \text{أ} + \frac{٢١-\text{أ}}{\text{ن}} \times ٥$

$١١ = \text{أ} + \frac{٢١-\text{أ}}{\text{ن}} \times ٥ \longleftarrow (*)$

$\text{ح}_{٩} = \text{أ} + \frac{٢١-\text{أ}}{\text{ن}} \times ٩$

$١٩ = \text{أ} + \frac{٢١-\text{أ}}{\text{ن}} \times ٩ \longleftarrow (**)$

بطرح (*) من (**) ينتج $٨ = \frac{٢١-\text{أ}}{\text{ن}} \times ٤$ [÷ ٤]

$د = \frac{٢١ - أ}{ن}$ ← (***)

عوض في (*) عن $\frac{٢١ - أ}{ن}$

١١ = أ + ٢ × ٥ ⇐ ١١ = أ + ١٠ ⇐ أ = (١)

عوض في (***) ⇐ $\frac{٢١ - ١}{ن} = ٢$ ⇐ $\frac{٢٠}{ن} = ٢$

⇐ ن = ١٠

∴ عدد عناصر التجزئة = ن + ١

= (١١) فرع (ب)

(١٠) $\int_{٢}^{٦}$ ق(س - ١) ءس = ٨

افرض ص = س - ١ ⇐ ءص = ءس

عندما س = ٢ ⇐ ص = ١

عندما س = ٦ ⇐ ص = ٥

∴ $\int_{٢}^{٦}$ ق(س - ١) ءس = $\int_{١}^{٥}$ ق(ص) ءص = ٨

= $\int_{١}^{٥}$ ق(س) ءس = نهـا$_{ن \to \infty}$ $\frac{ب^{٢}ن^{٢} + ب ن + ١}{٢ن^{٢} + ٣}$

= ٨

⇐ $\frac{١}{٢}$ ب^{٢} = ٨ ⇐ ب^{٢} = ١٦

∴ ب = ± ٤ فرع (ب)

(١١) |أ| = ٢س × س − ٢

= ٢س^٢ − ٢

½ |أ| = س^٢ − ١

كذلك |ب| = س + ٣

½ |أ| + |ب| = ٢ ⟸ س^٢ − ١ + س + ٣ = ٢

⟸ س^٢ + س = ٠ ⟸ س (س + ١) = ٠

∴ س = ٠ أو س = −١ مرع (د)

(١٢)

$$أ = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & -٢ & ٥ \\ ٠ & ٢ & ٣ & ٢ \\ ١ & -١ & ١ & ١ \end{array}\right]$$

$$-ص_١ + ص_٣ \Leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & -٢ & ٥ \\ ٠ & ٢ & ٣ & ٢ \\ ٠ & -٤ & ٣ & -٤ \end{array}\right]$$

$$\Leftarrow (٢ص_٢ + ص_٣) \Leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & -٢ & ٥ \\ ٠ & ٢ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٩ & ٠ \end{array}\right]$$

٩ع = ٠ ⟸ ع = صفر مرع (د)

٢ص + ٣ع = ٢ ⟸ ٢ص = ٢ ⟸ ص = ١

س + ٣ص − ٢ع = ٥ ⟸ س + ٣ − ٠ = ٥ ⟸ س = ٢

(١٣) $$\int \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{(٢-\text{هـ}^{\text{س}})(\text{هـ}^{\text{س}}-١)}\, \text{د}\text{س}$$

افرض $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\Leftarrow \text{دص} = \text{ص}\,\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$

$$\int \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{(٢-\text{هـ}^{\text{س}})(\text{هـ}^{\text{س}}-١)}\, \text{دس} = \int \frac{\cancel{\text{ص}^{٢}}}{(٢-\text{ص})(\text{ص}-١)} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{ص}}}$$

$$= \int \frac{\text{ص}}{(٢-\text{ص})(\text{ص}-١)}\, \text{دص}$$ (نتكامل بالكسور الجزئية)

$$\frac{\text{ص}}{(٢-\text{ص})(\text{ص}-١)} = \frac{\text{أ}}{(٢-\text{ص})} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص}-١)}$$

$\text{ص} = \text{أ}(\text{ص}-١) + \text{ب}(٢-\text{ص})$

عندما $\text{ص} = ١ \Leftarrow \text{ب} = ١$

عندما $\text{ص} = ٢ \Leftarrow \text{أ} = ١$

$$\therefore \int \frac{\text{ص}}{(٢-\text{ص})(\text{ص}-١)}\, \text{دص} = \int \frac{١}{(٢-\text{ص})}\, \text{دص} + \int \frac{١}{(\text{ص}-١)}\, \text{دص}$$

$$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|٢-\text{ص}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-١| + \text{ج}$$

$$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|٢-\text{هـ}^{\text{س}}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}-١| + \text{ج}$$ ✓

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{\text{هـ}^{\text{س}}-١}{٢-\text{هـ}^{\text{س}}}\right| + \text{ج}$$ ✓ غع (5)

(8)

(١٤) |أ| − ٢|أ ص| = ٠ ⇐ |أ| = ٢|أ ص|

⇐ (٢) = ٢|أ ص| ⇐ |أ ص| = ١

* |−٢أ| = ٨ ⇐ (−٢)٢|أ| = ٨ ⇐ ٤|أ| = ٨ ⇐ |أ| = ٢

٢|أ س . أ ص| = ١٢

٢[|أ س| . |أ ص|] = ١٢ ⇐ ٢[|أ س| . ١] = ١٢

⇐ |أ س| = ١٢ / ٢ = (٦)

س = |أ س| / |أ| = ٦ / ٢ = (٣)

ص = |أ ص| / |أ| = (١ / ٢)   ض ع (جـ)

(١٥) ٣س (−٤ ، ١) − ٢(١ ، −١) + ٢(−١ ، ١) = ٢س + ٢٨

⇐ −١٢س = ٢س + ٢٨

⇐ −١٤س / −١٤ = ٢٨ / ١٤ ⇐ س = (−٢)   ض ع (ب)