** اختبارات الفصل الأول لمبحث الرياضيات للثاني عشر علمي دفعة ٢٠٢٢ **

- ✓اختبارات الوحدة الأولى كاملة مع حلولها.
- ✓اختبارات الوحدة الثانية كاملة مع حلولها.
- ✓اختبار الوحدة الأولى مراجعات.
- ✓اختبار الوحدة الثانية مراجعات.
- ✓اختبار الوحدة الأولى والثانية مراجعات.

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

تمنياتي لكم بالتفوق والتميز

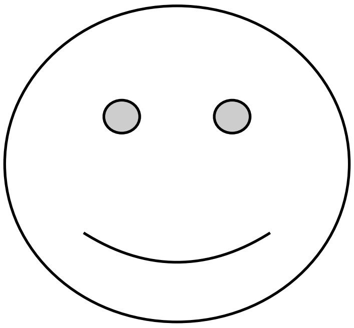
رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

اختبارات الوحدة الأولى دفعة 2022 مع الحلول

- اختبار درس متوسط التغير.
- اختبار درس قواعد الاشتقاق.
- اختبار درس مشتقة الاقتران الأسي واللوغارتمي.
- اختبار قاعدة لوبيتال، مشتقة الاقتران الأسي واللوغارتمي.
- اختبار تطبيقات هندسية.
- اختبار تطبيقات فيزيائية.
- اختبار درس قاعدة السلسلة.
- اختبار درس الاشتقاق الضمني.
- اختبار الوحدة الأولى.

تمنياتي لكم بالتفوق والتميز

أ. هدى أسامة فرج



اختبار درس متوسط التغير

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة 2004

① إذا كان $ق(س+١) = س^{٢} + ٣س + ب$ ، فما متوسط تغير $ق(س)$ في الفترة $[-١ ، ٢]$

أ) -١ ب) ٢ جـ) -٢ د) ١

② إذا كان متوسط تغير $ق(س)$ في $[١ ، ٢] = ٤$ ، فإن متوسط تغير $هـ(س) = ق(١ + جاس)$ في الفترة $[\frac{\pi}{٢} ، \pi]$

أ) $-\frac{٨}{\pi}$ ب) $\frac{٨}{\pi}$ جـ) $\frac{\pi}{٨}$ د) $-\frac{\pi}{٨}$

③ إذا كان متوسط التغير للاقتران $ق(س) = جتاس - أ جاس$ في الفترة $[\frac{\pi}{٢} ، \pi]$ يساوي $(\frac{٤}{\pi})$ فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٣ ب) $\frac{٣}{٢}$ جـ) -٣ د) ٢π

④ إذا كان $ق(س) = \sqrt{س+١}$ ، $س \in [٣ ، ب]$ ، جد قيمة الثابت ب علماً أن متوسط تغير $ق(س)$ في نفس الفترة يساوي $\frac{١}{٢+\sqrt{٥}}$

أ) -٤ ب) $٢+\sqrt{٥}$ جـ) $٢-\sqrt{٥}$ د) ٤

⑤ إذا كان $هـ(س) = أ ق(س) + ٢س - ١$ ، جد قيمة الثابت أ علماً بأن متوسط التغير في الاقتران $هـ(س)$ في $[١ ، ٣]$ يساوي ٤ والمستقيم الواصل بين النقطتين $(١ ، ق(١))$ ، $(٣ ، ق(٣))$ يصنع زاوية مقدارها $١٣٥°$ مع محور السينات الموجب

أ) ٨ ب) -٢ جـ) -٨ د) ٢

⑥ إذا كان
$$ق(س) = \begin{cases} |س^{٢} + ٣| ، & س < ٢ \\ [٣س + ١] ، & س \geq ٢ \end{cases}$$

وتغيرت س من ١ إلى ٢٫٥ أوجد التغير في $ق(س)$

أ) ٨ ب) -٤ جـ) -٢ د) ٤

⑦ احسب قيمة متوسط التغير في حجم مكعب من الثلج عندما يوضع في درجة حرارة مرتفعة حيث يتغير طول ضلعه من ٣سم إلى ١سم في الدقيقة.

أ) ١٣ ب) -١٣ ج) ٤ د) -٤

⑧ يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = { ٢ن^٢ ، ٠ ≤ ن ≤ ٢

٣ن - أ ، ن > ٢

وكانت السرعة المتوسطة له في الفترة الزمنية [١، ٣] تساوي ٩م/ث فأوجد الثابت أ ؟!

أ) -١٨ ب) ١٨ ج) -١١ د) ١١

⑨ إذا كان ق(س) = [$\frac{١}{٢}$س - ١] فجد متوسط التغير في الاقتران ق في الفترة [٣، ٥]

أ) $-\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٣}{٢}$ ج) $-\frac{١}{٢}$ د) $\frac{١}{٢}$

⑩ إذا كان ق(س) = { |٢س - ٣| ، ٠ ≤ س < ٢

[س + ١] ، ٢ ≤ س < ٦

فجد متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٤

أ) $\frac{٤}{٣}$ ب) $-\frac{٤}{٣}$ ج) ٢ د) $\frac{٣}{٤}$

حلول أسئلة اختبار درس
متوسط التغير

① إذا كان د(س+١) = $\text{س}^{٢}$ + ٣س + ب ، فما متوسط تغير د(س) في الفترة [-١، ٢]

الحل: متوسط تغير د(س) في الفترة [-١، ٢] = $\frac{\text{د(٢) - د(-١)}}{٣}$

* عندما س+١ = ٢ ⟸ س = ١

د(٢) = ١ + ٣ + ب

د(٢) = ٤ + ب

* عندما س+١ = -١ ⟸ س = -٢

د(-١) = ٤ - ٦ + ب

د(-١) = -٢ + ب

متوسط تغير د(س) في الفترة [-١، ٢] = $\frac{\text{٤ + ب - (-٢ + ب)}}{٣}$

= $\frac{\text{٤} + \cancel{\text{ب}} + \text{٢} - \cancel{\text{ب}}}{٣}$ = $\frac{٦}{٣}$ = ②

---

② إذا كان متوسط تغير د(س) في [١، ٢] = ٤ فما هو متوسط تغير هـ(س) = د(١+جاس) في الفترة [$\frac{\pi}{٢}$، π]

الحل: متوسط تغير د(س) في [١، ٢] = $\frac{\text{د(٢) - د(١)}}{١}$ = ٤

⟸ $\boxed{\text{د(٢) - د(١) = ٤}}$ ← ①

متوسط تغير هـ(س) في [$\frac{\pi}{٢}$، π] = $\frac{\text{هـ}(\pi) - \text{هـ}(\frac{\pi}{٢})}{\frac{\pi}{٢}}$

= $\frac{\text{د}(١ + \overset{٠}{\cancel{\text{جا}\,\pi}}) - \text{د}(١ + \overset{١}{\cancel{\text{جا}\,\frac{\pi}{٢}}})}{\frac{\pi}{٢}}$

= $\frac{\text{د(١) - د(٢)}}{\frac{\pi}{٢}}$

= $\frac{-\left[\text{د(٢) - د(١)}\right]}{\frac{\pi}{٢}}$ عوض من ①

= $\frac{-٤}{\frac{\pi}{٢}}$ = $-٤ \times \frac{٢}{\pi}$ = $\boxed{\frac{-٨}{\pi}}$

③ إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = جتاس − أ جاس في الفترة $[\frac{\pi}{2} ، \pi]$ يساوي $(\frac{4}{\pi})$ فما قيمة الثابت أ ؟

الحل متوسط تغير ق(س) = $\frac{ق(\pi) - ق(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$

⇐ $\frac{(جتا\,\pi - أ\,جا\,\pi) - (جتا\,\frac{\pi}{2} - أ\,جا\,\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$

⇐ $\frac{(-1 - 0) - (0 - أ)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$ ⇐ $\frac{-1+أ}{\frac{\pi}{2}} \times \frac{4}{\pi}$

$(-1+أ)\,\pi = 4 \times \frac{\pi}{2}$ ⇐ $(-1+أ)\,\pi = 2\pi$

⇐ $-1+أ = 2$

⇐ $\boxed{أ = 3}$

④ إذا كان ق(س) = $\sqrt{س+1}$ ، س ∈ [3 ، ب] جد قيمة الثابت ب علماً أن متوسط تغير ق(س) في نفس الفترة يساوي $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$

الحل متوسط تغير ق(س) في الفترة [3 ، ب] = $\frac{ق(ب) - ق(3)}{ب - 3} = \frac{1}{2+\sqrt{5}}$

⇐ $\frac{\sqrt{ب+1} - 2}{ب - 3} = \frac{1}{2+\sqrt{5}}$ (اضرب بمرافق البسط)

⇐ $\frac{\sqrt{ب+1} - 2}{ب - 3} \times \frac{\sqrt{ب+1} + 2}{\sqrt{ب+1} + 2} = \frac{1}{2+\sqrt{5}}$

⇐ $\frac{ب + 1 - 4}{(ب - 3)(\sqrt{ب+1} + 2)} = \frac{1}{2+\sqrt{5}}$ ⇐ $\frac{\cancel{(ب-3)}}{\cancel{(ب-3)}(\sqrt{ب+1}+2)} \times \frac{1}{2+\sqrt{5}}$

$\cancel{2}+\sqrt{5} = \sqrt{ب+1} + \cancel{2}$ (تربيع الطرفين)

$5 = ب + 1$

⇐ $\boxed{ب = 4}$

⑤ إذا كان هـ(س) = أ ق(س) + ٢س − ١ ، جد قيمة الثابت أ علماً بأن متوسط التغير في الاقتران هـ(س) في [١ ، ٣] يساوي ٤ ، والمستقيم الواصل بين النقطتين (١ ، ق(١)) ، (٣ ، ق(٣)) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع محور السينات الموجب

(الحل) ميل المستقيم من النقطتين = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الجزء الموجب لمحور السينات

$= \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣ - ١} = \text{ظا } ١٣٥°$

⇐ $\boxed{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١) = -٢}$ ← ①

متوسط تغير هـ(س) = $\frac{\text{هـ}(٣) - \text{هـ}(١)}{٢} = ٤$

⇐ هـ(٣) − هـ(١) = ٨

أ ق(٣) + ٥ − (أ ق(١) + ١) = ٨

$\underbrace{\text{أ ق}(٣)} + ٥ - \underbrace{\text{أ ق}(١)} - ١ = ٨$

أ [ق(٣) − ق(١)] + ٤ = ٨ ⇐ أ [−٢] = ٤

⇐ أ = $\frac{٤}{-٢}$ = (−٢)

⑥ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} |\text{س}^٤ + ٣| & ، \text{س} < ٢ \\ [٣\text{س} + ١] & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

وتغيرت س من ١ إلى ٢٫٥ أوجد التغير في الاقتران ق(س)

(الحل) التغير في الاقتران ق(س) = ق(س$_٢$) − ق(س$_١$)

= ق(٢٫٥) − ق(١)

= [٣ × ٢٫٥ + ١] − |١ + ٣|

= [٨٫٥] − |٤|

= ٨ − ٤ = ④

⑦ احسب قيمة متوسط التغير في حجم مكعب من الثلج عندما يوضع في الشمس حيث يتغير طول ضلعه من ٣سم إلى ١سم في ١ دقيقة.

(الحل) حجم المكعب الذي طول ضلعه س = س^٣

س$_١$ = ٣سم ، س$_٢$ = ١سم

متوسط التغير في حجم المكعب = $\frac{\text{ق}(١) - \text{ق}(٣)}{١ - ٣} = \frac{(١)^٣ - (٣)^٣}{-٢}$

$= \frac{١ - ٢٧}{-٢} = \frac{-٢٦}{-٢}$

= (١٣)

⑧ يتحرك جسم حسب العلاقة $\text{ف}(\text{ن}) = \begin{cases} \text{٢ن}^{٢} & \text{،}\quad ٠ \le \text{ن} \le ٢ \\ \text{٣ن} - \text{أ} & \text{،}\quad \text{ن} > ٢ \end{cases}$

وكانت السرعة المتوسطة له في الفترة الزمنية $[١ ، ٣]$ تساوي ٩ م/ث فأوجد الثابت أ ؟

(الحل) $\text{السرعة المتوسطة} = \dfrac{\text{ف}(٣) - \text{ف}(١)}{٢}$

$$= \frac{(٣ \times ٣ - \text{أ}) - (٢(١)^{٢})}{٢} = ٩$$

$$= \frac{٩ - \text{أ} - ٢}{٢} = ٩ \Leftarrow \frac{-\text{أ} + ٧}{٢} = ٩$$

$$\Leftarrow -\text{أ} + ٧ = ١٨ \Leftarrow -\text{أ} = ١١ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -١١}$$

⑨ إذا كان $\text{د}(\text{س}) = [\tfrac{١}{٢}\text{س} - ١]$ نجد متوسط التغير في الاقتران د في الفترة $[٣ ، ٥]$

(الحل) $\text{متوسط التغير} = \dfrac{\text{د}(٥) - \text{د}(٣)}{٢} = \dfrac{[\tfrac{١}{٢} \times ٥ - ١] - [\tfrac{١}{٢} \times ٣ - ١]}{٢}$

$$= \frac{[١٫٥] - [٠٫٥]}{٢}$$

$$= \frac{١ - ٠}{٢} = \boxed{\tfrac{١}{٢}}$$

---

⑩ إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{٢س} - ٣| & \text{،}\quad ٠ \le \text{س} < ٢ \\ [\text{س} + ١] & \text{،}\quad ٢ \le \text{س} < ٦ \end{cases}$

نجد متوسط تغير د(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٤

(الحل) $\text{متوسط تغير د(س)} = \dfrac{\text{د}(٤) - \text{د}(١)}{٣}$

$$= \frac{[٤ + ١] - |٢ \times ١ - ٣|}{٣}$$

$$= \frac{[٥] - |-١|}{٣} = \frac{٥ - ١}{٣} = \boxed{\tfrac{٤}{٣}}$$

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة ٢٠٢٢م

حلول أسئلة اختبار درس قواعد الاشتقاق

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس قواعد الاشتقاق

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة 2004

① إذا كان ق(١) = ٣ ، قَ(١) = -١ ، هـ(١) = ٢
هَـ(١) = ٥ أوجد ما يلي

* $\left(\frac{\text{٧}}{\text{ق}}\right)'(\text{١})$

Ⓐ $\frac{\text{٩}}{\text{٧}}$ Ⓑ $\frac{\text{٧}}{\text{٩}}$ (جـ) $\frac{-\text{٩}}{\text{٧}}$ (د) $\frac{-\text{٧}}{\text{٩}}$

* $\left(\frac{\text{ق(١)}}{\text{هـ}}\right)'(\text{١})$

(أ) $\frac{\text{١٥}}{\text{٤}}$ (ب) $\frac{\text{٤}}{\text{١٥}}$ (جـ) صفر (د) $\frac{-\text{١٥}}{\text{٤}}$

* $\left(\frac{\text{هَـ(١)}}{\text{ق(١)}}\right)'(\text{١}) =$

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ (جـ) $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ (د) صفر

② إذا كان د(س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ب & س \geq ١ \\ جـس + ٣ & س < ١ \end{cases}$

وكانت دَ(١) = ٤ فإن قيمة الثوابت أ ، ب ، جـ على الترتيب

Ⓐ أ = ٢ ، ب = ٥ ، جـ = ٤ Ⓑ أ = -٢ ، ب = ٥ ، جـ = -٣

Ⓒ أ = $\frac{١}{٢}$ ، ب = ٤ ، جـ = ٤ Ⓓ أ = ٢ ، ب = -٥ ، جـ = -١

③ إذا كانت د(س) = |س - ٢| - |س| فإن دَ(١) = ؟!

Ⓐ ٢ Ⓑ -٢ Ⓒ غ.م Ⓓ صفر

④ إذا كان د(س) = $|س^{٢} - ٥س + ٦| - \sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$

فإن دَ(١) ؟!

Ⓐ -٢ Ⓑ ٢ Ⓒ صفر Ⓓ غ.م

⑤ إذا كان د(س) = $\frac{م(س)}{ل(س)(س^{٢}+١)}$

وكان م(١) = -٢ ، مَ(١) = ل(١) = -١ ، دَ(١) = ٣

فإن لَ(١) =

Ⓐ $\frac{٧}{٢}$ Ⓑ $-\frac{٧}{٢}$ Ⓒ $\frac{١}{٣}$ Ⓓ $-\frac{١}{٣}$

⑥ إذا كان ق(س) = $\dfrac{\left[\left[\frac{-\text{س}}{٢}\right]\right]}{٥-\text{س}}$ فإن قَ(٣)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٥ (ج) $-\frac{١}{٢}$ (د) غ.م

⑦ إذا كان ق(س) = $\dfrac{\left[\frac{٣}{٢}\text{س}+١\right]}{\text{س هـ(س)} + ٢\text{س}}$

هـ(١) = ١ ، هـَ(١) = ٢ فإن قَ(١)

(أ) $\frac{٩}{١١}$ (ب) $-\frac{٩}{١٠}$ (ج) $\frac{١١}{٩}$ (د) $-\frac{١٠}{٩}$

⑧ إذا كان ق(س) = |س|^{٣} فإن قَ(٠)

(أ) صفر (ب) ٦ (ج) −٦ (د) غ.م

⑨ إذا كان ق(س) = س^{٢} [٧ − ٢س] فإن قَ(٥)−

(أ) غ.م (ب) −٤٠ (ج) −٣٠ (د) صفر

⑩ إذا كان ق(س) = |٣ − س| فإن (ق^{٢})َ(٢) =

(أ) ١ (ب) −١ (ج) ٢ (د) −٢

حلول أسئلة اختبار درس

قواعد الاشتقاق

دفعة 2004

① إذا كان ق(١) = ٣ ، قَ(١) = -١ ، هـ(١) = ٢ ، هـَ(١) = ٥

أوجد ما يلي :-

Ⓐ $\left(\frac{\text{٧}}{\text{ق}}\right)'(\text{١})$

الحل $\frac{\text{ق(١)} \times \text{٠} - \text{٧} \times \text{قَ(١)}}{\text{ق}^{\text{٢}}\text{(١)}} = \frac{-\text{٧} \times -\text{١}}{\text{٩}} = \boxed{\frac{\text{٧}}{\text{٩}}}$ فرع Ⓑ

Ⓑ $\left(\frac{\text{ق(١)}}{\text{هـ}}\right)'(\text{١})$

ملاحظة انتبه ق(١) ثابت معطى في السؤال

الحل $= \left(\frac{\text{٣}}{\text{هـ}}\right)'(\text{١})$

$= \frac{\text{هـ(١)} \times \text{٠} - \text{٣} \times \text{هـَ(١)}}{\text{هـ}^{\text{٢}}\text{(١)}} = \frac{-\text{٣} \times \text{٥}}{\text{٤}} = \boxed{-\frac{\text{١٥}}{\text{٤}}}$ فرع Ⓓ

Ⓒ $\left(\frac{\text{هـَ(١)}}{\text{ق(١)}}\right)'(\text{١}) = \left(\frac{\text{٥}}{\text{٣}}\right)' =$ صفر

② إذا كان ق(س) = { أس^{٢} + ب ، س ≥ ١
جـ س + ٣ ، س < ١

وكانت ق̅(١) = ٤ ، فجد قيمة الثوابت أ ، ب ، جـ على الترتيب

(الحل) ق̅(١) موجودة ⟸ ق(س) متصل عند س = ١

نها$_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = نها$_{س \to ١^{-}}$ ق(س) = ق(١)

نها$_{س \to ١^{+}}$ أس^{٢} + ب = نها$_{س \to ١^{-}}$ جـ س + ٣ ⟸ أ + ب = جـ + ٣

⟸ $\boxed{\text{أ + ب − جـ = ٣}}$ ← ①

ق̅(س) = { ٢أس ، س ≥ ١
جـ ، س < ١

كتبنا المساواة لأنه معطى أن المشتقة موجودة عند س = ١

∵ ق̅(١) = ٤ (موجودة)

⟸ ق̅(١)$^{+}$ = ق̅(١)$^{-}$ = ٤

⟸ ٢أ = ٤ ⟸ $\boxed{\text{أ = ٢}}$ كذلك $\boxed{\text{جـ = ٤}}$

عوض في معادلة ①

٢ + ب − ٤ = ٣ ⟸ ب = ٣ + ٢ ⟸ $\boxed{\text{ب = ٥}}$

∴ أ = ٢ ، ب = ٥ ، جـ = ٤ فرع (أ)

③ إذا كانت ق(س) = |س−٢| − |س| فإن قَ(١) =

(الحل) |س−٢| ⟵ م عوض بالصفر |−٢| ∴ نتعامل مع قاعدة السالبة

|س| ⟵ م عوض بالصفر |٠| ⟵ لذلك يجب إعادة التعريف .

|س−٢|: (٢−س) ، (س−٢)
− − − | + + +
٢

|س|: −س ، س
− − − | + + + + +
٠

|س−٢| − |س|: ٢ − س − (−س) ، ٢−س−س ، ~~(س−٢) − س~~
٠ ، ٢

ق(س) = { ٢ ، س ≤ ٠
٢−٢س ، ٠ < س ≤ ٢
−٢ ، س > ٢ }

نبحث الاتصال عند س = ٠

ق(٠) = ٢ ، نها ق(س) = ٢ (س ← ٠+) ، نها ق(س) = ٢ (س ← ٠−)

∴ ق(س) متصل عند س = ٠

قَ(س) = { ٠ ، س < ٠
−٢ ، ٠ < س < ٢
٠ ، س > ٢
غ.م ، س = ٠ ، ٢ }

قَ(١)⁺ ≠ قَ(١)⁻ ⟸ قَ(١) غ.م

حل آخر/ $|\text{س} - ٢| \xrightarrow{\text{عوض عن س} = ٠} |-٢| \longrightarrow$ سالبة

$$|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} \text{ ، } \text{س} \geq ٠ \text{ ،} \\ -\text{س} \text{ ، } \text{س} < ٠ \text{ .} \end{cases}$$

$$\text{ق(س)} = -\text{س} + ٢ - \begin{cases} \text{س} \text{ ، } \text{س} \geq ٠ \text{ ،} \\ -\text{س} \text{ ، } \text{س} < ٠ \text{ .} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\text{س} + ٢ - \text{س} \text{ ، } \text{س} \geq ٠ \text{ ،} \\ -\text{س} + ٢ + \text{س} \text{ ، } \text{س} < ٠ \text{ ،} \end{cases} = \begin{cases} -٢\text{س} + ٢ \text{ ، } \text{س} \geq ٠ \text{ .} \\ ٢ \text{ ، } \text{س} < ٠ \text{ .} \end{cases}$$

ونكمل الحل ———— .

④ إذا كان ق(س) = $|\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦| - \sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$ فإن

قَ(١) = ؟؟

الحل عندما س = ١

$|\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦| \longrightarrow = |٢| \longrightarrow$ موجب

$\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦ - \sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢}} \longrightarrow$ مربع كامل

$\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦ - |\text{س} - ٣|$

عندما س = ١ ، $|\text{س} - ٣| \longrightarrow |-٢| \longrightarrow$ سالب

$\therefore \text{ق(س)} = \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦ - (-\text{س} + ٣)$

$= \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦ + \text{س} - ٣$

د(س) = $س^{٢}$ - ٤س + ٣

دَ(س) = ٢س - ٤

دَ(١) = ٢ - ٤ = ②-

⑤ إذا كان ق(س) = $\frac{م(س)}{ل(س)(س^{٢}+١)}$ ، وكان م(١) = -٢

مَ(١) = ل(١) = -١ ، قَ(١) = ٣ فإن لَ(١) = ؟!

الحل قَ(س) = $\frac{ل(س)(س^{٢}+١) \times مَ(س) - [م(س) \times (ل(س) \times ٢س + (س^{٢}+١) \times لَ(س))]}{(ل(س)(س^{٢}+١))^{٢}}$

قَ(١) = $\frac{ل(١) \times ٢ \times مَ(١) - [م(١) (ل(١) \times ٢ + ٢لَ(١))]}{(ل(١) \times ٢)^{٢}}$

$\frac{٣}{١}$ = $\frac{-٢ \times -١ - [-٢ (-٢ + ٢ \times لَ(١))]}{(-٢)^{٢}}$

⇐ ١٢ = ٢ + ٢ (-٢ + ٢لَ(١))

١٠ = -٤ + ٤لَ(١) ⇐ ١٤ = ٤لَ(١)

⇐ $\boxed{\frac{٧}{٢} = لَ(١)}$ فرع ⑨

⑥ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\left[\left[\frac{-\text{س}}{٢} \right]\right]}{٥ - \text{س}}$ فأوجد $\text{قَ}(٣)$

الحل $\left[\left[\frac{-\text{س}}{٢} \right]\right]$ عوض عند $\text{س} = ٣$ ← $\left[\left[\frac{-٣}{٢} \right]\right] = \boxed{-٢}$

كسر غيرصحيح

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{[[-٢]]}{٥-\text{س}} = \frac{-٢}{٥-\text{س}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{-(-٢ \times -١)}{(٥-\text{س})^٢} = \frac{-٢}{(٥-\text{س})^٢}$$

$$\text{قَ}(٣) = \frac{-٢}{(٥-٣)^٢} = \frac{-٢}{٤} = \boxed{\frac{-١}{٢}}$$

⑦ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\left[\left[\frac{٣}{٢}\text{س} + ١ \right]\right]}{\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}) + ٢\text{س}}$ ، $\text{هـ}(١) = ١$ ، $\text{هـَ}(١) = ٢$

فأوجد $\text{قَ}(١)$

الحل $\left[\left[\frac{٣}{٢}\text{س} + ١ \right]\right] \leftarrow \left[\left[\frac{٣}{٢} + ١ \right]\right] = [[٢{,}٥]] = \boxed{٢}$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}) + ٢\text{س}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{\left(\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}) + ٢\text{س}\right) \times ٠ - \left[٢ \times \left(\left(\text{س} \times \text{هـَ}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right) + ٢ \right) \right]}{\left(\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}) + ٢\text{س}\right)^٢}$$

$$\text{قَ}(١) = \frac{\cancel{\left(\text{هـ}(١) + ٢\right) \times \text{صفر}} - \left[٢ \times \left(\left(\text{هـَ}(١) + \text{هـ}(١)\right) + ٢ \right) \right]}{\left(\text{هـ}(١) + ٢\right)^٢}$$

$\bar{ق}(١) = \frac{-٢\bar{هـ}(١) - ٢هـ(١) - ٤}{(هـ(١) + ٢)^{٢}} = \frac{-٢ \times ٢ - ٢ \times ١ - ٤}{(١ + ٢)^{٢}}$

$= \frac{-٤ - ٢ - ٤}{٩} = \boxed{\frac{-١٠}{٩}}$

عَع (د)

⑧ إذا كان هـ(س) = $|س|^{٣}$ ، فإن $\bar{\bar{ق}}(٠)$ = ؟!

(الحل) $|س| = \begin{cases} س ، & س \geq ٠ \\ -س ، & س < ٠ \end{cases}$

$هـ(س) = |س|^{٣} = \begin{cases} س^{٣} ، & س \geq ٠ \\ -س^{٣} ، & س < ٠ \end{cases}$

هـ(س) متصل عند س = ٠

(تحقق من ذلك)

$\bar{ق}(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} ، & س \geq ٠ \\ -٣س^{٢} ، & س < ٠ \end{cases}$

$\bar{ق}$(س) متصل عند س = ٠

(تحقق من ذلك).

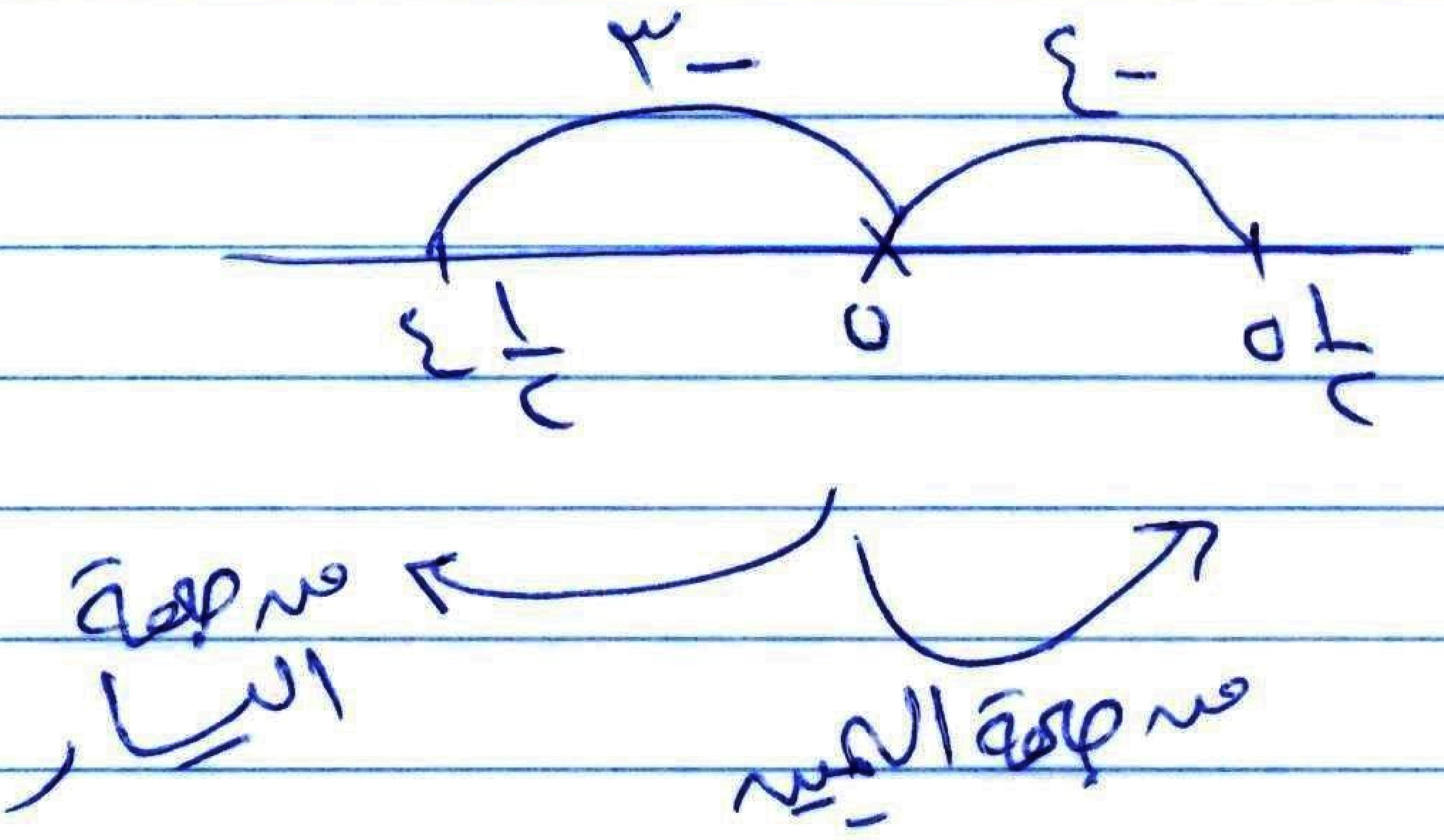
$\bar{\bar{ق}}(س) = \begin{cases} ٦س ، & س > ٠ \\ -٦س ، & س < ٠ \end{cases}$

$\bar{\bar{\bar{ق}}}(٠)^{+} = ٠$ ، $\bar{\bar{\bar{ق}}}(٠)^{-} = ٠$ $\Leftarrow$ $\bar{\bar{ق}}(٠) = ٠$

⑨ إذا كان د(س) = س² [٧ - ٢س] أوجد دَ(٥) = ؟

(الحل) [٧ - ٢س] نعوض عند س=٥ [٧ - ١٠] = [-٣] = (-٣) عدد صحيح

لذلك نحتاج إعادة التعريف



د(س) = س² × -٣

∴ د(س) = -٣س²

دَ(س) = -٦س

دَ(٥) = -٦×٥ = (-٣٠) فرع (جـ)

⑩ إذا كان د(س) = |٣ - س| فإن (د²)َ(٢) =

(الحل) د(س) = |٣ - س|

د²(س) = (|٣ - س|)² = (√(٣ - س)²)² ← ٢

د²(س) = (٣ - س)²

د/دس د²(س) = ٢(٣ - س) × -١ = -٢(٣ - س)

(د²)َ(٢) = -٢(٣ - ٢) = (-٢)

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار درس مشتقات الإقترانات المثلثية

دفعة ٢٠٠٤

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس مشتقات الاقترانات المثلثية (الدائرية) دفعة 2004

① إذا كانت ص = جاس + جتاس فإن $(\bar{\text{ص}})^{٢} + \text{ص}^{٢}$ =

Ⓐ ١   (ب) -١   (ج) صفر   (د) ٢

② قيم س التي تحقق $\bar{\text{ق}}$(س) إذا كانت ق(س) = س + جتاس ، س ∈ [-٢π ، ٢π]

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $-\frac{٣\pi}{٢}$ (ج) $-\frac{\pi}{٢}$ (د) أ و ب معاً

③ إذا كانت ص = قاس + ظاس فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ =

(أ) $\frac{١}{\text{جاس}}$ (ب) $\frac{١}{١+\text{جاس}}$ (ج) $\frac{١}{١-\text{جاس}}$ (د) $\frac{-١}{١-\text{جاس}}$

④ إذا كانت ص = جاس فإن $\bar{\bar{\text{ص}}}$ + ٦ص بدلالة ص تساوي

(أ) ٥ص   (ب) -٥ص   (ج) ٢ص   (د) -٣ص

⑤ إذا كانت ق(س) = جا(-س) + جتا(-س) أوجد $\bar{\text{ق}}(\frac{\pi}{٤})$

(أ) $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ (ب) $\frac{-٢}{\sqrt{٢}}$ (ج) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٦) إذا كانت ص = أ جا س + ب جتا س حيث أ، ب ∈ ح

فإن $(\acute{ص})^2 + ص^2 =$

(أ) $أ^2 - ب^2$ (ب) $أ^2$ (ج) $أ^2 + ب^2$ (د) $-ب^2$

(٧) إذا كان ق(س) = $\frac{\pi}{قا\,س}$ ، أوجد قَ$(\frac{\pi}{٦})$

(أ) π (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (ج) -٢π (د) $-\frac{\pi}{٢}$

(٨) إذا كانت ق(س) = س |ظا س| فإن قَ(π)

(أ) $-\pi$ (ب) π (ج) صفر (د) غ.م

(٩) إذا كان ص = $\left(\frac{١ + جا\,س}{جتا\,س}\right)^ن$ ، جتا س ≠ ، فإن

صَ =

(أ) ن قا س (ب) ن ظا س (ج) ن ص ظا س

(د) ن ص قا س

(١٠) إذا كانت ص جتا س − ص جا س = $\frac{١}{جتا\,س + جا\,س}$

فإن صَ

(أ) جتا س − جا س (ب) ٢ قا ٢س ظا ٢س

(ج) ٢ قتا ٢س ظتا ٢س (د) −٢ قتا ٢س ظتا ٢س

حلول أسئلة اختبار درس
مشتقات الاقترانات المثلثية دفعة 2004

① ص = جاس + جتاس

صَ = جتاس − جاس

(صَ)^{2} = (جتاس − جاس)^{2} = جتا^{2}س − ~~٢جاس~~ جتاس + جا^{2}س

ص^{2} = (جاس + جتاس)^{2} = جا^{2}س + ~~٢جاس~~ جتاس + جتا^{2}س

⇐ (صَ)^{2} + ص^{2} = جتا^{2}س + جا^{2}س + جتا^{2}س + جا^{2}س = ١+١

١ ١

= $\boxed{٢}$

فرع ⓓ

② ق(س) = س + جتاس

قَ(س) = ١ − جاس = ٠ ⇐ جاس = ١

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢نπ

عندما ن = ٠ ⇐ س = $\frac{\pi}{٢}$ ∈ [−٢π، ٢π]

عندما ن = ١ ⇐ س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢π = $\frac{٥\pi}{٢}$ ∈ [−٢π، ٢π]

عندما ن = −١ ⇐ س = $\frac{\pi}{٢}$ − ٢π

⇐ س = −$\frac{٣\pi}{٢}$ ∈ [−٢π، ٢π]

∴ س = {$\frac{\pi}{٢}$ ، −$\frac{٣\pi}{٢}$} فرع ⓓ

③ $\text{ص} = \text{قا س} + \text{ظا س}$ فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} =$

$$\text{ص}' = \text{قا س ظا س} + \text{قا}^{2}\text{ س}$$

$$= \text{قا س} \left(\text{ظا س} + \text{قا س} \right)$$

$$= \frac{1}{\text{جتا س}} \left(\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} + \frac{1}{\text{جتا س}} \right)$$

$$= \frac{1}{\text{جتا س}} \left(\frac{1 + \text{جا س}}{\text{جتا س}} \right)$$

$$= \frac{1 + \text{جا س}}{\text{جتا}^{2}\text{ س}} = \frac{1 + \text{جا س}}{1 - \text{جا}^{2}\text{ س}} = \frac{\cancel{(1 + \text{جا س})}}{(1 - \text{جا س})\,\cancel{(1 + \text{جا س})}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{1 - \text{جا س}}}$$ فرع (ج)

④ $\text{ص} = \text{جا س}$ ، $\text{ص}'' + ٦\text{ص}$

$$\text{ص}' = \text{جتا س} \quad ، \quad \text{ص}'' = -\text{جا س}$$

$$\text{ص}'' + ٦\text{ص} = -\text{جا س} + ٦\,\text{جا س} = ٥\,\text{جا س}$$

$$= \boxed{٥\,\text{ص}}$$ فرع (م)

⑤ ق(س) = جا(-س) + جتا(-س) ، ق($\frac{\pi}{٤}$)

ق(س) = - جا س + جتا س

ق̀(س) = - جتا س - جا س

ق̀($\frac{\pi}{٤}$) = - جتا $\frac{\pi}{٤}$ - جا $\frac{\pi}{٤}$

= $\frac{-1}{\sqrt{٢}} - \frac{1}{\sqrt{٢}}$

= $\frac{-٢}{\sqrt{٢}}$ ضع (ب)

تذكر

جا(-س) = - جا س

جتا(-س) = جتا س

⑥ ص = أ جا س + ب جتا س

ص̀ = أ جتا س - ب جا س

(ص̀)^{٢} + ص^{٢}

= (أ جتا س - ب جا س)^{٢} + (أ جا س + ب جتا س)^{٢}

= أ^{٢} جتا^{٢} س - $\cancel{\text{٢ أ ب جا س جتا س}}$ + ب^{٢} جا^{٢} س +

أ^{٢} جا^{٢} س + $\cancel{\text{٢ أ ب جا س جتا س}}$ + ب^{٢} جتا^{٢} س

= أ^{٢} $\underbrace{\text{(جا}^{٢}\text{ س + جتا}^{٢}\text{ س)}}_{1}$ + ب^{٢} $\underbrace{\text{(جا}^{٢}\text{ س + جتا}^{٢}\text{ س)}}_{1}$

= أ^{٢} + ب^{٢} ضع (ج)

⑦ $ق(س) = \frac{\pi}{\text{قاس}}$ أوجد $\text{قَ}(\frac{\pi}{٦})$

$ق(س) = \frac{\pi}{\frac{١}{\text{جتاس}}} = \pi \text{ جتاس}$

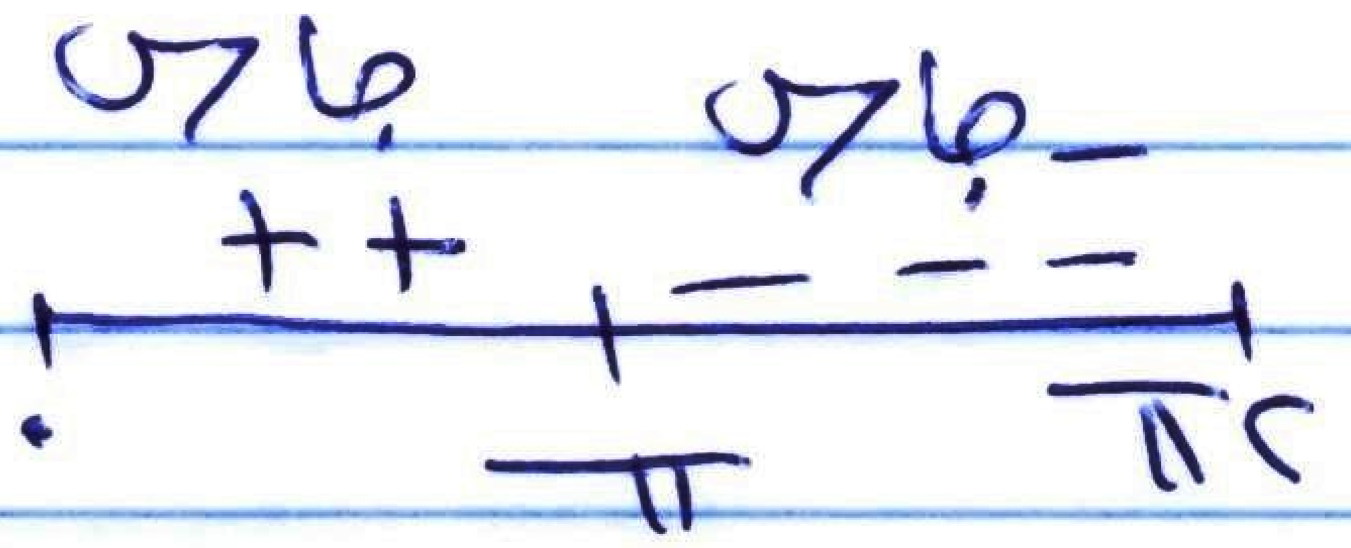
∴ $\text{قَ}(س) = -\pi \text{ جاس}$

$\text{قَ}(\frac{\pi}{٦}) = -\pi \text{ جا} \frac{\pi}{٦} = -\pi \times \frac{١}{٢} = \boxed{\frac{-\pi}{٢}}$ فرع (د)

⑧ $ق(س) = س \,|\text{جاس}|$ ، $س \in [\,٠ ، ٢\pi\,]$

|جاس|

جاس = ٠ ⟸ س = ٠ ، ٢π ، π



$ق(س) = س\,|\text{جاس}| = \begin{cases} س \text{ جاس} ، & ٠ \le س \le \pi \\ -س \text{ جاس} ، & \pi \le س \le ٢\pi \end{cases}$

ق(س) متصل عند س = π (تحقق من ذلك)

$\text{قَ}(س) = \begin{cases} س \text{ جتاس} + \text{جاس} ، & ٠ < س < \pi \\ -س \text{ جتاس} - \text{جاس} ، & \pi < س < ٢\pi \\ \text{غ.م} ، & س = ٠ ، \pi ، ٢\pi \end{cases}$

∴ قَ(π) غير موجودة فرع (د)

⑨ $\text{ص} = \left(\dfrac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{\text{ن}}$ ، $\text{جتاس} \neq ٠$

$$\text{ص}' = \text{ن}\left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{\text{ن}-1} \times \left(\frac{\text{جتاس} \times \text{جتاس} + \text{جاس}(1+\text{جاس})}{\text{جتا}^2\text{س}}\right)$$

$$= \text{ن}\left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{\text{ن}-1} \times \frac{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جاس}(1+\text{جاس})}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$= \text{ن}\left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{\text{ن}-1} \times \frac{\overset{1}{\cancel{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}}} + \text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$= \text{ن}\left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{\text{ن}-1} \times \left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{1} \times \frac{1}{\text{جتاس}}$$

$$= \text{ن}\left(\frac{1+\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^{\text{ن}} \times \frac{1}{\text{جتاس}}$$

$= \boxed{\text{ن ص قاس}}$ فرع (د)

⑩ $\text{ص جتا س} - \text{ص جا س} = \dfrac{1}{\text{جتا س} + \text{جا س}}$

خذ ص عامل مشترك
ثم اضرب في
$\dfrac{1}{\text{جتا س} - \text{جا س}}$

$$\frac{\text{ص}\,\cancel{(\text{جتا س} - \text{جا س})}}{\cancel{(\text{جتا س} - \text{جا س})}} = \frac{1}{(\text{جتا س} + \text{جا س})(\text{جتا س} - \text{جا س})}$$

$\boxed{\text{جتا}\,٢\text{س} = \text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س}}$

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س}}$$

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{جتا}\,٢\text{س}} = \text{قا}\,٢\text{س}$$

$\text{ص}' = ٢\,\text{قا}\,٢\text{س}\;\text{ظا}\,٢\text{س}$ مزع (ب)

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة ٢٠٠٤م

حلول أسئلة اختبار درس

(قاعدة لوبيتال، ومشتقة الاقتران الأسي واللوغاريتمي)

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس قاعدة لوبيتال ، ومشتقة الاقتران الأسي واللوغاريتمي

دفعة 2004

① $\underset{\text{هـ}\leftarrow 0}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{قا}^2(\text{٥س} - \text{٣هـ}) - \text{ظا}^2\text{٥س} - ١}{\text{هـ}} =$

أ) ١٠ ظا٥س قا²٥س
ب) -٣ قا²٥س ظا٥س
جـ) -٦ قا²٥س ظا٥س
د) -١٦ قا²٥س ظا٥س

② إذا كان ق(س³+١) = ٥ هـ$^{\text{س}-1}$ + لوهـ(٢+س)³ ، فما قيمة قَ(٢)؟

أ) ٤
ب) ١
جـ) ٢
د) صفر

③ ما قيمة $\underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نهـا}}\ \frac{١ + \text{جتا٦س} - \text{٢جتا}^2\text{س}}{\text{س}^4}$ ؟

أ) -١٦
ب) ١٦
جـ) ٨
د) -٨

④ $\underset{\text{س}\leftarrow\text{هـ}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{لوهـ}(\text{لوهـ س})}{\text{هـ}^3 - \text{هـ}^2\text{س}} =$

أ) $-\frac{1}{\text{هـ}}$
ب) $-\frac{1}{\text{هـ}^2}$
جـ) $\frac{1}{\text{هـ}^3}$
د) $-\frac{1}{\text{هـ}^3}$

⑤ إذا كان $ق(س) = \frac{لو_{هـ}(م(س))}{س}$ ، $م(١) = هـ^٢$

$مَ(١) = ٢هـ$

فإن $قَ(١) = ؟!$

(أ) $٢(\frac{١}{هـ} - ١)$ (ب) $٣(\frac{١}{هـ} - ١)$ (جـ) $(١ - هـ)^٢$ (د) $-هـ$

⑥ إذا كان ق(س) كثير حدود وكان $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}\, ق(س) - ٢}{٢س - ٢} = ٥$

وكان $ك(س) = \frac{س^٢}{ق(س)}$ أوجد $كَ(١)$

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $\frac{-٥}{٤}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

⑦ إذا كان $ص = س^٢ + هـ^{هـ} + هـ^{س} - س^{هـ}$ (حيث هـ العدد النيبري)

ما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما $س =$ ،

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{١}{٢}$

⑧ إذا كان $ق(س) = هـ^{\sqrt[٣]{س-١}} \times لو_{هـ}\sqrt{س}$ ، فإن $قَ(١) =$

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $-\frac{١}{٢}$ (د) صفر

⑨ إذا كان $هـ^{ق(س)} = س^٢ + ١$ ، فإن $قَ(س) =$

(أ) $\frac{١}{س^٢ + ١}$ (ب) $\frac{٢س}{س^٢ + ١}$ (ج) $٢س(س^٢ + ١)$ (د) $هـ^{س^٢ + ١}$

⑩ إذا كانت $\lim_{س \to -١} \frac{ب س^٢ - أ س - ٥}{س + ١} = -٧$ ، فإن قيمة أ ، ب على الترتيب

(أ) ٣ ، ٢ (ب) -٢ ، ٣ (ج) ٢ ، -٣ (د) -٣ ، -٢

حلول أسئلة اختبار درس

(قاعدة لوبيتال، مشتقة الاقتران الأسي واللوغاريتمي)

① $$\text{نها}_{\text{هـ}\to 0}\ \frac{\text{قا}^2(5\text{س}-3\text{هـ})-\text{ظا}^2 5\text{س}-1}{\text{هـ}}$$

$1+\text{ظا}^2\text{س}=\text{قا}^2\text{س}$

$\Leftarrow \text{قا}^2\text{س}-\text{ظا}^2\text{س}=1$

(الحل) بالتعويض المباشر $\dfrac{\text{قا}^2 5\text{س}-\text{ظا}^2 5\text{س}-1}{0}$

$$=\frac{1-1}{0}=\boxed{\frac{0}{0}}$$

نستخدم قاعدة لوبيتال ونشتق بالنسبة لـ هـ

$$=\text{نها}_{\text{هـ}\to 0}\ \frac{-6\,\text{قا}(5\text{س}-3\text{هـ})\ \text{قا}(5\text{س}-3\text{هـ})\ \text{ظا}(5\text{س}-3\text{هـ})-0}{1}$$

$$=\text{نها}_{\text{هـ}\to 0}\ -6\,\text{قا}^2(5\text{س}-3\text{هـ})\ \text{ظا}(5\text{س}-3\text{هـ})$$

ظا² ٥س ثابت بالنسبة لـ هـ

$$=\boxed{-6\,\text{قا}^2 5\text{س}\ \text{ظا}5\text{س}}$$ فرع (ج)

② ق(س^{٣}+١) = ٥ هـ$^{س-١}$ + لو$_{هـ}$ (٢+س)^{٣} ، قَ(٢) ؟!

الحل ١ اشتقه الطرفين

قَ(س^{٣}+١) × ٣س^{٢} = ٥ هـ$^{س-١}$ + $\frac{\text{٣(٢+س)}^{٢}}{\text{(٢+س)}^{٣}}$

افرض س^{٣}+١ = ٢

⇐ س^{٣} = ٢-١ ⇐ س^{٣} = ١ ⇐ س = ١

عندما س = ١

قَ(٢) × ٣ = ٥ هـ^{٠} + $\frac{\text{٣(٣)}^{٢}}{\text{(٣)}^{٣}}$ ⇐ ٣قَ(٢) = ٥ + ١

⇐ قَ(٢) = ② منع ج

③ نها$_{س \to ٠}$ $\frac{\text{١ + جتا٦س - ٢جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

الحل بالتعويض المباشر $\frac{\text{١+١-٢}}{٠}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

٢جاس جتاس = جا٢س

نستخدم قاعدة لوبيتال ونشتق بالنسبة لـ س

نها$_{س \to ٠}$ $\frac{\text{-٦جا٦س + ٤جتاس جاس}}{\text{٢س}}$ = $\frac{\text{٠+٠}}{٠}$ = ($\frac{٠}{٠}$) استخدم لوبيتال مرة ثانية

تعويض مباشر

= نها$_{س \to ٠}$ $\frac{\text{-٣٦جتا٦س + ٤جتا٢س}}{٢}$

= $\frac{\text{-٣٦ + ٤}}{٢}$ = $\frac{\text{-٣٢}}{٢}$ = $\boxed{\text{-١٦}}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = \text{١} \\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{١} = \text{صفر}\end{array}}$$

④ $$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{هـ}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)}{\text{هـ}^{\text{٣}} - \text{هـ}\,\text{س}^{\text{٢}}}$$

(الحل) بالتعويض المباشر $$\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}\right)}{\text{هـ}^{\text{٣}} - \text{هـ}^{\text{٢}} \times \text{هـ}} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{١}}{\text{هـ}^{\text{٣}} - \text{هـ}^{\text{٣}}}$$

$$= \boxed{\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}}$$

نستخدم لوبيتال والمشتقة بالنسبة لـ س

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{هـ}} \frac{\dfrac{\left(\frac{\text{١}}{\text{س}}\right)}{\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)}}{\text{٠} - \text{هـ}^{\text{٢}}} = \frac{\dfrac{\text{١}}{\text{هـ}}}{\dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}}{-\text{هـ}^{\text{٢}}}} = \frac{\left(\frac{\text{١}}{\text{هـ}}\right)}{\dfrac{\text{١}}{-\text{هـ}^{\text{٢}}}} = \frac{\text{١}}{\text{هـ}} \times \frac{\text{١}}{-\text{هـ}^{\text{٢}}}$$

$$= \boxed{\frac{-\text{١}}{\text{هـ}^{\text{٣}}}}$$

⑤ $$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{م}(\text{س})\right)}{\text{س}}$$

(الحل) $$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س} \times \dfrac{\text{م}'(\text{س})}{\text{م}(\text{س})} - \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{م}(\text{س})\right) \times \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}$$

$$\text{ق}'(\text{١}) = \frac{\text{١} \times \dfrac{\text{م}'(\text{١})}{\text{م}(\text{١})} - \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{م}(\text{١})\right)}{\text{١}} = \frac{\text{٢هـ}}{\text{هـ}^{\text{٢}}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{٢}}$$

$$= \frac{\text{٢}}{\text{هـ}} - \text{٢}$$

$$= \boxed{\text{٢}\left(\frac{\text{١}}{\text{هـ}} - \text{١}\right)}$$

⑥ $\text{نها}_{\text{س}\leftarrow ١} \dfrac{\sqrt{\text{س}}\ \text{ق(س)} - ٢}{٢\text{س} - ٢} = ٥$ ، $\text{ل(س)} = \dfrac{\text{س}^٢}{\text{ق(س)}}$

الحل بالتعويض المباشر ⇐ $\dfrac{\sqrt{١}\ \text{ق(١)} - ٢}{\text{صفر}} = ٥$

∵ النهاية موجودة وناتج التعويض في المقام = صفر

⇐ ناتج تعويض البسط = صفر ⇐ ق(١) − ٢ = ٠ ⇐ $\boxed{\text{ق(١)} = ٢}$

∵ ناتج التعويض المباشر $\left(\frac{٠}{٠}\right)$ ⇐ نستخدم لوبيتال ونشتقه بالنسبة لس

$$\text{نها}_{\text{س}\leftarrow ١} \dfrac{\sqrt{\text{س}} \times \text{قَ(س)} + \text{ق(س)} \times \dfrac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}}{٢} = ٥$$

$$\dfrac{\sqrt{١}\ \text{قَ(١)} + \text{ق(١)} \times \frac{١}{٢}}{٢} = ٥ \Leftarrow \dfrac{\text{قَ(١)} + \frac{١}{٢}\text{ق(١)}}{٢} = ٥$$

$$\Leftarrow \text{قَ(١)} + \tfrac{١}{٢}\text{ق(١)} = ١٠ \Leftarrow \text{قَ(١)} + ١ = ١٠$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{قَ(١)} = ٩}$$

$$\text{ل(س)} = \dfrac{\text{س}^٢}{\text{ق(س)}} \Leftarrow \text{لَ(س)} = \dfrac{\text{ق(س)} \times ٢\text{س} - \text{س}^٢ \times \text{قَ(س)}}{\text{ق}^٢\text{(س)}}$$

$$\text{لَ(١)} = \dfrac{\text{ق(١)} \times ٢ - \text{قَ(١)}}{\text{ق}^٢\text{(١)}}$$

$$\text{لَ(١)} = \dfrac{٢ \times ٢ - ٩}{(٢)^٢} = \boxed{\dfrac{-٥}{٤}}$$ فرع (ج)

⑦ الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} + ٠ + \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}\,\text{س}^{\text{هـ}-١}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=٠} = ٠ + ٠ + \text{هـ}^{٠} - \text{هـ}(٠)^{\text{هـ}-١} = ٠ + ١ - ٠ = \text{①}$ فرع (ب)

⑧ $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\sqrt[٣]{\text{س}-١}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{(\text{س}-١)^{\frac{١}{٣}}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س})^{\frac{١}{٢}}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{(\text{س}-١)^{\frac{١}{٣}}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{(\text{س}-١)^{\frac{١}{٣}}} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{(\text{س}-١)^{\frac{١}{٣}}} \times$

$\frac{١}{٣}(\text{س}-١)^{\frac{-٢}{٣}}$

$\text{قَ}(١) = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{٠} \times ١ + \text{لو}_{\text{هـ}}١ \times \frac{١}{٢} \times ٠$

$= \frac{١}{٢} + \text{صفر} = \text{(}\frac{١}{٢}\text{)}$ فرع (ب)

⑨ $\text{هـ}^{\text{ق}(\text{س})} = \text{س}^{٢} + ١$

اشتقاق الطرفين $\Leftarrow \text{هـ}^{\text{ق}(\text{س})} \times \text{قَ}(\text{س}) = ٢\text{س}$

$\Leftarrow \text{قَ}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{\text{هـ}^{\text{ق}(\text{س})}} = \boxed{\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}}$

فرع (ب)

⑩ نهـا $\frac{\text{ب س}^{2} - \text{أ س} - ٥}{\text{س} + ١}$ = -٧
س ← -١

الحل ∵ النهاية موجودة وناتج تعويض المقام = صفر

∴ ناتج تعويض البسط = صفر

∴ ب + أ - ٥ = ٠ ∴ $\boxed{\text{ب + أ = ٥}}$ ← ①

باستخدام قاعدة لوبيتال نهـا $\frac{\text{٢ب س - أ}}{١}$ = -٧
س ← -١

∴ -٢ب - أ = -٧ ← ② من ① ، ②

أ + ب = ٥

-أ - ٢ب = -٧ +

-ب = -٢ ∴ $\boxed{\text{ب = ٢}}$ بالتعويض في ①

٢ + أ = ٥

∴ $\boxed{\text{أ = ٣}}$

رياضيات الثاني عشر دفعة ٢٠٠٤

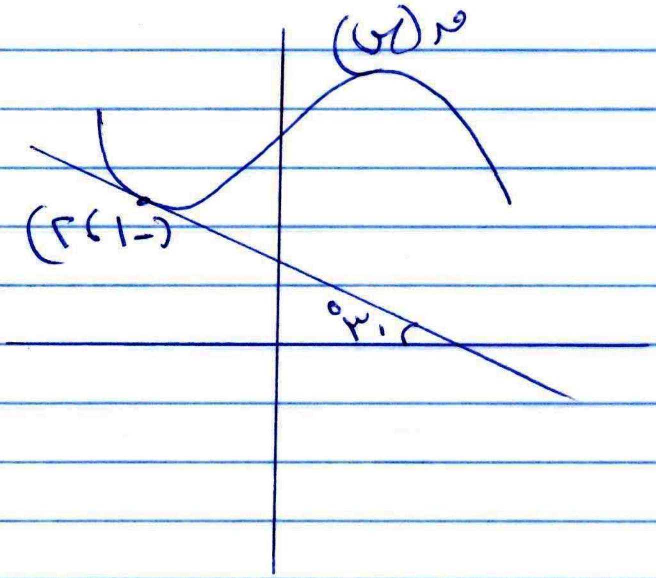
حلول أسئلة اختبار تطبيقات هندسية

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

QR Code للاختبار

اختبار درس تطبيقات هندسية

دفعة 2004



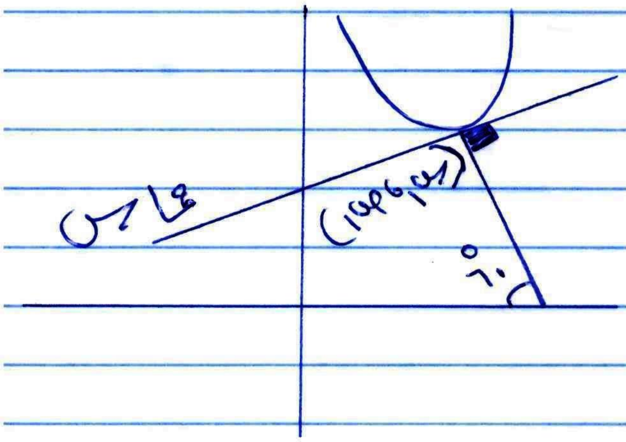
① بالاعتماد على الشكل المجاور معادلة المماس هي

(أ) $\sqrt{٣}$ (س − ١)

(ب) −$\sqrt{٣}$ (س + ١)

(ج) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (س + ١)

(د) −$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (س + ١)

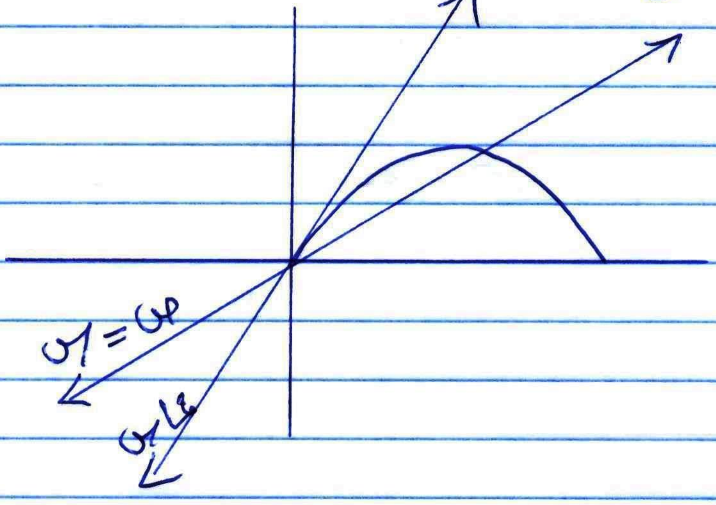


② في الشكل المجاور أوجد قَ(س١)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(ج) −$\frac{١}{٢}$ (د) −$\frac{١}{\sqrt{٣}}$

③ من الشكل التالي ، قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ص = س ومماس منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{3}$س - س² عند النقطة (٠،٠)



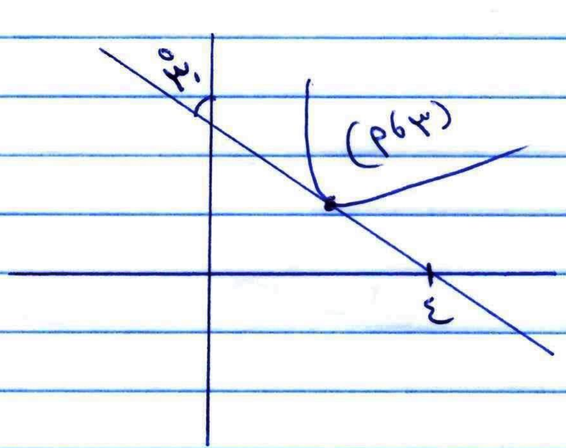
ⓐ $\frac{\pi}{3}$ ⓑ $\frac{\pi}{4}$

ⓒ $\frac{\pi}{12}$ ⓓ $\frac{\pi}{6}$

④ الشكل التالي يمثل منحنى ق(س) حيث رسم مماس للاقتران عند النقطة (٣، أ) فما قيمة الثابت أ ؟!

ⓐ $\frac{1}{3}$ ⓑ $-\sqrt{3}$

ⓒ $\sqrt{3}$ ⓓ $\frac{1}{\sqrt{3}}$



⑤ جد مساحة المثلث القائم الزاوية المكون من المماس المرسوم لمنحنى العلاقة ص = $\sqrt{س}$ ، س > ٠ عند النقطة (٤، ٢) ومحور الصادات والمستقيم س = ٤

ⓐ ٨ ⓑ ١٦ ⓒ ٤ ⓓ ٢

⑥ إذا كان منحنيا الاقترانين $ق(س) = س^{٢} + أس + ب$

$هـ(س) = س^{٣} - س^{٢} - س + جـ$ متماسان عند النقطة (-١، ١)

فإن

(أ) قيمة أ، ب، جـ على الترتيب

(أ) ٦ ، ٥ ، ١ (ب) -٢ ، ٤ ، ٥

(جـ) ٥ ، ٦ ، ١ (د) ٥ ، ١ ، -٦

⑦ إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران

ق(س) عند س = ٢ هي $ص = \frac{١}{٢}س + ٣$ فإن

$\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٤}{س^{٢} + س - ٦}$ تساوي

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $-\frac{١}{٥}$ (جـ) $-\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

⑧ مساحة الشكل الرباعي الناتج عن تقاطع المماس والعمودي

على المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢} + ٤$ عند النقطة

(١، ٥) ومحوري السينات والصادات

(أ) ٢٩ (ب) ٢٥ (جـ) ١٢٥ (د) ١١٦

⑨ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٠، ١) ، (٣، ٤)
يمس المنحنى د(س) = أس٢ − ٧س + ٥ نجد قيمة أ =

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) −٤ (د) −٢

⑩ إذا كان د(س) = س × لَ (٢س) وكانت ص = $\frac{٤٨ - س}{أ}$
تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى د(س)
عند س = ٣ ، نجد لَ (٦)

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $-\frac{١}{٣}$ (د) ٥

حلول أسئلة اختبار درس تطبيقات هندسية دفعة 2004

① من الرسم نقطة التماس هي (-١، ٢)

ميل المماس (م) = ظا(١٨٠ - ٣٠) = ظا ١٥٠° = $\boxed{\frac{-١}{\sqrt{٣}}}$

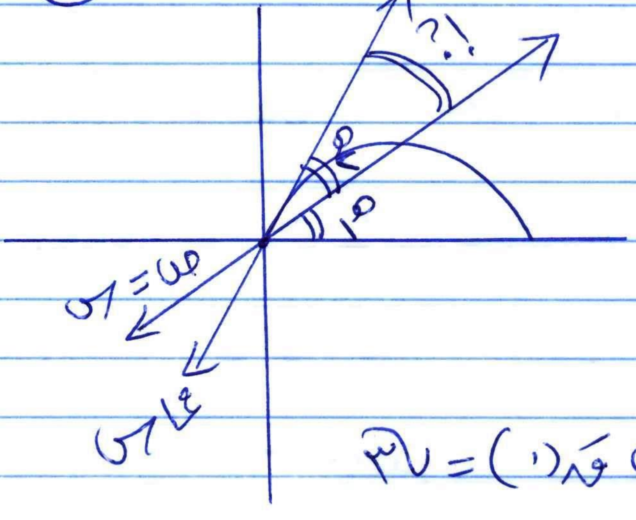
معادلة المماس هي ص - ص١ = م (س - س١)

$\Leftarrow$ ص - ٢ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ (س + ١)

② ميل العمودي = ظا(١٨٠ - ٦٠) = ظا ١٢٠° = $-\sqrt{٣}$

∴ ميل المماس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

الميل = المشتقة عند نقطة التماس $\Leftarrow$ ق'(س١) = $\boxed{\frac{١}{\sqrt{٣}}}$



③ ميل المستقيم ص = س هو ①

ظا هـ١ = ١ $\Leftarrow$ هـ١ = $\boxed{\frac{\pi}{٤}}$

ق(س) = $\sqrt{٣}$ س - س^٢

ق'(س) = $\sqrt{٣}$ - ٢س

نقطة التماس هي (٠، ٠) $\Leftarrow$ ميل المماس ق'(٠) = $\sqrt{٣}$

ظا هـ٢ = $\sqrt{٣}$ $\Leftarrow$ هـ٢ = $\boxed{\frac{\pi}{٣}}$

الزاوية المحصورة بين المستقيم ص = س ومماس منحنى الاقتران

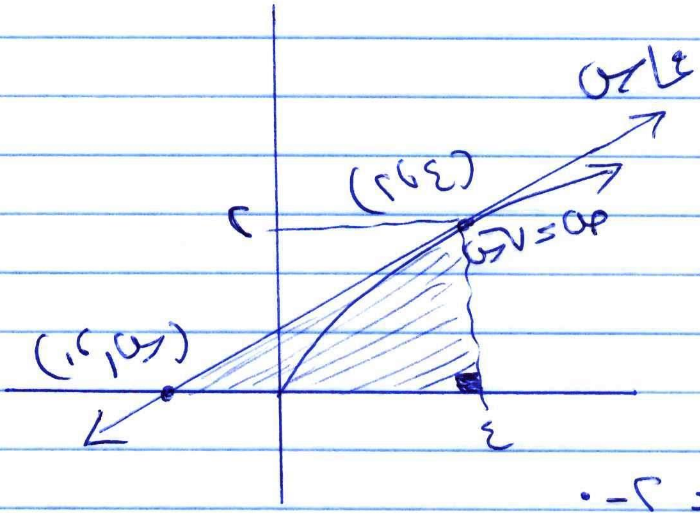
= $\frac{\pi}{٣} - \frac{\pi}{٤}$ = $\boxed{\frac{\pi}{١٢}}$

* حل س٤ ص١٠

⑤ ص = √س

ص' = ١ / ٢√س

ص'| = $\boxed{\frac{١}{٤}}$
س=٤



لكن الميل من النقطتين للمماس = ٢-٠ / ٤-س١

الميل من المماس = الميل من النقطتين عند نقطة التماس

١/٤ = ٢ / ٤-س١ ⇐ ٤-س١ = ٨ ⇐ س١ = $\boxed{-٤}$

⑥ ق(س) ، هـ(س) متماسان عند النقطة (-١،٠) ⇐ ق(-١) = هـ(-١) ، ق'(-١) = هـ'(-١)

ق(س) يمر بالنقطة (-١،٠) ⇐ ق(-١) = ٠

⇐ ١-أ+ب = ٠ ⇐ $\boxed{-أ+ب = -١}$ ← ①

هـ(س) = س³ - س² - س + جـ ، هـ يمر بالنقطة (-١،٠)

هـ(-١) = -١-١+١+جـ = ٠ ⇐ $\boxed{جـ = ١}$

ق'(س) = ٢س + أ

ق'(-١) = -٢+أ

هـ'(س) = ٣س² - ٢س - ١

هـ'(-١) = ٣+٢-١ = ٤

ق'(-١) = هـ'(-١)

⇐ -٢+أ = ٤ ⇐ $\boxed{أ = ٦}$

بالتعويض في ① عن قيمة أ

-٦+ب = -١ ⇐ $\boxed{ب = ٥}$

(٧) ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ (معادلة العمودي)

ص̄ = $\frac{١}{٢}$ (ميل العمودي) $\boxed{ق(٢) = ٤}$

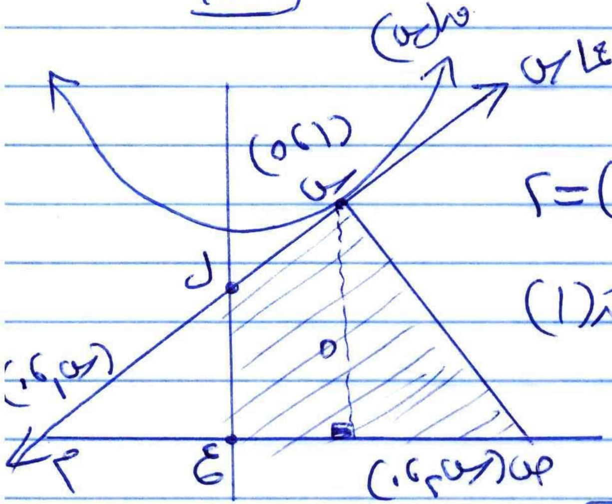
⇐ ميل المماس = (-٢) ⇐ ق̄(٢) = (-٢)

$$\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٤}{س٤ + س - ٦} = \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{(س - ٢)(س + ٣)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢} \times \frac{١}{س + ٣}$$

$$= ق̄(٢) \times \frac{١}{٥} = -٢ \times \frac{١}{٥}$$

$$= \boxed{\frac{-٢}{٥}}$$



(٨) ق̄(س) = ٢س ، ميل المماس = ق̄(١) = ٢

ميل المماس من النقطتين (١،٥) ، (س١،٠) = ق̄(١)

⇐ $\frac{٥ - ٠}{١ - س_١}$ = ٢

⇐ ٢ - ٢س١ = ٥ ⇐ س١ = $\boxed{\frac{-٣}{٢}}$ ⇐ م($\frac{-٣}{٢}$ ، ٠)

معادلة المماس هي ص - ٥ = ٢(س - ١)

ل نقطة تقاطع المماس مع محور الصادات عندما س = ٠

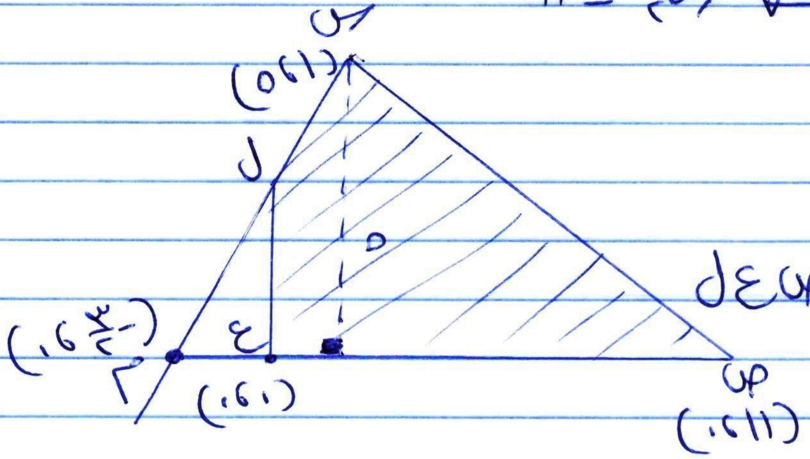
ص - ٥ = -٢ ⇐ ص = ٣ ⇐ احداثيات ل (٠،٣)

لايجاد $س_٢$

ميل العمودي من النقطة (١،٥) ، ($س_٢$، ٠) = $\frac{٥-٠}{١-س_٢}$ = $\boxed{\frac{-١}{٢}}$

⇐ ١٠ = -١ + $س_٢$ ⇐ $س_٢$ = ١١

∴ النقطة ص (١١، ٠)



∴ مساحة الشكل الرباعي س ص ع ل

= مساحة △ س ص م -

مساحة △ ل ع م

= $\frac{١}{٢}$ (١١ - (-$\frac{٣}{٢}$)) × ٥ - [$\frac{١}{٢}$ (٠ - (-$\frac{٣}{٢}$)) × ٣]

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٢٥}{٢}$ × ٥ - $\frac{٩}{٤}$ = $\frac{١٢٥}{٤}$ - $\frac{٩}{٤}$ = $\frac{١١٦}{٤}$ = $\boxed{٢٩}$

⑨ ميل المستقيم من النقطتين = $\frac{٤-١}{٣-٠}$ = ١

معادلة المستقيم = ص - ١ = ١(س - ٠) ⇐ $\boxed{ص = س + ١}$ ٤

ق'(س) = ٢أس - ٧

الميل من النقطتين = الميل من المشتقة

١ = ٢أس - ٧ ⇐ س = $\frac{٨}{٢أ}$ = $\boxed{\frac{٤}{أ}}$

تابع س٩

∵ المستقيم والمنحنى متماسان ← د(س) = ص عند نقطة التماس

← أ س٢ − ٧ س + ٥ = س + ١

أ × ١٦/أ٢ − ٧ × ٤/أ + ٥ = ٤/أ + ١

١٦/أ − ٢٨/أ + ٥ = ٤/أ + ١ ← ٤/أ − ١٦/أ + ٢٨/أ = ٥ − ١

← ١٦/أ = ٤

← أ = ١٦/٤ = ④

⑩ معادلة العمودي ص = ٤٨/٥ − ١/٥ س

ميل العمودي = (−١/٥) ← ميل المماس = ٥ = قَ(٣)

قَ(س) = س × لَ(٢س) × ٢ + ل(٢س) × ١

د(٣) = (٤٨ − ٣)/٥ = ٤٥/٥ = ٩

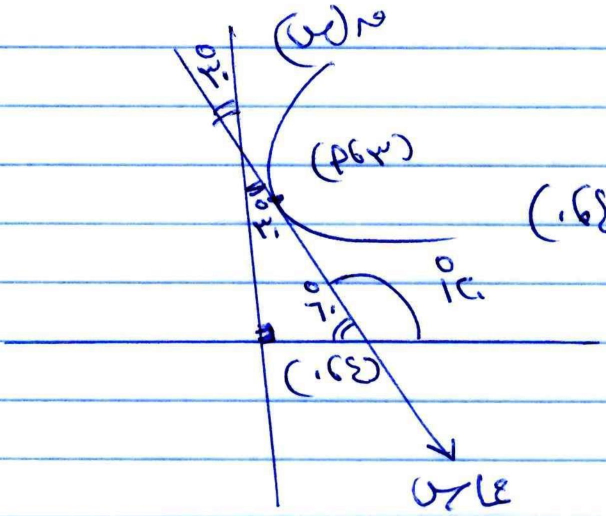
كذلك د(٣) = ٣ × ل(٦) = ٩ ← ل(٦) = ③

قَ(٣) = ٣ لَ(٦) × ٢ + ل(٦)

٥ = ٣ × لَ(٦) × ٢ + ٣

٥ = ٦ لَ(٦) + ٣ ← $\cancel{٦}$ لَ(٦)/$\cancel{٦}$ = ٢/٦ ← لَ(٦) = (١/٣)

س٤



ميل ع١حن من النقطتين (٣،م) ، (٤،٠)

$$= \frac{\text{م} - ٠}{٣ - ٤} = \text{ظا } ١٢٠°$$

$$\Leftarrow \frac{\text{م}}{١-} = -\sqrt{٣}$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{م} = \sqrt{٣}}$$

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة ٢٠٢٢

حلول أسئلة اختبار تطبيقات فيزيائية

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار تطبيقات فيزيائية
دفعة 2004

① يتحرك جسم حسب العلاقة $ف = ن^{جـ}$ وكانت سرعته بعد ١ث مثلي سرعته بعد ٢ث فإن قيمة جـ =

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٤

② يسير جسم في خط مستقيم بحيث يتحدد موقعه بالأمتار عن نقطة ثابتة بعد ن ثانية بالقاعدة $ف(ن) = ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٣ن + ٣$ فإن التسارع عندما تنعدم السرعة يساوي

(أ) صفر م/ث^{٢} (ب) ١م/ث^{٢} (جـ) ٣م/ث^{٢} (د) ٢٤م/ث^{٢}

③ يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة $ف(ن) = ٢جا^{٢}\frac{ن}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ن$ ، $ن \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ ، حيث ف: المسافة بالأمتار ، ن: الزمن بالثواني

جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته $\sqrt{٣}$

(أ) $\frac{١}{٤}$ م/ث^{٢} (ب) $\frac{١}{٢}$ م/ث^{٢} (جـ) $\frac{١}{٨}$ م/ث^{٢} (د) $-\frac{١}{٨}$ م/ث^{٢}

④ من نقطة على عمق (٥٥) م عن سطح الأرض قذف جسم رأسياً إلى أعلى بحيث أن المسافة المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانية من قذف الجسم تعطى بالعلاقة ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن^{٢} ، أوجد سرعة الجسم لحظة وصوله إلى مستوى سطح الأرض.

أ) ٥٠م/ث ب) ٢٥م/ث جـ) −٥٠م/ث د) أ + ب معاً

⑤ إذا تحرك جسم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن ، ف بالأمتار ن الزمن بالثواني ، فإن التسارع المتوسط للجسم في الثواني الثلاث الأولى يساوي

أ) ٩ ب) ٥ جـ) ٤ د) ٦

⑥ قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح الأرض حسب العلاقة ف(ن) = أن − ٥ن^{٢} ، جد قيمة أ التي تجعل أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم هو ٨٠

أ) ٥٠ ب) ٦٠ جـ) ٤٠ د) ١٠٠

⑦ من نقطة على ارتفاع ٨٠ قدم من سطح الأرض قذف جسم رأسياً لأعلى وفق العلاقة ف(ن) = ٦٤ن − ١٦ن^2 ، أوجد

(أ) مجموعة قيم ن حيث ع > ٠

(أ)]٠، ٢[(ب) [٠، ٢[(ج) [٠، ٢] (د)]٠، ٢]

(ب) جد مجموعة قيم ن حيث ع < ٠

(أ) [٠، ٢] (ب)]٢، ∞] (ج)]٢، ٥] (د)]−∞، ٠]

⑧ قذف جسم لأعلى من سطح بناية فكان ارتفاعه عن سطح البناية يعطى بالعلاقة ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن^2 فإذا علمت أن سرعته لحظة اصطدامه بالأرض تساوي (−٦٠ م/ث) فكم ارتفاع البناية ؟

(أ) ٣٠م (ب) ١٣٥م (ج) ١٦٠م (د) ١٧٥م

⑨ أسقط جسم من ارتفاع ٣٠٠م عن سطح الأرض بحيث كانت المسافة التي يقطعها بالأمتار بعد ن ث هي ف(ن) = ٥ن^2 ، جد سرعة الجسم عندما يكون الجسم على ارتفاع ١٧٥م عن سطح الأرض

(أ) ٢٥م/ث (ب) ٣٠م/ث (ج) ١٠م/ث (د) ٥٠م/ث

حلول أسئلة اختبار تطبيقات فيزيائية
دفعة 2004

① ف = ن^{جـ}

ع(١٠) = ٢ع(٥)

ع = جـ ن$^{جـ-١}$

ع(١٠) = جـ (١٠)$^{جـ-١}$

ع(٥) = جـ (٥)$^{جـ-١}$

⇐ جـ(١٠)$^{جـ-١}$ = ٢جـ(٥)$^{جـ-١}$

⇐ $\cancel{\text{جـ}}$(٢)$^{جـ-١}$ $\cancel{(٥)}$$^{جـ-١}$ = ٢$\cancel{\text{جـ}}$ $\cancel{(٥)}$$^{جـ-١}$

⇐ (٢)$^{جـ-١}$ = ٢^{١} ⇐ جـ - ١ = ١

⇐ جـ = ١ + ١

⇐ $\boxed{\text{جـ = ٢}}$ فرع (جـ)

② ف(ن) = ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٣ن + ٣ ، ت|$_{ع=٠}$ = ؟!

ع(ن) = ٣ن^{٢} - ٦ن + ٣

٠ = ٣ن^{٢} - ٦ن + ٣ ⇐ ن^{٢} - ٢ن + ١ = ٠

⇐ (ن - ١)(ن - ١) = ٠ ⇐ ن = ١ث

ت = ٦ن - ٦ ⇐ ت|$_{ن=١}$ = ٦ - ٦ = $\boxed{\text{صفر م/ث}^{٢}}$ فرع (م)

③ $\text{ف}(\text{ن}) = ٢\text{جا}^{٢}\frac{\text{ن}}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ن}$ ، $\text{ن} \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

$$\boxed{\text{تذكر/ }٢\text{جاس جتاس} = \text{جا}٢\text{س}}$$

$\text{ع}(\text{ن}) = \text{فَ}(\text{ن})$

$= ٤\text{جا}\frac{\text{ن}}{٢} \times \text{جتا}\frac{\text{ن}}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= ٢\text{جا}\frac{\text{ن}}{٢}\text{جتا}\frac{\text{ن}}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\text{ع} = \text{جا}٢(\frac{\text{ن}}{٢}) + \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \text{جان} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\text{ع} = \sqrt{٣} \Leftarrow \sqrt{٣} = \text{جان} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\Leftarrow \text{جان} = \sqrt{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow \text{جان} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\Leftarrow \text{ن} = \frac{\pi}{٣} \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

$\text{تَ} = \text{جتان} \Leftarrow \text{تَ}(\frac{\pi}{٣}) = \text{جتا}\frac{\pi}{٣} = \boxed{\frac{١}{٢}}$ م/ث² فرع (ب)

⑥ عند أقصى ارتفاع ع = ٠

$\text{ع}(\text{ن}) = \text{أ} - ١٠\text{ن} = ٠ \Leftarrow \text{أ} = ١٠\text{ن} \Leftarrow \boxed{\text{ن} = \frac{\text{أ}}{١٠}}$ زمن أقصى ارتفاع

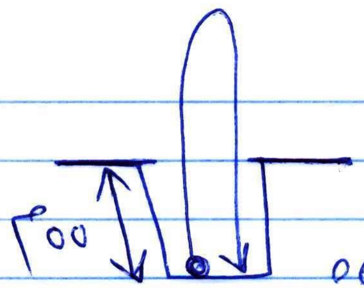
$\text{ف}(\frac{\text{أ}}{١٠}) = ٨٠$

$\text{أ} \times \frac{\text{أ}}{١٠} - ٥ \times \frac{\text{أ}^{٢}}{١٠٠} = ٨٠ \Leftarrow \frac{\text{أ}^{٢}}{١٠} - \frac{\text{أ}^{٢}}{٢٠} = ٨٠$

$\Leftarrow \frac{٢\text{أ}^{٢}}{٢٠} - \frac{\text{أ}^{٢}}{٢٠} = ٨٠$

$\Leftarrow \frac{\text{أ}^{٢}}{٢٠} = ٨٠ \Leftarrow \text{أ}^{٢} = ١٦٠٠$

$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٤٠}$



④ ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن²

عندما يصل الجسم إلى سطح الأرض تكون ف(ن) = ٥٥

⟸ ٦٠ن − ٥ن² = ٥٥ (÷ ٥)

⟸ −ن² + ١٢ن − ١١ = ٠ ⟸ ن² − ١٢ن + ١١ = ٠

⟸ (ن − ١١)(ن − ١) = ٠

⟸ ن = ⑪ ، ن = ① ← الجسم صاعد

↓ الجسم هابط

ع(ن) = ٦٠ − ١٠ن

ع(١) = ٦٠ − ١٠×١ = ٥٠م/ث

ع(١١) = ٦٠ − ١٠×١١ = −٥٠م/ث

⑤ ف(ن) = ن³ + ٢ن

الثلاث الثواني الأولى ن = صفر ⟵ ن = ٣

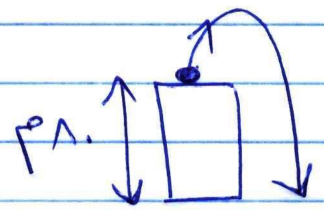
ع(ن) = ٣ن² + ٢

التسارع المتوسط = $\frac{Δع(ن)}{Δن} = \frac{ع(٣) - ع(٠)}{٣}$

$= \frac{(٣×٩ + ٢) - ٢}{٣} = \frac{٢٧}{٣} =$ ⑨

⑥

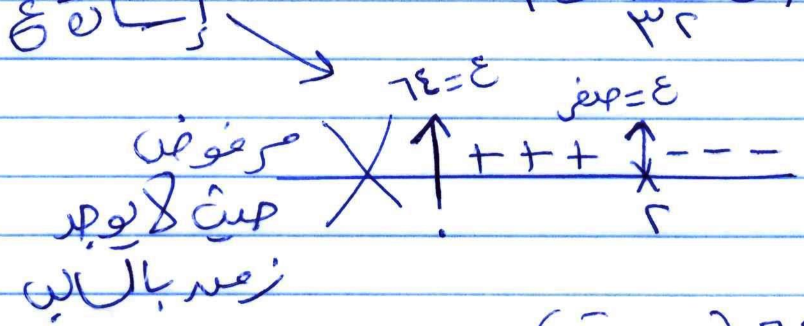
(٧) (أ)



ع(ن) = ٦٤ − ٣٢ن

نبحث إشارة السرعة

−٣٢ن + ٦٤ = ٠ ⟸ ن = $\frac{٦٤}{٣٢}$ = ٢



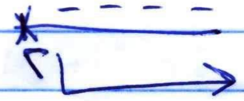
✓ عندما ن = صفر ⟸ ع = ٦٤ (موجبة)
لذلك صفر موجودة ضمن الفترة

✓ لكن عند ن = ٢ ⟸ ع = صفر والمطلوب ع > ٠

لذلك ② غير موجودة ضمن الفترة

⟸ ع > ٠ في الفترة [٠، ٢[

(ب) تبقى سرعة الجسم سالبة حتى يصطدم بالأرض



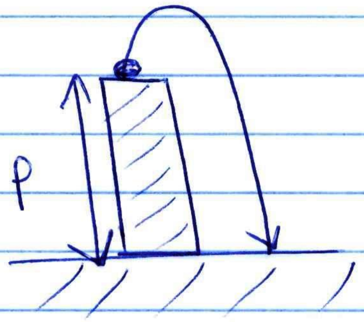
عندما يصطدم الجسم بالأرض ف = −٨٠

⟸ ٦٤ن − ١٦ن^2 = −٨٠ (÷ −١٦)

⟸ ن^2 − ٤ن − ٥ = ٠ ⟸ (ن − ٥)(ن + ١) = ٠

⟸ ن = ٥ ، ن = −١ مرفوضة

⟸ ع < ٠ في الفترة]٢، ٥[



⑧ ع(ن) = ٣٠ - ١٠ن = -٦٠

⟸ -١٠ن = -٩٠ ⟸ $\boxed{ن = ٩}$

الزمن لحظة الاصطدام بالأرض

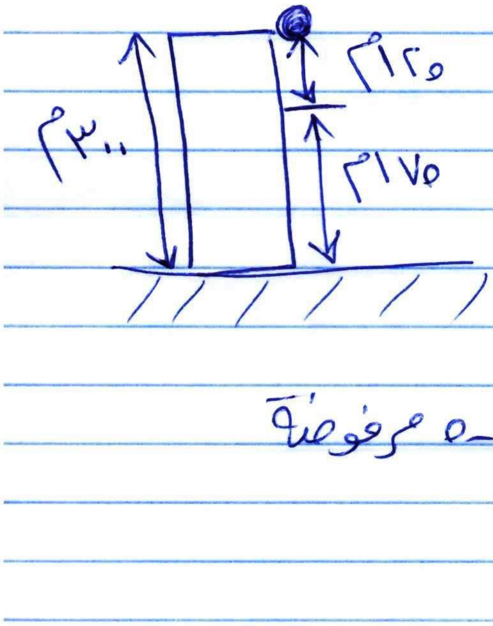
ف(٩) = -م

٣٠×٩ - ٥×٨١ = -م

٢٧٠ - ٤٠٥ = -م ⟸ -١٣٥ = -م

⟸ م = ارتفاع البناية = ١٣٥م

⑨ عندما يكون الجسم على ارتفاع ١٧٥م



من سطح الأرض يكون قطع ٣٠٠ - ١٧٥ = ١٢٥م

الزمن المستغرق لقطع ١٢٥م

$\frac{١٢٥}{٥} = \frac{٥ن^٢}{٥}$ ⟸ ن² = ٢٥

⟸ ن = ±٥   ، ن = -٥ مرفوضة

∴ ن = ٥ث

ع = ٥×٢ن = ١٠ن

ع(٥) = ١٠×٥ = ٥٠م/ث

السرعة هنا موجبة لأن الجسم يسير في اتجاه الحركة حيث أسقط للأسفل

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة ٢٠٢٢

حلول أسئلة اختبار درس قاعدة السلسلة

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس قاعدة السلسلة

دفعة 2004

① إذا كان د(س) = $س^{٢} \times |س|^{٥}$ ، وكان $هـ'(٢) = ٤$
، هـ(٢) = -١ ، فما قيمة $(د \circ هـ)'(٢)$ ؟!

ⓐ ٢٨ ⓑ -٢٨ ⓒ ٧ ⓓ -٧

② إذا كان د(س) = $س^{٣} + ١$ ، هـ(س) = ٢س - ٣ نجد
$(د \circ هـ)''(١)$

ⓐ -٢٤ ⓑ ٢٤ ⓒ -٧٢ ⓓ ٤٨

③ إذا كان د(جاس) = جتاس - ظاس ، حيث س في الربع الأول
جد $د'(\frac{١}{٢})$

ⓐ $\frac{١١}{٣\sqrt{٣}}$ ⓑ $\frac{-١١}{٣\sqrt{٣}}$ ⓒ $\frac{-١١}{١٢\sqrt{٣}}$ ⓓ $\frac{١١}{١٢\sqrt{٣}}$

④ إذا كان س = جان ، $\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٥}$ ، أوجد $\frac{دس}{دم}$
عندما ن = $\frac{٢\pi}{٣}$

ⓐ $\frac{-١}{١٠}$ ⓑ $\frac{١}{١٠}$ ⓒ $\frac{-٥}{٢}$ ⓓ $\frac{٥}{٢}$

⑤ أسطوانة دائرية ارتفاعها مثلي نصف قطرها أوجد معدل تغير حجمها بالنسبة لمساحتها الجانبية عندما يكون نصف قطرها ٣سم

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{-٤}{٩}$ (ج) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{-٩}{٤}$

⑥ إذا كان د(س) = جا٢س فأوجد دً(س) + ٦د(س)

(أ) ٤جا٢س (ب) ٢جا٤س (ج) -٢جا٢س (د) ٢جا٢س

⑦ إذا كان د(س) = أجاس حيث أ ثابت ، أ ≠ صفر

هـ(س) = $\frac{٣س}{س^{٤}+١}$ وكان (هـ ∘ د)ً($\frac{\pi}{٦}$) = صفر فجد مجموعة قيم أ

(أ) أ = ±٢ (ب) أ = ±٤ (ج) أ = ±١ (د) أ = صفر

⑧ إذا كان د($\frac{١}{٢}$) = ٢ ، دً($\frac{١}{٢}$) = ٨ فجد نها$_{س \leftarrow ٦}$ $\frac{د(جا\frac{\pi}{س}) - ٢}{س - ٦}$

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ (ب) $\frac{-\sqrt{٣}\,\pi}{٩}$ (ج) $\frac{٩}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}\,\pi}{٩}$

⑨ إذا كان د(س) = $\frac{\left(س + [س + \frac{١}{٢}]\right)^{٤}}{٤ - س^{٢}}$ ، هـ(س) = $س^{٣} + ٨$

فجد $\frac{د}{دس}$ (د(س) × هـ(س)) عند س = ١

(أ) ١٢٨ (ب) ١٦ (ج) ١٤٤ (د) صفر

②

⑩ إذا كانت $ع = \frac{س + ٢}{س - ١}$ ، $س = \frac{ص + ٤}{ص - ٢}$ فإن $\frac{دع}{دص}$

Ⓐ $\frac{١}{٤}$ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (جـ) $-\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢}$

إجابات أسئلة اختبار دروس
مادة السلسلة دفعة 2004

① $هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} \times س^{٥} & ، س \geq ٠ \\ س^{٢} \times (-س)^{٥} & ، س < ٠ \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} س^{٧} & ، س \geq ٠ \\ -س^{٧} & ، س < ٠ \end{cases}$

$(ق \circ هـ)'(٢) = ق'(هـ(٢)) \times هـ'(٢)$

$= ق'(-١) \times ٤$

عندما $س = -١ \Leftarrow ق'(س) = -٧ س^{٦}$

$\Leftarrow ق'(١) = -٧$

$(ق \circ هـ)'(٢) = -٧ \times ٤ = \boxed{-٢٨}$ فرع (ب)

② $(\text{ق} \circ \text{هـ})'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـ}'(\text{س})$

$= \text{ق}'(٢\text{س} - ٣) \times ٢$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^٢$

$\Leftarrow \text{ق}'(٢\text{س} - ٣) = ٣(٢\text{س} - ٣)^٢$

$\therefore (\text{ق} \circ \text{هـ})'(\text{س}) = ٣(٢\text{س} - ٣)^٢ \times ٢$

$= ٦(٢\text{س} - ٣)^٢ = ٦(٤\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٩)$

$\Leftarrow (\text{ق} \circ \text{هـ})''(\text{س}) = ٦(٨\text{س} - ١٢)$

$= ٤٨\text{س} - ٧٢$

$(\text{ق} \circ \text{هـ})''(١) = ٤٨(١) - ٧٢ = ٤٨ - ٧٢ = \boxed{-٢٤}$ ضع (أ)

③ $\text{ق}'(\text{جاس}) \times \text{جتاس} = -\text{جاس} - \text{قا}^٢\text{س}$

$\text{جاس} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٦}$ (الزاوية تقع في الربع الأول)

$\text{ق}'(\frac{١}{٢}) \times \text{جتا} \frac{\pi}{٦} = \text{جا} \frac{\pi}{٦} - \text{قا}^٢ \frac{\pi}{٦}$

$\text{ق}'(\frac{١}{٢}) \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = -\frac{١}{٢} - \frac{٤}{٣}$

$\text{ق}'(\frac{١}{٢}) = \frac{-١١}{\cancel{٦}_{٣}} \times \frac{\cancel{٢}^{١}}{\sqrt{٣}} = \boxed{\frac{-١١}{٣\sqrt{٣}}}$ ضع (ب)

④ $\frac{\text{دص}}{\text{دم}} = \frac{\text{دص}}{\text{دهـ}} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دم}}$

$= \text{جتا هـ} \times ٥$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دم}}\right|_{\text{هـ} = \frac{٢\pi}{٣}} = \text{جتا} \frac{٢\pi}{٣} \times ٥$

$= -\frac{١}{٢} \times ٥$

$= \boxed{-\frac{٥}{٢}}$ مزع ⓙ

$* \ \text{ص} = \text{جا هـ}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دهـ}} = \text{جتا هـ}$

$* \ \frac{\text{دم}}{\text{دهـ}} = \frac{١}{٥} \Leftarrow \frac{\text{دهـ}}{\text{دم}} = ٥$

⑤ افرض ح : حجم الأسطوانة ، نق : نصف قطر قاعدة الأسطوانة

ع : ارتفاع الأسطوانة ، م : المساحة الجانبية للأسطوانة

$\text{ح} = \pi \ \text{نق}^٢ \text{ع}$ ، $\text{ع} = ٢\text{نق}$ (حيث ارتفاعها مثلي نصف قطرها)

$\Leftarrow \text{ح} = \pi \ \text{نق}^٢ \times ٢\text{نق} = ٢\pi \ \text{نق}^٣ \Leftarrow \frac{\text{دح}}{\text{دنق}} = ٢ \times ٣\pi \ \text{نق}^٢$

$= ٦\pi \ \text{نق}^٢$

$\text{م} = ٢\pi \ \text{نق ع}$ ، $\text{ع} = ٢\text{نق}$

$\Leftarrow \text{م} = ٢\pi \ \text{نق} \times ٢\text{نق} = ٤\pi \ \text{نق}^٢ \Leftarrow \frac{\text{دم}}{\text{دنق}} = ٨\pi \ \text{نق}$

معدل تغير حجمها بالنسبة لمساحتها الجانبية $\frac{\text{دح}}{\text{دم}} = \frac{\text{دح}}{\text{دنق}} \times \frac{\text{دنق}}{\text{دم}}$

$= ٦\pi \ \text{نق}^٢ \times \frac{١}{٨\pi \ \text{نق}}$

$= \frac{٣}{٤} \text{نق}$

$\left.\frac{\text{دح}}{\text{دم}}\right|_{\text{نق}=٣} = \frac{٣}{٤} \times ٣ = \boxed{\frac{٩}{٤}}$ مزع ⓙ

⑥ $\bar{\text{ق}}(\text{س}) = ٢\,\text{جتا}\,٢\text{س}$

$\bar{\bar{\text{ق}}}(\text{س}) = -٤\,\text{جا}\,٢\text{س}$

$\bar{\bar{\text{ق}}}(\text{س}) + ٦\,\text{ق}(\text{س})$

$= -٤\,\text{جا}\,٢\text{س} + ٦\,\text{جا}\,٢\text{س} = \boxed{٢\,\text{جا}\,٢\text{س}}$ فرع ⓓ

⑦ $(\text{هـ} \circ \text{ق})'\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \bar{\text{هـ}}\left(\text{ق}\left(\frac{\pi}{٦}\right)\right) \times \bar{\text{ق}}\left(\frac{\pi}{٦}\right)$

$\text{صفر} = \bar{\text{هـ}}\left(\text{أ}\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٦}\right) \times \text{أ}\,\text{جتا}\,\frac{\pi}{٦}$

$\text{لكن}\ \bar{\text{هـ}}(\text{س}) = \frac{(\text{س}^٢+١)\times ٣ - ٣\text{س} \times ٢\text{س}}{(\text{س}^٢+١)^٢}$

$\text{صفر} = \bar{\text{هـ}}\left(\frac{\text{أ}}{٢}\right) \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{أ}$

$\text{صفر} = \frac{٣ - ٣\left(\frac{\text{أ}}{٢}\right)^٢}{\left(\left(\frac{\text{أ}}{٢}\right)^٢+١\right)^٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{أ}$

إما $\frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{أ} = ٠ \Leftarrow \text{أ} = ٠$ (مرفوض لأن $\text{أ} \neq ٠$)

أو $\frac{٣ - ٣\left(\frac{\text{أ}}{٢}\right)^٢}{\left(\left(\frac{\text{أ}}{٢}\right)^٢+١\right)^٢} = ٠ \Leftarrow ٣ - ٣\left(\frac{\text{أ}}{٢}\right)^٢ = ٠$

$\Leftarrow \left(\frac{\text{أ}}{٢}\right)^٢ = ١ \Leftarrow \frac{\text{أ}^٢}{٤} = ١$

$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = \pm ٢}$ فرع ⓐ

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{ق}\left(\frac{1}{2}\right) = ٢ \\ \Leftarrow \text{ق}\left(\text{جا}\frac{\pi}{٦}\right) = ٢ \end{array}}$$

⑧ $$\underset{\text{س}\leftarrow ٦}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}\left(\text{جا}\frac{\pi}{\text{س}}\right) - ٢}{\text{س} - ٦}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow ٦}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}\left(\text{جا}\frac{\pi}{\text{س}}\right) - \text{ق}\left(\text{جا}\frac{\pi}{٦}\right)}{\text{س} - ٦}$$

$= \text{مشتقة} \left(\text{جا}\frac{\pi}{\text{س}}\right) \text{ عندما س} = ٦$

$$= \text{قَ}\left(\text{جا}\frac{\pi}{\text{س}}\right) \times \text{جتا}\left(\frac{\pi}{\text{س}}\right) \times \frac{-\pi}{\text{س}^2}$$

$$= \text{قَ}\left(\text{جا}\frac{\pi}{٦}\right) \times \text{جتا}\frac{\pi}{٦} \times \frac{-\pi}{٣٦}$$

$$= \text{قَ}\left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{-\pi}{٣٦}$$

$$= ٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{-\pi}{٣٦} = \boxed{\frac{-\sqrt{٣}\,\pi}{٩}} \text{ فرع (ب)}$$

⑨ $\text{عندما س} = ١ \longrightarrow [\text{س} + \tfrac{1}{2}] = \underbrace{[١ + \tfrac{1}{2}]}_{\text{عدد غير صحيح}} = ١$

$$\therefore \text{ق(س)} = \frac{(\text{س}+١)^{٤}}{٤ - \text{س}^{٢}}$$

$$\text{قَ(س)} = \frac{(٤-\text{س}^{٢}) \times ٤(\text{س}+١)^{٣} - (\text{س}+١)^{٤} \times -٢\text{س}}{(٤-\text{س}^{٢})^{٢}}$$

$$\text{قَ(١)} = \frac{٣ \times ٤ \times ٨ + ١٦ \times ٢}{٩} = \frac{١٢٨}{٩}$$

$$\text{هـَ(س)} = ٣\text{س}^{٢} \Leftarrow \text{هـَ(١)} = ٣$$

$$\frac{د}{دس}\left(د(س)\times هـ(س)\right)\Big|_{س=١} = (د\times هـ)'(١)$$

$$= د(١)\times هـ'(١) + هـ(١)\times د'(١)$$

$$= \frac{١٦}{٣}\times ٣ + ٩\times\frac{١٢٨}{٩}$$

$$= ١٦ + ١٢٨ = \boxed{١٤٤}$$ فرع ج

⑩ $$\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص}\times\frac{دص}{دس}$$

$$= \frac{(ص-١)\times ١-(ص+٢)\times ١}{(ص-١)^٢}\times\frac{(س-٢)-(س+٤)}{(س-٢)^٢}$$

$$= \frac{\cancel{ص}-١-\cancel{ص}-٢}{(ص-١)^٢}\times\frac{\cancel{س}-٢-\cancel{س}-٤}{(س-٢)^٢}$$

$$= \frac{-٣\times -٦}{(ص-١)^٢\times(س-٢)^٢} = \frac{١٨}{(ص-١)^٢(س-٢)^٢}$$

$$= \frac{١٨}{\left(١-\left(\frac{س+٤}{س-٢}\right)\right)^٢(س-٢)^٢} = \frac{١٨}{\left(\frac{\cancel{س}+٤-\cancel{س}+٢}{س-٢}\right)^٢(س-٢)^٢}$$

$$= \frac{١٨}{\frac{(٦)^٢}{(س-٢)^٢}\times(\cancel{س}-٢)^٢} = \frac{١٨}{٣٦} = \boxed{\frac{١}{٢}}$$ فرع ⓓ

⑨

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة 2022

حلول أسئلة اختبار درس الاشتقاق الضمني

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الاشتقاق الضمني

دفعة 2004

① إذا كان س = ق(ص^{٢} + ١) ، قَ(٥) = ٤

فإن $\frac{دص}{دس}\Big|_{ص=٢}$

أ) ١٦ ب) ٤ جـ) $\frac{١}{١٦}$ د) -٤

② إذا كان ق^{٣}(ص^{٢}) = ٥س^{٣} + ٣ وكانت ص = ١ ، عند س = ١

، قَ(١) = ٥ فإن $\frac{دص}{دس}\Big|_{(١،١)}$

أ) $\frac{١}{٨}$ ب) -$\frac{١}{٨}$ جـ) ١٥ د) -١٥

③ النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = ٣ والتي تحقق المعادلة

صَ = -٢ هي

أ) (٠ ، ٤) ب) (٤ ، ١) جـ) (١ ، ٤) د) (-١ ، ٤)

④ إذا كانت ص = $\sqrt{س + ص}$ فإن صَ (٢ص - ١)^{٣} =

أ) ٢ ب) -٢ جـ) صفر د) ١

⑤ إذا كانت س = ظتا ص فإن ص̄ (١ + س٢) =

(أ) − جا ص (ب) − جا س (ج) جتا٢ ص (د) جا٢ ص

⑥ إذا كانت ص = √(٥ + ٢ جا س) فإن ٢ ص ص̿ + ٢ (ص̄)٢ + ص٢ =

(أ) ٢ (ب) −٢ (ج) ٥ (د) −٥

⑦ إذا كان س = جا ٣ن ، ص = جتا ٣ن فإن د٢ص / دس٢

عندما ن = π / ٣

(أ) صفر (ب) ١ (ج) −١ (د) ١ / ٣

⑧ إذا كان ص جتا ٢س = س جا ٢ص ، فإن دص / دس |(π/٤ ، π/٢)

(أ) ٢ (ب) −٢ (ج) ١ / ٢ (د) −١ / ٢

⑨ النقطة على منحنى العلاقة √س + √ص = ٣ والتي يكون عندها المماس أفقياً

(أ) (٣ ، ٠) (ب) (٣ ، ١) (ج) (−٢ ، ١) (د) (٩ ، ٠)

⑩ إذا كانت س٢ − ص٢ = ١ فإن ص٣ ص̿ =

(أ) صفر (ب) −١ (ج) ١ (د) ١ / ٤

حلول أسئلة اختبار الاشتقاق الضمني

① س = ق(ص^{٢} + ١)

اشتقه الطرفين ضمنياً بالنسبة لـ س

١ = قَ(ص^{٢}+١) × ٢ص صَ

عندما ص = ٢

١ = قَ(٥) × ٢ × ٢ × صَ

١ = ٤ × ٤ صَ ⟸ صَ = $\boxed{\frac{١}{١٦}}$ فرع ⓙ

② ق^{٣}(ص^{٢}) = ٥س^{٣} + ٣

اشتقه الطرفين بالنسبة لـ س

٣ق^{٢}(ص^{٢}) × قَ(ص^{٢}) × ٢ص صَ = ١٥س^{٢}

عندما س = ١ ، ص = ١

٣ق^{٢}(١) × قَ(١) × ٢ × ١ × صَ = ١٥(١)^{٢}

٣ × (②)^{٢} × ٥ × ٢صَ = ١٥

٣ × ٤ × ٥ × ٢صَ = ١٥

⟸ صَ = $\frac{١٥}{٣ × ٤ × ٥ × ٢}$ = $\boxed{\frac{١}{٨}}$ فرع ⓐ

ق^{٣}(ص^{٢}) = ٥س^{٢} + ٣

عوض عند س = ١

ص = ١

ق^{٣}(١) = ٥ + ٣

ق^{٣}(١) = ٨

ق(١) = $\sqrt[٣]{٨}$ = ②

①

③ $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ (اشتقه الطرفين ضمنياً بالنسبة لـ س)

$\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{ص}} \times صَ = ٠$

عندما صَ = -٢ $\Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{-٢}{٢\sqrt{ص}} = ٠$

$\Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{س}} \times \frac{١}{\sqrt{ص}} \Leftarrow \boxed{\sqrt{ص} = ٢\sqrt{س}}$ ⊛

عوض عن $\sqrt{ص}$ في المعادلة الأساسية

$\sqrt{س} + ٢\sqrt{س} = ٣ \Leftarrow ٣\sqrt{س} = ٣ \Leftarrow \sqrt{س} = ١$

لكن $\sqrt{ص} = ٢\sqrt{س}$

$\sqrt{ص} = ٢ \times ١ = ②$ بالتربيع $\Leftarrow$ ص = ٤

$\Leftarrow$ النقطة (س ، ص) هي (١ ، ٤) فرع ⓙ

④ $ص = \sqrt{س + ص}$ ربع الطرفين

$ص^٢ = س + ص$ اشتقه بالنسبة لـ س

$٢ص\,صَ = ١ + صَ$

$٢ص\,صَ - صَ = ١ \Leftarrow صَ\,(٢ص - ١) = ١$

$\Leftarrow صَ = \frac{١}{٢ص - ١}$ اشتقه مرة ثانية

* **تابع س٤ /**

$\text{ص}'' = \dfrac{-١ \times ٢\text{ص}'}{(٢\text{ص}-١)^{٢}}$ (نعوض عن $\text{ص}' = \dfrac{١}{٢\text{ص}-١}$)

$\text{ص}'' = \dfrac{-٢ \times \dfrac{١}{٢\text{ص}-١}}{(٢\text{ص}-١)^{٢}} = \dfrac{-٢}{(٢\text{ص}-١)} \times \dfrac{١}{(٢\text{ص}-١)^{٢}}$

$\Leftarrow \text{ص}'' = \dfrac{-٢}{(٢\text{ص}-١)^{٣}} \Leftarrow \text{ص}''(٢\text{ص}-١)^{٣} = \boxed{-٢}$ فرع ⓑ

⑤ س = ظتا ص اشتقه بالنسبة لـ س

$١ = -\text{قتا}^{٢}\text{ص} \times \text{ص}' \Leftarrow \text{ص}' = \dfrac{-١}{\text{قتا}^{٢}\text{ص}} = -\text{جا}^{٢}\text{ص}$

$\Leftarrow \text{ص}' = -\text{جا}^{٢}\text{ص}$ (اشتقه مرة ثانية بالنسبة لـ س)

$\text{ص}'' = -٢\,\text{جاص جتاص ص}'$ (عوض عن $\text{ص}' = \dfrac{-١}{\text{قتا}^{٢}\text{ص}}$)

$\text{ص}'' = -٢\,\text{جاص جتاص} \times \dfrac{-١}{\text{قتا}^{٢}\text{ص}}$

$\text{ص}'' = \text{جا}٢\text{ص} \times \dfrac{١}{١+\text{ظتا}^{٢}\text{ص}}$

$\text{ص}'' = \text{جا}٢\text{ص} \times \dfrac{١}{١+\text{ظتا}^{٢}\text{ص}}$

* ٢جاص جتاص = جا٢ص
* $\text{قتا}^{٢}\text{ص} = ١ + \text{ظتا}^{٢}\text{ص}$

س = ظتا ص
$\text{س}^{٢} = \text{ظتا}^{٢}\text{ص}$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{جا٢ص}}{\text{١} + \text{س}^{٢}}$$

$\bar{\text{ص}}(\text{١} + \text{س}^{٢}) = \boxed{\text{جا٢ص}}$ ⟵ فرع (د)

⑥ $\text{ص} = \sqrt{\text{٥} + \text{٢جاس}}$ ربع الطرفين

$\text{ص}^{٢} = \text{٥} + \text{٢جاس}$ اشتقه ضمنياً بالنسبة لـ س

$\text{٢ص}\bar{\text{ص}} = \text{٢جتاس}$ اشتقه مرة ثانية

$\text{٢ص}\bar{\bar{\text{ص}}} + \bar{\text{ص}} \times \text{٢}\bar{\text{ص}} = -\text{٢جاس}$

$\text{٢ص}\bar{\bar{\text{ص}}} + \text{٢}(\bar{\text{ص}})^{٢} + \text{٢جاس} = \text{٠}$ ⟵ (*)

لكن $\text{ص}^{٢} = \text{٥} + \text{٢جاس}$

$\therefore \text{ص}^{٢} - \text{٥} = \text{٢جاس}$

عوض في (*) عن قيمة ٢جاس

$\text{٢ص}\bar{\bar{\text{ص}}} + \text{٢}(\bar{\text{ص}})^{٢} + \text{ص}^{٢} - \text{٥} = \text{٠}$

$\text{٢ص}\bar{\bar{\text{ص}}} + \text{٢}(\bar{\text{ص}})^{٢} + \text{ص}^{٢} = \boxed{\text{٥}}$ ⟵ فرع (و)

(٧) $\text{س} = \text{جا}\,\text{٣ن}$ ، $\text{ص} = \text{جتا}\,\text{٣ن}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -\text{٣}\,\text{جا}\,\text{٣ن} \quad ، \quad \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \text{٣}\,\text{جتا}\,\text{٣ن} \Leftarrow \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{٣}\,\text{جتا}\,\text{٣ن}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\cancel{\text{٣}}\,\text{جا}\,\text{٣ن} \times \frac{1}{\cancel{\text{٣}}\,\text{جتا}\,\text{٣ن}} = \frac{-\text{جا}\,\text{٣ن}}{\text{جتا}\,\text{٣ن}} = \boxed{-\text{ظا}\,\text{٣ن}}$$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = -\text{٣}\,\text{قا}^2\,\text{٣ن} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$$

$$= -\cancel{\text{٣}}\,\text{قا}^2\,\text{٣ن} \times \frac{1}{\cancel{\text{٣}}\,\text{جتا}\,\text{٣ن}}$$

$$= \frac{-1}{\text{جتا}^2\,\text{٣ن}} \times \frac{1}{\text{جتا}\,\text{٣ن}} = -\left(\frac{1}{\text{جتا}\,\text{٣ن}}\right)^{\text{٣}}$$

$$\left.\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}\right|_{\text{ن} = \frac{\pi}{\text{٣}}} = -\left(\frac{1}{\text{جتا}\,\text{٣}(\frac{\pi}{\text{٣}})}\right)^{\text{٣}} = -\left(\frac{1}{\text{جتا}\,\pi}\right)^{\text{٣}}$$

$= -(-1)^{\text{٣}} =$ ① ضع (٥)

⑧ ص جتا٢س = س جا٢ص   اشتق الطرفين بالنسبة لـ س

ص × -٢جا٢س + جتا٢س × صَ = س × ٢جتا٢ص × صَ + جا٢ص × ١

عندما س = $\frac{\pi}{4}$ ، ص = $\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{\cancel{2}}$ × -$\cancel{2}$جا$\cancel{2}$($\frac{\pi}{\underset{2}{\cancel{4}}}$) + جتا٢($\frac{\pi}{4}$) × صَ = $\frac{\pi}{4}$ × ٢جتا٢($\frac{\pi}{2}$) × صَ + جاπ

-π جا($\frac{\pi}{2}$) + $\underset{\text{صفر}}{\cancel{\text{جتا}(\frac{\pi}{2})}}$ × صَ = $\frac{\pi}{2}$ جتاπ صَ + $\overset{\text{صفر}}{\cancel{\text{جا}\pi}}$

-π + صفر = $\frac{-\pi}{2}$ صَ + صفر

-π = $\frac{-\pi}{2}$ صَ ⟸ صَ = -π × $\frac{2}{-\pi}$

⟸ $\boxed{\text{صَ} = 2}$ فرع (أ)

⑨ √س + √ص = ٣   اشتق الطرفين ضمنياً بالنسبة لـ س

$\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$ + $\frac{\text{صَ}}{2\sqrt{\text{ص}}}$ = ٠ ⟸ $\frac{\text{صَ}}{2\sqrt{\text{ص}}}$ $\cancel{=}$ $\frac{-1}{2\sqrt{\text{س}}}$

⟸ صَ × ٢√س = -٢√ص ⟸ صَ = $\frac{-2\sqrt{\text{ص}}}{2\sqrt{\text{س}}}$ ⟸ صَ = $\frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}}$ (*)

المماس أفقي ⟸ صَ = ٠ عوض في (*)

⟸ ٠ = $\frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}}$ ⟸ √ص = ٠ ⟸ ص = ٠

⟸ عوض في العلاقة الأساسية √س + ٠ = ٣ (بالتربيع)

⇐ $\text{س} = ٩$

⇐ النقطة (س، ص) هي (٩، ٠) فرع (د)

(١٠) $\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = ١$ اشتقه ضمنياً بالنسبة لـ س

$٢\text{س} - ٢\text{ص}\,\text{ص}' = ٠$ ⇐ $٢\text{س} = ٢\text{ص}\,\text{ص}'$

⇐ $\text{ص}' = \frac{٢\text{س}}{٢\text{ص}}$ ⇐ $\boxed{\text{ص}' = \frac{\text{س}}{\text{ص}}}$

اشتقه مرة ثانية

عوضنا عن $\text{ص}'$

$$\text{ص}'' = \frac{\text{ص} \times ١ - \text{س} \times \text{ص}'}{\text{ص}^{٢}} = \frac{\text{ص} - \text{س} \times \frac{\text{س}}{\text{ص}}}{\text{ص}^{٢}}$$

$$\text{ص}'' = \frac{\frac{\text{ص}}{١} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}}}{\text{ص}^{٢}} = \frac{\frac{\text{ص}^{٢} - \text{س}^{٢}}{\text{ص}}}{\text{ص}^{٢}}$$

⇐ $\text{ص}'' = \frac{-١}{\text{ص}} \times \frac{١}{\text{ص}^{٢}}$ ⇐ $\text{ص}'' = \frac{-١}{\text{ص}^{٣}}$

⇐ $\text{ص}''\,\text{ص}^{٣} = -١$ فرع (ب)

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة 2022

حلول أسئلة اختبار الوحدة الأولى (حساب التفاضل)

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الأولى (حساب التفاضل)

دفعة 2004

① إذا كان $ص = ع^{٣} + ١$ ، $س ع^{٣} = ع^{٢} - ٢$

فأوجد قيمة $\frac{دص}{دس}$ عندما $ع = ٢$

(أ) ٢٤ (ب) −٢٤ (ج) ١٢ (د) −١٢

② إذا كان $(ق \circ هـ)(س) = س$ ، $قَ(س) = \frac{٢}{س}$

$هـ(س) \neq ٠$ ، هـ(س) قابلاً للاشتقاق فإن $هـَ(س) =$

(أ) $\frac{١}{٢}هـ(س)$ (ب) $٣هـ(س)$ (ج) $٢هـ(س)$ (د) $هـ(س)$

③ إذا كان $ق(س، ص) = جاص$ ، جد $صَ|_{(١، \frac{\pi}{٢})}$

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) π (ج) $-\frac{\pi}{٢}$ (د) ١

④ إذا كان $ق(س) = |س^{٣} + س^{٢} - ٨| \times [\frac{٢}{٥} - س]$

فإن قَ(١)

(أ) ٥ (ب) −٥ (ج) ±٥ (د) غ.م

⑤ جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $(ص + س)^{٣} = ٣ص^{٢} + ٥$

عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم ص + س − ٢ = ٠ .

أ) ص = −٢س + ٣ ب) ص = $-\frac{٢}{٣}$ س + ١

ج) ص − ٢س = −٣ د) أ + ب معاً .

⑥ $\underset{س \to ١}{نهـا} \left(\frac{١ + لو_{هـ} \sqrt{س}}{س} - ١ \right) \left(\frac{١}{١ - س} \right) =$

أ) −٢ ب) ٢ ج) $\frac{١}{٢}$ د) $-\frac{١}{٢}$

⑦ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أ - س^{٢} &، -٢ \le س < ١ \\ ٦ - ب س &، ١ \le س \le ٢ \end{cases}$

① فإن قيمة الثابتين أ ، ب علماً بأن ق(س) قابل للاشتقاق في مجاله

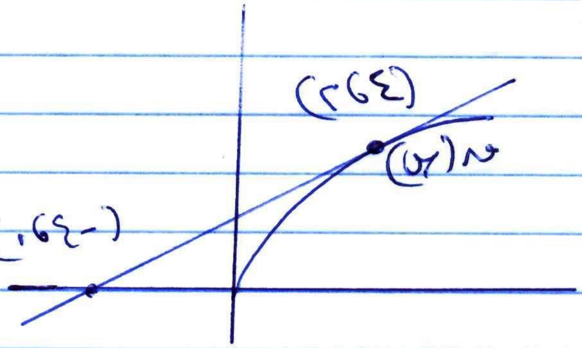
أ) أ = ٥ ، ب = ١ ب) أ = ٥ ، ب = ٢ ج) أ = ٠ ، ب = ٢ د) أ = ١ ، ب = ٢

② قيم س التي تجعل المماس يوازي القاطع الواصل بين النقطتين

(−٢، ق(−٢)) ، (٢، ق(٢))

أ) س = $\frac{١}{٨}$ ب) س = $-\frac{١}{٨}$ ج) س = $\frac{١}{٤}$ د) س = $\frac{١}{٤}$

٨) في الشكل المجاور إذا كانت $ص = ق^2(س) + س$ فما قيمة $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٤}$



أ) −١ ب) −٤ جـ) ١ د) ٢

٩) إذا كانت $هـ(١) = -٣$ ، $هـ'(١) = ٢$ ، $ق'(-٣) = ٥$

جد $\frac{د}{دس}\left(\frac{هـ(س^2)}{س} - ق(س-٤)\right)\Big|_{س=١}$

أ) ٥ ب) −٥ جـ) ٢ د) −٢

١٠) إذا كان متوسط التغير في الاقتران $ق(س) = جتاس - أ جاس$ يساوي $\frac{٤}{\pi}$ في الفترة $[\frac{\pi}{2} ، \pi]$ ، ما قيمة أ ؟

أ) ١٥ ب) ٤٦ جـ) ٣ د) ١,٥

١١) يتحرك جسم وفق $ع^2(ن) = ٦ - \frac{أ}{ف(ن)}$ حيث ف المسافة بال(م) ون الزمن بالثواني ، إذا علمت أن تسارع الجسم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته يساوي ٩ م/ث² فإن قيمة الثابت أ ؟

أ) أ = ٢ ب) أ = ٦ جـ) أ = صفر د) أ = ٥

⑫ قذف جسم من عمق بئر للأعلى حسب العلاقة ف(ن) = ١٠ن − ٢ن^{٢}
فإذا كانت سرعته على ارتفاع ٣٠م فوق سطح الأرض تساوي
−٤م/ث فما عمق البئر الذي أطلق منه الجسم

(أ) ٣٠   (ب) ١٨   (جـ) ٦   (د) ١٥

⑬ إذا كان المستقيم القاطع لمنحنى ق(س) في النقطتين (١، ق(١))
، (٣، ٥) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع محور السينات الموجب ،
احسب متوسط تغير الاقتران هـ(س) = $\frac{٢}{ق(س)}$ في الفترة
[١، ٣]

(أ) $\frac{٧}{٤}$ (ب) $\frac{٧٠}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٧٠}$ (د) $\frac{١٤}{٧٠}$

⑭ إذا كان ص = أ جاس + ب جتاس حيث $\frac{دص}{دس}$ + ٢ص = ٥جتاس
جد قيم الثابتين أ ، ب

(أ) أ = ١ ، ب = ٢   (ب) أ = صفر ، ب = ١   (جـ) أ = ١ ، ب = −٢   (د) أ = −١ ، ب = −٢

⑮ إذا كان هـ(س) = جتا $\left(\frac{\pi}{س}\right)$ جد $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{(ق∘هـ)^{٢}(س) - ٩}{س^{٢} - ٩}$

علماً بأن ق$\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٣ ، قَ$\left(\frac{١}{٢}\right)$ = $\frac{\sqrt{٣}}{\pi}$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) −١

حلول أسئلة اختبار الوحدة الأولى
دفعة 2004

① ص = ع^{٣} + ١ ، س ع^{٣} = ع^{٢} − ٢

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ × $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ ⟵ ①

ص = ع^{٣} + ١

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ = ٣ع^{٢} ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}\Big|_{\text{ع}=٢}$ = ٣(٢)^{٢} = ⑫

س ع^{٣} = ع^{٢} − ٢ (اشتق بالنسبة لـ س)

س^{٣} × $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ + ع × ٣س^{٢} = ٢ع $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ ⟵ ⊛

عندما ع = ٢ ⟸ ٢س^{٣} = ٤ − ٢ ⟸ ٢س^{٣} = ٢ ⟸ س^{٣} = ١
⟸ س = ١

١ × $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ + ٢ × ٣ = ٤ $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ − ٤ $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = −٦ ⟸ −٣ $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = −٦ ⟸ $\boxed{\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٢}$

عوض في علاقة ①

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ١٢ × ٢ = ㉔ فرع (أ)

② (ق ∘ هـ)(س) = س

قَ(س) = $\frac{٢}{س}$ ، هـ(س) ≠ ٠ ، هـ(س) قابل للاشتقاق

الحل (ق ∘ هـ)(س) = ق(هـ(س)) = س ، اشتقه الطرفين

قَ(هـ(س)) × هـَ(س) = ١

$\frac{٢ هـَ(س)}{هـ(س)}$ = ١ ⟸ ٢هـَ(س) = هـ(س)

⟸ هـَ(س) = $\frac{١}{٢}$ هـ(س) فرع (أ)

③ ق(س ص) = جا ص ، اشتقه الطرفين بالنسبة لـ س

الحل قَ(س ص) × [س صَ + ص × ١] = جتا ص × صَ

عند النقطة (١ ، $\frac{\pi}{٢}$)

قَ($\frac{\pi}{٢}$) [صَ + $\frac{\pi}{٢}$] = $\overset{\text{صفر}}{\cancel{\text{جتا } \frac{\pi}{2}}}$ × صَ

قَ($\frac{\pi}{٢}$) [صَ + $\frac{\pi}{٢}$] = ٠

إما قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٠ أو صَ + $\frac{\pi}{٢}$ = ٠

صَ = $\boxed{-\frac{\pi}{٢}}$ فرع (ج)

④ ق(س) = |س³ + س² − ٨| × [٢/٥ − س] ، قَ(١)

(الحل) عوض عن س = ١ في |س³ + س² − ٨| ⟵ |١ + ١ − ٨| = |−٦| ⟵ سالبة

∴ نضرب القيمة في سالب

عوض عن س = ١ في [٢/٥ − س] ⟵ = [٢/٥ − ١] = [−١/٥] = −١ ⟵ كسر غير صحيح

∴ ق(س) = (−س³ − س² + ٨) × −١

⇐ ق(س) = س³ + س² − ٨

قَ(س) = ٣س² + ٢س

قَ(١) = ٣(١)² + ٢(١) = $\boxed{٥}$ فرع (أ)

⑤ المنحنى والمستقيم متقاطعان ⇐ ص المنحنى = ص المستقيم عند نقطة التقاطع

ص + س − ٢ = ٠ ⇐ ص + س = ٢ ⟵ ⊛

عوض في معادلة المنحنى من ⊛

(٢)³ = ٣ص² + ٥ ⇐ ٣ص² = ٨ − ٥ ⇐ ٣ص² = ٣

⇐ ص = ±١

✓ عندما ص = ١ ⟵ (١ + س)³ = ٨ ⇐ ١ + س = ٢ ⇐ س = ١

⇐ نقطة التقاطع (١، ١)

✓ عندما ص = −١ ⟵ (س − ١)³ = ٨ ⇐ س − ١ = ٢ ⇐ س = ٣

⇐ نقطة التقاطع (٣، −١)

تابع س٥

(ص + س)^{٣} = ٣ص^{٢} + ٥   (اشتقه بالنسبة لـ س)

٣(ص + س)^{٢} × (صَ + ١) = ٦ص صَ ⟵ (**)

حالة ① عوض عن النقطة (١،١) في (**)

٣(١+١)^{٢} (صَ + ١) = ٦صَ   ميل المماس م١

١٢صَ + ١٢ = ٦صَ ⟸ ٦صَ = -١٢ ⟸ $\boxed{\text{صَ} = -٢}$

⟸ معادلة المماس ص - ١ = -٢(س - ١)

⟸ $\boxed{\text{ص} = -٢\text{س} + ٣}$

حالة ② عوض عن النقطة (٣، -١) في (**)

٣(-١ + ٣)^{٢} × (صَ + ١) = ٦ × -صَ   ميل المماس م٢

⟸ ١٢صَ + ١٢ = -٦صَ ⟸ ١٨صَ = -١٢ ⟸ صَ = $\frac{-١٢}{١٨}$ = $\boxed{\frac{-٢}{٣}}$

⟸ معادلة المماس ص + ١ = $\frac{-٢}{٣}$ (س - ٣)

⟸ $\boxed{\text{ص} = \frac{-٢}{٣}\text{س} + ١}$

⑥ $$\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}} \left(\frac{1 + \text{لوهـ}\sqrt{س}}{س} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - س} \right)$$

توحيد مقامات

$$\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}} \left(\frac{1 + \text{لوهـ}\sqrt{س} - س}{س} \right) \left(\frac{1}{1 - س} \right) = \underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}} \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\,\text{لوهـ}\, س - س}{(1 - س)\, س} \right)$$

بالتعويض المباشر $\frac{1 + \text{صفر} - 1}{1(1 - 1)} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نستخدم قاعدة لوبيتال والمشتقة بالنسبة لـ س

$$= \underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}} \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{س} - 1}{1 - 2س} = \frac{\frac{1}{2} \times 1 - 1}{1 - 2} = \frac{-\frac{1}{2}}{-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$ فرع (ج)

⑦ $$\text{ق}(س) = \begin{cases} \text{أ} - س^2 \text{ ،} & -2 \le س < 1 \\ 6 - \text{ب}\, س \text{ ،} & 1 \le س \le 2 \end{cases}$$

① بـ ق(س) قابل للاشتقاق على مجاله ⟸ قابل للاشتقاق عند س = 1

$$\text{ق}'(س) = \begin{cases} -2س \text{ ،} & -2 < س < 1 \\ -\text{ب} \text{ ،} & 1 < س < 2 \\ \text{غ.م} \text{ ،} & س = -2 \text{ ، } 2 \end{cases}$$

$\text{ق}'(1)^+ = \text{ق}'(1)^-$ ⟸ $-\text{ب} = -2$ ⟸ $\boxed{\text{ب} = 2}$

ق(س) قابل للاشتقاق عند س = 1

⟸ ق(س) متصل عند س = 1 ⟸ $\text{ق}(1) = \underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}}\, \text{ق}(س)$

⟸ $6 - \text{ب} = \text{أ} - 1$ (عوض عن ب = 2)

٦ - ٢ = أ - ١ ⟸ $\boxed{\text{أ} = ٥}$

② ميل القاطع = $\dfrac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(-٢)}{٢ - (-٢)}$ = $\dfrac{٢ - ١}{٤}$ = $\boxed{\dfrac{١}{٤}}$

المماس يوازي القاطع ⟸ ميل المماس = ميل القاطع

⟸ ميل المماس = قَ(س) = $\dfrac{١}{٤}$

قَ(س) = {
- -٢س ، -٢ < س < ١
- -٢ ، ١ < س < ٢
- غ.م ، س = -٢، ٢

* -٢ ≠ $\dfrac{١}{٤}$

* -٢س = $\dfrac{١}{٤}$ (الميل = المشتقة)

⟸ س = $-\dfrac{١}{٨}$ ∈]-٢، ١[

⑧ ص = ق²(س) + س (اشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س)

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢ق(س) × قَ(س) + ١

ق(٤) = ٢
من الرسم

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=٤}$ = ٢ق(٤) قَ(٤) + ١

قَ(٤) = ميل المماس من النقطتين (٤، ٢) ، (-٤، ٠)

= $\dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ = $\dfrac{٠ - ٢}{-٤ - ٤}$ = $\dfrac{-٢}{-٨}$ = $\boxed{\dfrac{١}{٤}}$ ⟸ قَ(٤) = $\boxed{\dfrac{١}{٤}}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=٤}$ = ٢ × ٢ × $\dfrac{١}{٤}$ + ١ = ١ + ١ = $\boxed{٢}$ فرع (د)

⑨ هـ(١) = -٣ ، هـَ(١) = ٢ ، قَ(-٣) = ٥

$\frac{د}{دس}\left(\frac{هـ(س^٢)}{س} - ق(س-٤)\right)\Big|_{س=١}$ ؟؟

$= \frac{س \times هـَ(س^٢) \times ٢س - هـ(س^٢) \times ١}{س^٢} - قَ(س-٤)$

$\frac{د}{دس}\Big|_{س=١} = \frac{١ \times هـَ(١^٢) \times ٢ \times ١ - هـ(١^٢)}{(١)^٢} - قَ(١-٤)$

$= \frac{٢هـَ(١) - هـ(١)}{١} - قَ(-٣)$

$= ٢\times٢ + ٣ - ٥ = ٧ - ٥ = \boxed{٢}$ فرع ②

⑩ ق(س) = جتا س − أ جا س

متوسط التغير $= \frac{ق(\pi) - ق(\frac{\pi}{٢})}{\pi - \frac{\pi}{٢}}$

$= \frac{جتا\,\pi - أ\,جا\,\pi - \left[جتا\frac{\pi}{٢} - أ\,جا\frac{\pi}{٢}\right]}{\pi - \frac{\pi}{٢}}$

$= \frac{-١-(-أ)}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٤}{\pi} \Leftarrow (-١+أ)\,\pi = ٤ \times \frac{\pi}{٢}$

$\Leftarrow -١ + أ = ٢$

$\Leftarrow \boxed{أ = ٣}$ فرع (ج)

⑪

⑪ $\text{ع}^2(\text{ن}) = ٦ - \frac{\text{أ}}{\text{ف}(\text{ن})}$ اشتقه بالنسبة له

$٢\text{ع}\,\acute{\text{ع}} = -\left(\frac{-\text{أ} \times \acute{\text{ف}}}{\text{ف}^2(\text{ن})}\right)$

$٢\text{ع}\,\text{ح} = + \frac{\text{أ}\text{ع}}{\text{ف}^2} \Leftarrow ٢\text{ع}\,\text{ح} - \frac{\text{أ}\text{ع}}{\text{ف}^2} = ٠$

$\Leftarrow \text{ع}\left(٢\text{ح} - \frac{\text{أ}}{\text{ف}^2}\right) = ٠$

$\Leftarrow$ إما ع = ٠ أو $\boxed{٢\text{ح} - \frac{\text{أ}}{\text{ف}^2} = ٠}$

عندما تنعدم السرعة $\Leftarrow$ ع = صفر $\quad ٢\text{ح} = \frac{\text{أ}}{\text{ف}^2} \leftarrow$ ①

$٠ = ٦ - \frac{\text{أ}}{\text{ف}} \Leftarrow \frac{\text{أ}}{\text{ف}} = ٦ \Leftarrow \boxed{\text{ف} = \frac{\text{أ}}{٦}}$

عوض عن قيمة ف في معادلة ① عندما ح = ٩

$٢\text{ح} = \frac{\text{أ}}{\left(\frac{\text{أ}}{٦}\right)^2} = \frac{٣٦\text{أ}}{\text{أ}^2} \Leftarrow ٢ \times ٩ = \frac{٣٦\text{أ}}{\text{أ}^2}$

$\Leftarrow ١٨\text{أ}^2 = ٣٦\text{أ}$

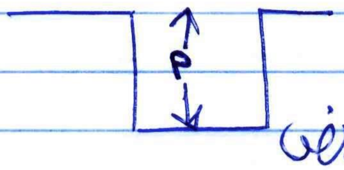
$\Leftarrow ١٨\text{أ}^2 - ٣٦\text{أ} = ٠$

$\Leftarrow ١٨\text{أ}(\text{أ} - ٢) = ٠$

إما ١٨أ = ٠ $\Leftarrow$ أ = صفر (مرفوضة)

أو أ − ٢ = ٠ $\Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٢}$ ✓ فرع (أ)

⑫ $ف(ن) = ٢٠ن - ٢ن^{٢} - م$



← بالنسبة للأرض

$ع = -٤$

$ع(ن) = ٢٠ - ٤ن = -٤ \Leftarrow ٤ن = ٢٤ \Leftarrow \boxed{ن = ٦}$

$ف = ٣٠$

$\Leftarrow ٢٠ن - ٢ن^{٢} - م = ٣٠$

$٢٠\times٦ - ٢\times٦^{٢} - م = ٣٠ \Leftarrow ١٢٠ - ٧٢ - م = ٣٠$

$\Leftarrow م = ٤٨ - ٣٠ = ١٨$ متر (ب)

⑬ ميل المستقيم من النقطتين $= \frac{٥ - ص(١)}{٣ - ١} = ظا ١٣٥ = -١$

$\Leftarrow \frac{٥ - ص(١)}{٢} = -١$

$\Leftarrow ٥ - ص(١) = -٢ \Leftarrow -ص(١) = -٧ \Leftarrow ص(١) = ٧$

متوسط تغير $هـ(س) = \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١} = \frac{\frac{٢}{ص(٣)} - \frac{٢}{ص(١)}}{٢}$ ← توحيد مقامات

$= \frac{\frac{٢ص(١) - ٢ص(٣)}{ص(٣)\,ص(١)}}{٢} = \frac{٢ص(١) - ٢ص(٣)}{٢ص(٣)\,ص(١)} = \frac{٢\times٧ - ٢\times٥}{٢\times٥\times٧}$

$= \frac{١٤ - ١٠}{٧٠} = \boxed{\frac{٤}{٧٠}}$

⑭ ص = أ جا س + ب جتا س

$\frac{دص}{دس}$ = أ جتا س − ب جا س

$\frac{دص}{دس}$ + ٢ص = ٥ جتا س

أ جتا س − ب جا س + ٢(أ جا س + ب جتا س) = ٥ جتا س

أ جتا س − ب جا س + ٢أ جا س + ٢ب جتا س = ٥ جتا س

جتا س (أ + ٢ب) + جا س (٢أ − ب) = ٥ جتا س

أ + ٢ب = ٥ ⟵ ①

٢أ − ب = صفر ⟵ ② ×٢

أ + ٢ب = ٥

٤أ − ٢ب = صفر

٥أ = ٥ ⇐ $\boxed{أ = ١}$

بالتعويض عن قيمة أ في معادلة ①

١ + ٢ب = ٥ ⇐ ٢ب = ٤ ⇐ $\boxed{ب = ٢}$

فرع (أ)

$$⑮ \quad \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{\left((ق \circ هـ)(س)\right)^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٩}$$

بالتعويض المباشر

$$\frac{\left((ق \circ هـ)(٣)\right)^{٢} - ٩}{٩ - ٩} = \frac{\left(ق(هـ(٣))\right)^{٢} - ٩}{٠}$$

$$= \frac{\left(ق(جتا \frac{\pi}{٣})\right)^{٢} - ٩}{٠}$$

$$= \frac{\left(ق(\frac{١}{٢})\right)^{٢} - ٩}{٠} = \frac{٩ - ٩}{٠} = \boxed{\frac{٠}{٠}}$$

نستخدم لوبيتال ونشتق بالنسبة لـ س

$$هـ(س) = جتا(\frac{\pi}{س}) \Leftarrow هـ(٣) = جتا \frac{\pi}{٣} = \boxed{\frac{١}{٢}}$$

$$هـَ(س) = -جا(\frac{\pi}{س}) \times \frac{-\pi}{س^{٢}} \Leftarrow هـَ(٣) = \boxed{\frac{\pi \sqrt{٣}}{١٨}}$$

$$= \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{٢(ق \circ هـ)(س) \times قَ(هـ(س)) \times هـَ(س)}{٢س}$$

$$= \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{٢(ق \circ هـ)(٣) \times قَ(هـ(٣)) \times هـَ(٣)}{٦}$$

$$= \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{٢ق(هـ(٣)) \times قَ(\frac{١}{٢}) \times \frac{\pi \sqrt{٣}}{١٨}}{٦}$$

$$= \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{٦ \times \frac{\sqrt{٣}}{\pi} \times \frac{\pi \sqrt{٣}}{١٨}}{٦} = \boxed{\frac{١}{٦}}$$

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي
اختبارات الوحدة الثانية دفعة 2022 مع الحلول

- اختبار نظريتا رول والقيمة المتوسطة.
- اختبار الاقترانات المتزايدة والمتناقصة.
- اختبار القيم القصوى.
- اختبار التقعر ونقط الانعطاف.
- اختبار الوحدة الثانية.

تمنياتي لكم بالتفوق والتميز

أ. هدى أسامة فرج

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار
نظريتا رول والقيمة المتوسطة

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس نظريتا رول والقيمة المتوسطة (دفعة 2004)

① إذا علمت أن الاقتران ق(س) = $\frac{(س^{٢} - ٥س + ٦)(س + هـ)}{(س - ٣)}$

، س ≠ ٣ يحقق شروط نظرية رول في الفترة المغلقة [أ، ب]

وكانت القيمة التي تحددها النظرية هي جـ = ٠ . فما قيمة الثابت هـ ؟!

Ⓐ ١   Ⓑ -١   Ⓒ ٢   Ⓓ -٢

(أ) ١   (ب) -١   (جـ) ٢   (د) -٢

② قيمة جـ التي تحددها نظرية رول على الاقتران ق(س) = جاس + جتاس

في الفترة [٠، $\frac{\pi}{٢}$] هي :

(أ) صفر   (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$

③ إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ + ٤س يحقق شروط القيمة المتوسطة

في [١، ب] وكانت قيمة جـ التي تحددها النظرية تساوي $\frac{٥}{٢}$ فما

قيمة ب ؟

(أ) ٤   (ب) ٥   (جـ) ٦   (د) ٩

٤) إذا كان ق(س) يحقق شروط نظرية رول على [أ، ب] فإن العبارة الصحيحة دائماً :-

أ) ق(أ) × ق(ب) < ٠

ب) يوجد على الأقل جـ ∈]أ، ب[بحيث ق(جـ) = ٠

جـ) يوجد على الأقل جـ ∈]أ، ب[بحيث يكون المماس عندها أفقياً.

د) ق(س) يحقق شروط رول على أي فترة جزئية من [أ، ب]

٥) مجموعة جميع قيم جـ التي يمكن الحصول عليها من تطبيق رول على الاقتران ق(س) = −٥ في الفترة [١، ٦] هي :-

أ) ∅ ب) {−٥} جـ)]١، ٦[د) [١، ٦]

٦) الثوابت أ، ب، جـ التي تجعل الاقتران

ق(س) = { |س² − س − ٦| ، ٠ ≤ س < ١
أس + ب ، ١ ≤ س < ٢
جـ ، س = ٢

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [٠، ٢]

أ) أ = −١، ب = ٧، جـ = ٥ ب) أ = ١، ب = ٢، جـ = ٥

جـ) أ = −١، ب = ٢، جـ = ٣ د) أ = −١، ب = −٧، جـ = ٢

⑦ إذا كان د(س) = $س^{٢}$ - ٣س - أ تحقق شروط نظرية رول

على الفترة [-١ ، أ] فإن قيمة الثابت أ تساوي

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

حلول أسئلة اختبار نظريتا رول والقيمة المتوسطة (دفعة 2004)

① $$\text{د(س)} = \frac{(\text{س}^2 - ٥\text{س} + ٦)(\text{س} + \text{ل})}{(\text{س} - ٣)}$$

$$= \frac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} - ٢)(\text{س} + \text{ل})}{\cancel{(\text{س} - ٣)}}$$

⇐ د(س) = (س − ٢)(س + ل) = س^2 + ل س − ٢س − ٢ل

∴ د(س) = س^2 + (ل − ٢) س − ٢ل

د̄(س) = ٢س + (ل − ٢)

د(س) يحقق رول ⇐ توجد جـ ∈]أ، ب[بحيث د̄(جـ) = ٠

⇐ ٢جـ + (ل − ٢) = ٠ ⇐ ٢جـ = − ل + ٢ (لكن جـ = ٠)

⇐ ٠ = − ل + ٢ ⇐ $\boxed{\text{ل} = ٢}$ فرع (جـ)

② د(س) = جاس + جتاس

∵ ① د(س) متصل على [٠، $\frac{\pi}{2}$] مجموع اقترانيه متصليه

② د(س) قابل للاشتقاق على]٠، $\frac{\pi}{2}$[مجموع اقترانيه قابليه للاشتقاق

حيث د̄(س) = جتاس − جاس

③ د(٠) = جا٠ + جتا٠ = ٠ ، د($\frac{\pi}{2}$) = جا$\frac{\pi}{2}$ + جتا$\frac{\pi}{2}$ = ٠

*تابع س٢/

③ ق(١) = ق$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

من ① ، ② ، ③ تتحقق شروط نظرية رول وينتج أنه

هناك جـ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[حيث قَ(جـ) = ٠

⇐ جتاجـ − جاجـ = ٠ ⇐ جتاجـ = جاجـ (في الربع ① ، ③)

في الربع الأول $\boxed{\text{جـ} = \frac{\pi}{٤}}$ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

في الربع الثالث جـ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥° ∉]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

∴ $\boxed{\text{جـ} = \frac{\pi}{٤}}$ فرع ⓓ

③ ق(س) = س² + ٤س

∵ ق(س) يحقق شروط القيمة المتوسطة ⇐ توجد جـ ∈]١ ، ب[

بحيث قَ(جـ) = $\frac{\text{ق(ب)} - \text{ق(١)}}{\text{ب} - ١}$

⇐ ٢جـ + ٤ = $\frac{\text{ب}^٢ + ٤\text{ب} - (٥)}{\text{ب} - ١}$

⇐ ٢$\left(\frac{٥}{\cancel{٢}}\right)$ + ٤ = $\frac{\text{ب}^٢ + ٤\text{ب} - ٥}{\text{ب} - ١}$ ⇐ ٩ = $\frac{(\text{ب} + ٥)\cancel{(\text{ب} - ١)}}{\cancel{(\text{ب} - ١)}}$

⇐ $\boxed{\text{ب} = ٤}$ فرع (أ)

④ فرع ج

⑤ فرع ج]١ ، ٦[مباشرة.

توضيح الحل /

① ق(س) = -٥ متصل على [١ ، ٦] لأنه اقتران ثابت

② وقابل للاشتقاق على]١ ، ٦[لأنه اقتران ثابت

③ ق(١) = -٥ ، ق(٦) = -٥ ⇐ ق(١) = ق(٦)

من ① ، ② ، ③ تتحقق شروط نظرية رول وينتج وجود

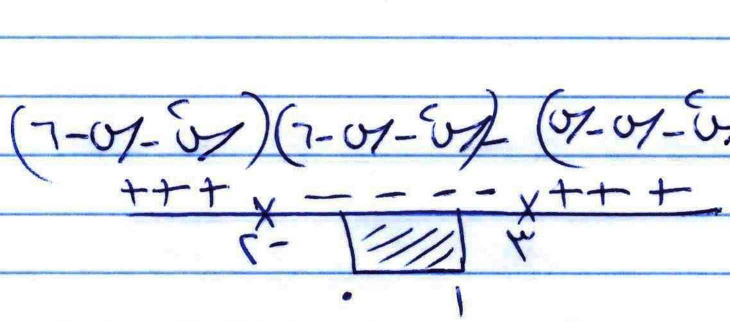
جـ ∈]١ ، ٦[بحيث قَ(جـ) = ٠

⇐ ٠ = ٠ صحيحة ∀ س ∈ ع ⇐ صحيحة ∀ س ∈]١ ، ٦[

∴ قيم جـ التي يمكن الحصول عليها من تطبيق رول هي]١ ، ٦[

فرع ج

⑦ ا $س^٢ - س - ٦$



$س^٢ - س - ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٢) = ٠$

س = ٣ ، س = -٢

$$⇐ ق(س) = \begin{cases} -س^٢ + س + ٦ ، & ٠ \le س < ١ \\ أس + ب ، & ١ \le س < ٢ \\ جـ ، & س = ٢ \end{cases}$$

ب ـ ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [٠، ٢]

⇐ ق(س) متصل في [٠، ٢]

⇐ ق(س) متصل عند س = ١ ، عند س = ٢

⇐ $\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نها}}$ -س² + س + ٦ = $\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نها}}$ أ س + ب

⇐ -١ + ١ + ٦ = أ + ب ⇐ $\boxed{\text{أ + ب = ٦}}$ ← (١)

ق(س) متصل عند س = ٢

⇐ $\underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{نها}}$ أ س + ب = ق(٢)

٢أ + ب = جـ ⇐ $\boxed{\text{٢أ + ب - جـ = ٠}}$ ← (٢)

ق'(س) = { -٢س + ١ ، ٠ < س < ١
أ ، ١ < س < ٢

ق(س) قابل للاشتقاق في]٠، ٢[⇐ ق'(١) موجودة

⇐ ق'(١)$^+$ = ق'(١)$^-$ ⇐ أ = -٢ + ١ ⇐ $\boxed{\text{أ = -١}}$

بالتعويض في (١) ⇐ ب = ٦ + ١ ⇐ $\boxed{\text{ب = ٧}}$

بالتعويض في (٢) ⇐ -٢ + ٧ - جـ = ٠ ⇐ $\boxed{\text{جـ = ٥}}$

∴ أ = -١ ، ب = ٧ ، جـ = ٥ $\boxed{\text{فرع أ}}$

⑦ $ق(س) = س^{٢} - ٣س - م$

بـ $ق(س)$ يحقق شروط نظرية رول ⟸ $ق(-١) = ق(م)$

⟸ $١ + ٣ - م = م^{٢} - ٣م - م$

⟸ $٤ - م = م^{٢} - ٣م - م$ ⟸ $-م^{٢} + ٣م + ٤ = ٠$

⟸ $م^{٢} - ٣م - ٤ = ٠$

⟸ $(م - ٤)(م + ١) = ٠$

⟸ $\boxed{م = ٤}$ ، $م = -١$ × مرفوضة لأنه لفترة ص $[-١ ، م]$

↓

فرع ⓓ

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار

الاقترانات المتزايدة والمتناقصة

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس الاقترانات المتزايدة والمتناقصة دفعة 2004

① إذا كان قَ(س) = $(س - ١)^{٣} (س - ٢)^{٤}$ فإن الفترة التي يكون فيها قَ(س) متناقصاً

أ) [-∞ ، -١] ب) [-١ ، ١] ج) [١ ، ٢] د) [٢ ، ∞[

② إذا كان ق(س) معرف على الفترة [٠ ، ٣] وقابلاً للاشتقاق قَ(س) = $\frac{س - ٢}{س + ١}$ فإن عدد النقاط الحرجة للاقتران ق(س) هو

أ) ٢ ب) ٥ ج) ٣ د) ٤

③ إذا كان ق(س) كثير حدود معرف على [٢ ، ٦] ويقع منحناه في الربع الأول ومتناقصاً على مجاله ، الاقتران هـ(س) = ٨ - س فإن ل(س) = (ق × هـ)(س)

أ) متزايداً على الفترة [٢ ، ٦] ب) متناقصاً على الفترة [٢ ، ٦]

ج) ثابت على الفترة [٢ ، ٦] د) متزايد على ح

④ إذا كان ق(س) = { س² - س ، ٠ ≤ س ≤ ١
                    س - ١ ، ١ < س ≤ ٣

فما مجموعة قيم س التي يكون عندها للاقتران نقطة حرجة في الفترة [٠، ٣]

أ {٠، ١، ٣}   ب {٠، ٣}   ج {½، ٣}   د {٠، ½، ٣}

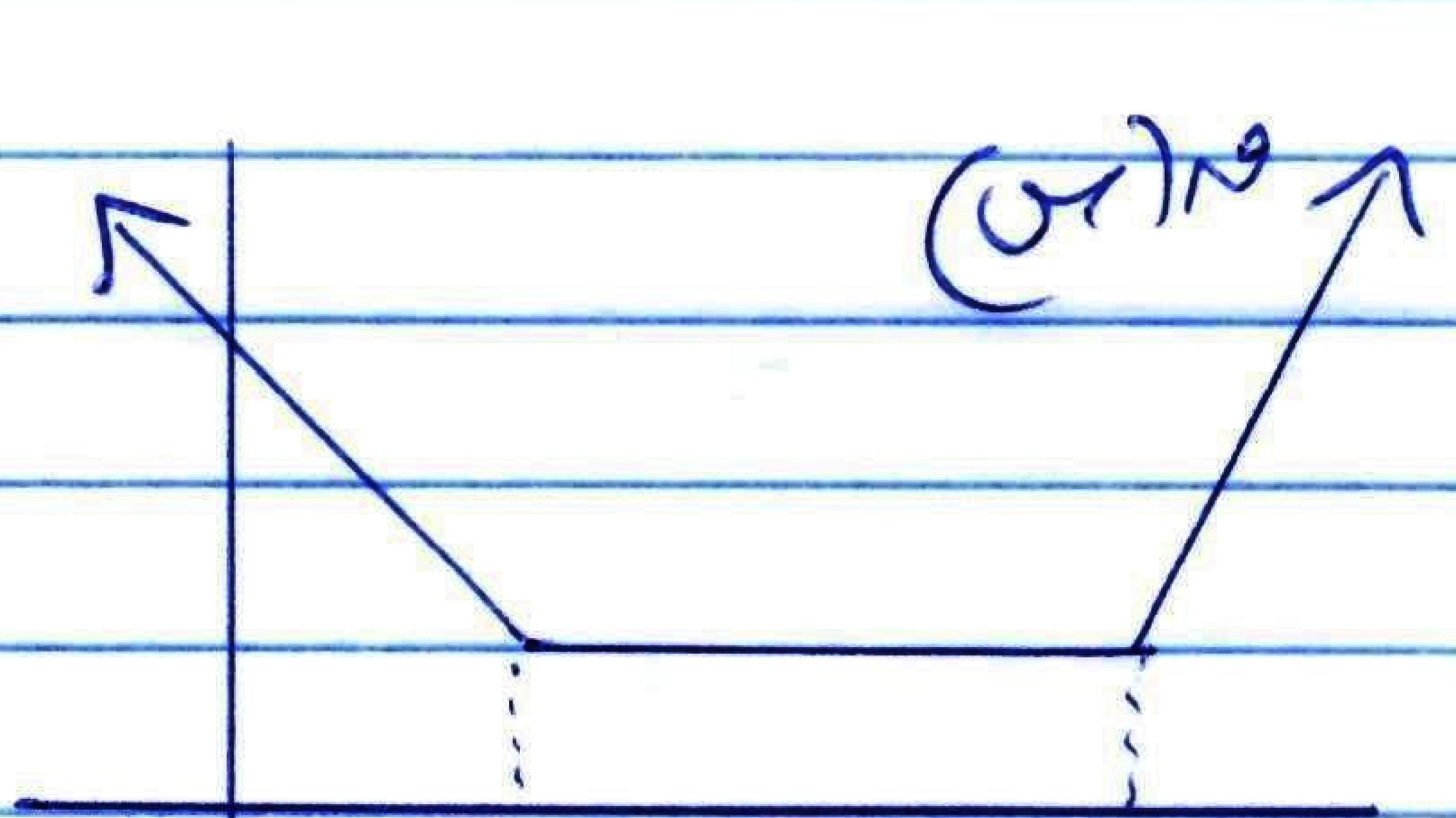
⑤ إذا كان ق(س) = ١/س² ، س ∈ [٢، ٥[فإن قيم س الحرجة هي :

أ {٠}   ب {٢، ٥}   ج [٢، ٥[د [٢، ٥]

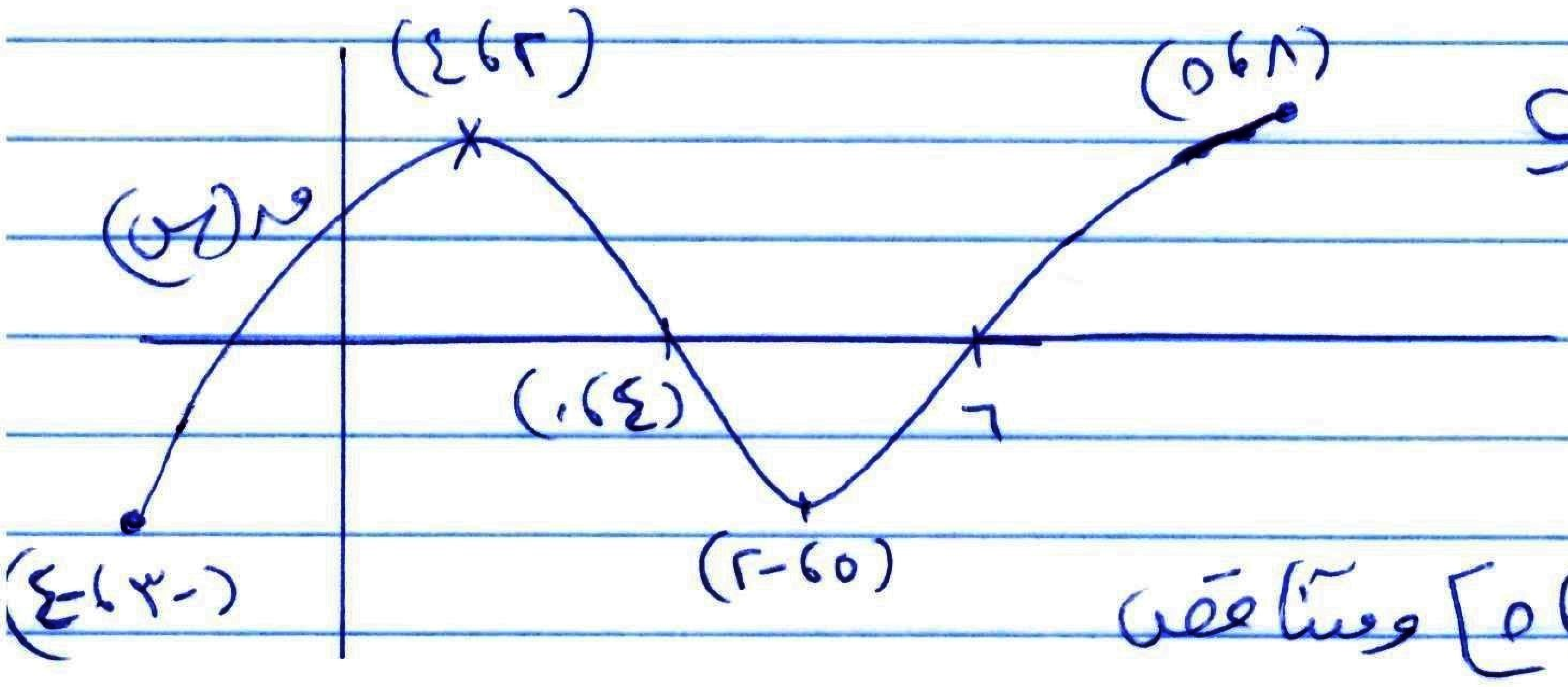
⑥ إذا كان ق(س) = √جا²س ، س ∈ [٠، ٢π] فإن عدد النقاط الحرجة لـ ق(س) هو

أ ٢   ب ٥   ج ٦   د ٣

⑦ الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) ، يكون ق(س) في الفترة]-∞، ٢]



أ متزايد   ب متناقص   ج ثابتة   د ليس مما سبق



٨) من الرسم المجاور والذي يمثل منحنى د(س)

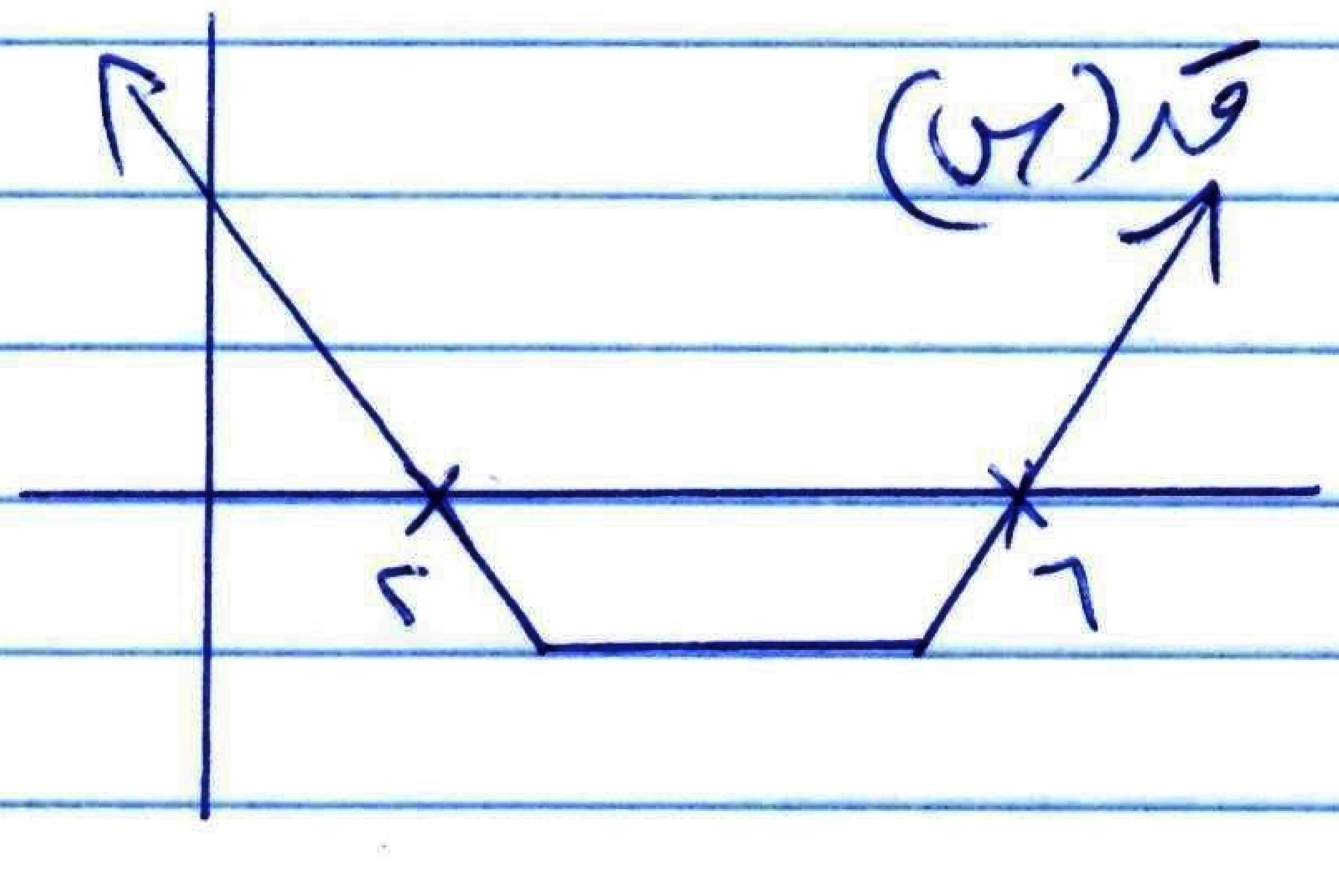
أ) د(س) متزايد في [٣، ٥] ومتناقص في [-٣، ٣]

ب) د(س) متزايد في [-٣، ٣] ∪ [٥، ٨] ومتناقص في [٣، ٥]

ج) د(س) متزايد في [٥، ٨] ومتناقص في [-٣، ٣]

د) متزايد في [٣، ٥] ومتناقص في [-٣، ٣] ∪ [٥، ٨]

٩) يمثل الشكل المجاور منحنى د̄(س)، الفترة التي يكون فيها د(س) متناقص هي



أ)]-∞، ٢[ب)]٦، ∞[

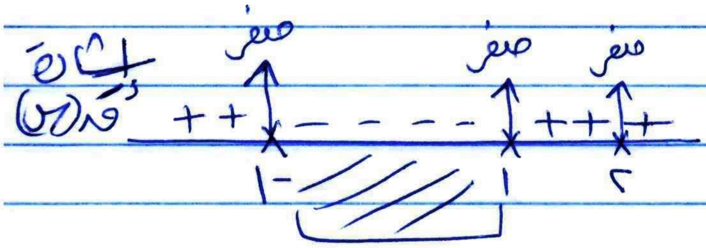
ج) [٢، ٦] د)]٢، ∞[

١٠) د(س) = س - |س - ٣| حيث س ∈ [-٢، ٦] فإن د(س) متزايد في الفترة

أ) [-٢، ٣] ب) [٣، ٦] ج) [-٢، ٦] د)]-٢، ٣[

حلول أسئلة اختبار درس
(الاقترانات المتزايدة والمتناقصة)
دفعة 2004

① ق'(س) = (س^٤ - ١)^٣ (س - ٢)^٤



ق'(س) = ٠

(س^٤ - ١)^٣ (س - ٢)^٤ = ٠

⟸ إما (س^٤ - ١)^٣ = ٠ ⟸ س^٤ - ١ = ٠ ⟸ س = ±١

أو (س - ٢)^٤ = ٠ ⟸ س - ٢ = ٠ ⟸ س = ٢

ق(س) متناقص على الفترة [-١، ١] فرع (ب)

② ق'(س) = $\frac{س - ٢}{س + ١}$

ق'(س) = ٠ عندما س - ٢ = ٠ ⟸ س = ٢ ∈ [٠، ٣]

ق'(س) غ.م عندما س + ١ = ٠ ⟸ س = -١ ∉ [٠، ٣]

ق'(س) غ.م عند أطراف الفترة س = ٠، ٣

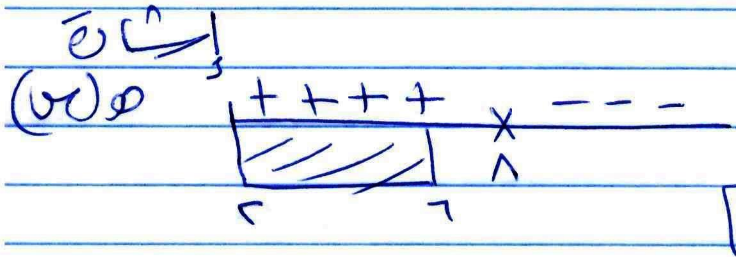
∴ عدد النقاط الحرجة ③ فرع (ج)

③ ق(س) يقع في الربع الأول ⟸ ق(س) > ٠

ق(س) متناقص في [٢، ٦] ⟸ قَ(س) < ٠

هـ(س) = ٨ - س

٨ - س = ٠ ⟸ س = ٨



هـ(س) > ٠ في الفترة [٢، ٦]

هـَ(س) = -١ < ٠ في الفترة [٢، ٦]

ل(س) = (ق × هـ)(س)

لَ(س) = ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س)

= + × - ⊕ + × -

= ⊖ ⊕ ⊖ = ⊖

لَ(س) < ٠ ∀ س ∈]٢، ٦[⟸ ل(س) متناقص في الفترة [٢، ٦]

فرع (ب)

④ ق(س) = { $س^2$ - س ، ٠ < س ≤ ١
س - ١ ، ١ < س ≤ ٣

قَ(س) = { ٢س - ١ ، ٠ < س < ١
١ ، ١ < س < ٣
غ.م ، س = ③ ← طرف فترة

قَ(١)⁺ = ١ ، قَ(١)⁻ = ١ ⟸ قَ(١) = ١

قَ(½) = ٢ × ½ - ١ = صفر

∴ مجموعة قيم س التي يكون عندها للاقتران نقطة حرجة في الفترة

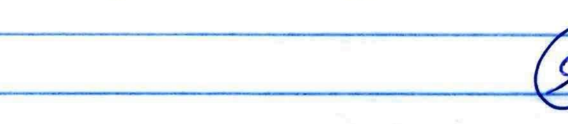
]٠، ٣] هي {½ ، ٣} فرع ج

⑤ ق(س) = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

قَ(س) = صفر ∀ س ∈]٢، ٥[

∴ قيم س الحرجة هي]٢، ٥[فرع ج

⑥ ق(س) = $\sqrt{جا^2 س}$ ، س ∈ [٠، ٢π]



ق(س) = |جا س|

جا س = ٠ ⟸ س = π

ق(س) = { جا س ، ٠ ≤ س ≤ π
-جا س ، π < س ≤ ٢π

ق(س) = { جتا س ، $٠ < س < \pi$
-جتا س ، $\pi < س < ٢\pi$
غ.م ، س = π ، (٠ ، ٢π) ← أطراف فترة

ق(π)$^+$ ≠ ق(π)$^-$

✓ جتا س = ٠ ⟸ س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ∉]٠ ، π[
∈]٠ ، π[

✓ -جتا س = ٠ ⟸ س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ∈]π ، ٢π[
∉]π ، ٢π[

⟸ عدد النقاط الحرجة هو ⑤ نقاط فرع (ب)

⑦ من الرسم ق(س) يصنع زاوية منفرجة مع محور السينات الموجب

ظلها سالب ⟸ ق(س) متناقص في]-∞ ، ٢]
في الفترة]-∞ ، ٢]

⑧ عند رسم مماسات في الفترة [-٣ ، ٢] والفترة [٥ ، ٨] نلاحظ أنه المماسات تصنع زاوية حادة مع محور السينات الموجب

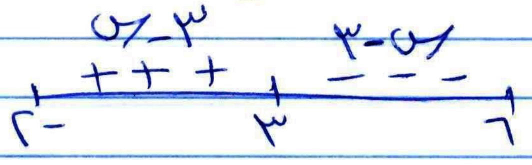
⟸ ق(س) متزايد في الفترة [-٣ ، ٢] و [٥ ، ٨]

بينما في الفترة [٢ ، ٥] نلاحظ أنه المماسات تصنع زاوية منفرجة مع محور السينات الموجب ⟸ ق(س) متناقص في [٢ ، ٥]

⑨ قَ(س) < ٠ عندما يقع تحتاه أفضل محمد السناج

~~⇐~~ ق(س) متناقص أو قَ(س) < ٠ ∈ الفترة [٢، ٦] موع ⑨

⑩ ق(س) = س - |س - ٣| ، س ∈ [-٢، ٦]



|س - ٣|

٣ - س = ٠ ⇐ س = ٣

ق(س) = { ٢س - ٣ ، -٢ ≤ س ≤ ٣
٣ ، ٣ ≤ س ≤ ٦

ق(س) متصل عند س = ٣ (تحقق من ذلك)

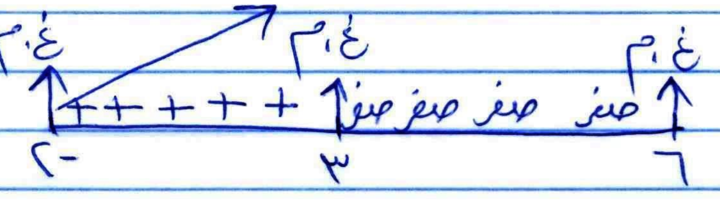
قَ(س) = { ٢ ، -٢ < س < ٣
٠ ، ٣ < س < ٦
غ.م ، س = -٢، ٦، ③

قَ(٣)+ ≠ قَ(٣)-

أطراف فترة

قيم س الحرجة هي {-٢، ٦، ٣} ∪ [٣، ٦]

إشارة قَ(س)



ق(س) متزايد ∈ [-٢، ٣] موع ⑨

رياضيات الثاني عشر علمي دفعة 2022

حلول أسئلة اختبار درس القيم القصوى

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس القيم القصوى

دفعة 2004

① إذا كان $ق(س) = \sqrt{جاس}$ ، $س \in [٠ ، \pi]$ فإن قيم $س$ التي توجد عندها قيمة صغرى مطلقة هي :

ⓐ $س = ٠$ ⓑ $س = \pi$ ⓙ $س = \frac{\pi}{٢}$ ⓓ أ+ب

② إذا كان $ق(س) = س^{٢} |س - ٢|$ ، $س \in ح$ فإن القيمة العظمى المحلية للاقتران تساوي

ⓐ صفر ⓑ -١ ⓙ $\frac{٣٢}{٢٧}$ ⓓ $\frac{-٣٢}{٢٧}$

③ إذا كان $ص^{٣} = س^{٤}$ ، $س \in [-١ ، ٢]$ فإن القيمة الصغرى المطلقة لـ ص هي ؟

ⓐ ١ ⓑ صفر ⓙ -١ ⓓ $\sqrt[٣]{١٦}$

④ أكبر قيمة للاقتران $ق(س) = س\sqrt{٤ - س^{٢}}$ هي ؟

ⓐ ٢ ⓑ -٢ ⓙ صفر ⓓ ١

⑤ إذا كان ق(س) = س^{2} - ٢لو$_{هـ}$س ، س ∈]٠ ، ٥] فإن القيمة الصغرى المحلية للاقتران ق(س) هي ؟

أ) صفر ب) ١ جـ) هـ د) ٥

⑥ إذا كان ق(س) = ٢س^{3} - ٩أس^{2} + ١٢أ^{2}س + ١ بحيث كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س = م ، قيمة صغرى عند س = ن بحيث م^{2} = ن فإن قيمة الثابتة أ = (أ > ٠)

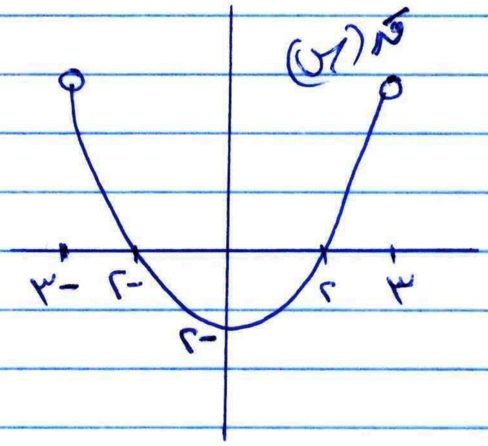
أ) أ = ٢ ب) $\frac{1}{2}$ جـ) ١ د) ٤

⑦ ما أصغر قيمة للاقتران ق(س) = $\sqrt[3]{٣س-١}$ حيث س ∈ [٠ ، ٣] هي ؟

أ) -١ ب) ٢ جـ) ٨ د) $\frac{1}{6}$

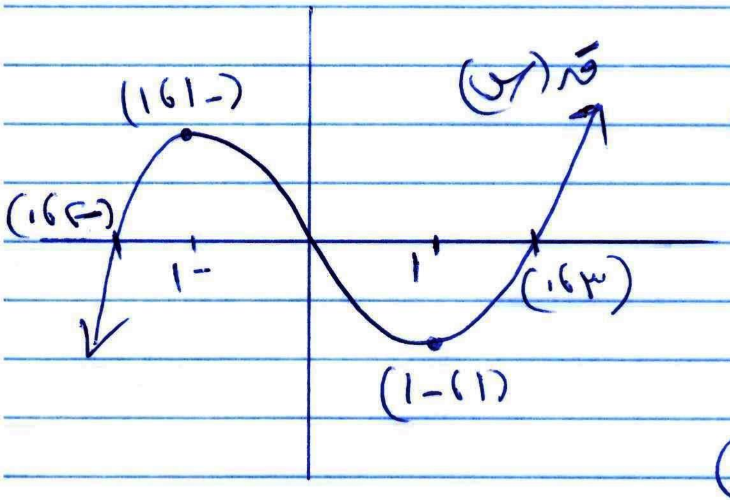
⑧ إذا كان ق(س) = |(س-١)^{3}| حيث س ∈ [-١ ، ٣] فإن القيمة العظمى المطلقة للاقتران ق(س) هي ؟

أ) ٨ ب) -١ جـ) ٣ د) ١



⑨ في الشكل المجاور والذي يمثل منحنى قَ(س) حيث د(س) معرف على الفترة [-٣، ٣] من الرسم د(-٢)

أ) قيمة صغرى محلية
ب) قيمة عظمى محلية
ج) صغرى وعظمى معاً
د) ليس لها وجود



⑩ في الشكل المجاور منحنى قَ(س) حيث د(س) معرف على ح أي العبارات التالية خاطئة؟

أ) (-١، ١) قيمة عظمى محلية لـ قَ(س)
ب) (١، -١) نقطة قيمة صغرى محلية لـ قَ(س)
ج) (٠، د(٠)) نقطة عظمى محلية لـ د(س)
د) (١، -١) نقطة قيمة صغرى محلية لـ د(س)

حلول أسئلة اختبار درس
القيم القصوى

① ق(س) = $\sqrt{جاس}$ ، س ∈ [٠ ، π]

ق'(س) = $\frac{جتاس}{٢\sqrt{جاس}}$

✓ ق'(س) = ٠ عندما جتاس = ٠ ⟸ س = $\frac{\pi}{٢}$ ∈]٠ ، π[

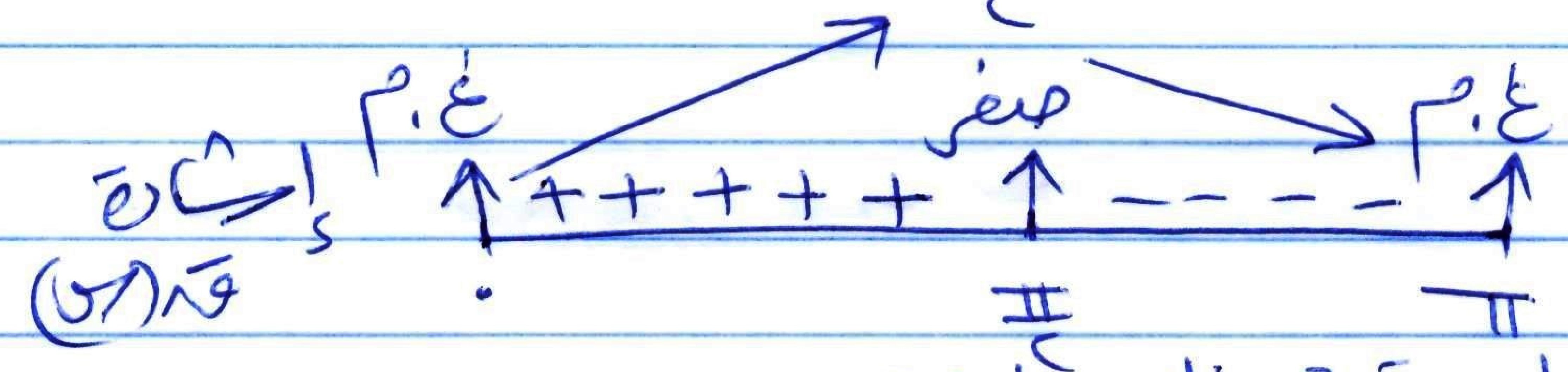
س = $\frac{٣\pi}{٢}$ ∉]٠ ، π[

✓ ق'(س) غ.م عندما ٢$\sqrt{جاس}$ = ٠

⟸ جاس = ٠ ⟸ س = ٠ ، ٢π ∈]٠ ، π[

كذلك ق(س) غ.م عند أطراف الفترة س = ٠ ، π

∴ قيم س الحرجة هي {٠ ، π ، $\frac{\pi}{٢}$}



ق($\frac{\pi}{٢}$) = $\sqrt{جا\frac{\pi}{٢}}$ = ١ قيمة عظمى مطلقة

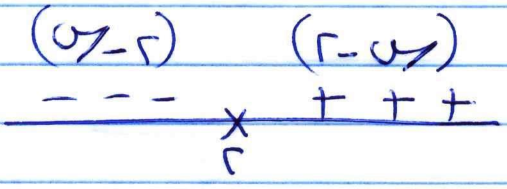
ق(٠) = ٠ } قيمة صغرى مطلقة.
ق(π) = ٠

⟸ قيم س التي توجد عندها قيمة صغرى مطلقة هي ٠ ، π

فرع (د)

② ق(س) = $س^٢$ |س - ٢| ، س ∈ ح

|س - ٢|



س = ٢

ق(س) = { $٢س^٢ - س^٣$ ، س < ٢
$س^٣ - ٢س^٢$ ، س ≥ ٢

ق(س) متصل عند س = ٢ (تحقق من ذلك)

ق'(س) = { $٤س - ٣س^٢$ ، س < ٢
$٣س^٢ - ٤س$ ، س > ٢
غ.م ، س = ٢ ⟵ $ق'(٢)^+ \neq ق'(٢)^-$

∵ ق'(س) = ٠ عندما

$٤س - ٣س^٢ = ٠$ ⟸ س(٤ - ٣س) = ٠ ⟸ س = ٠ ، س = $\frac{٤}{٣}$

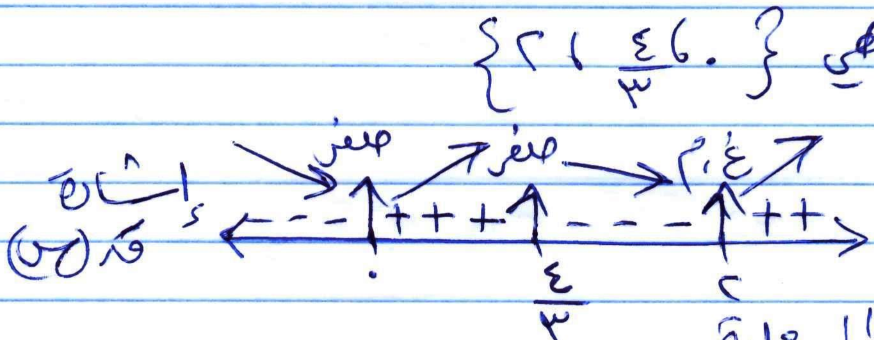
∈ ∈]-∞، ٢[

كذلك

$٣س^٢ - ٤س = ٠$ ⟸ س = ⓪ ، $\frac{٤}{٣}$ ⟵ ∉ ∉

للفترة]٢، ∞[

∴ قيم س الحرجة هي { ٠ ، $\frac{٤}{٣}$ ، ٢ }



ق($\frac{٤}{٣}$) = $\frac{٣٢}{٢٧}$ عظمى محلية

فرع ⓙ

ق(١) = ق(٢) = ٠ ⟵ صغرى محلية

⑤

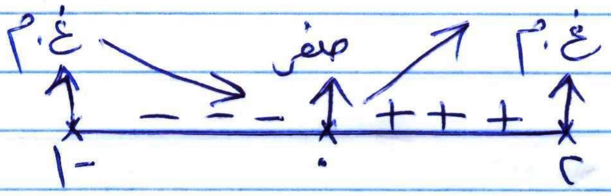
③ $ص^{٣} = س^{٤}$ ، $س \in [-١ ، ٢]$

$ص = \sqrt[٣]{س^{٤}} = س^{\frac{٤}{٣}}$

$صَ = \frac{٤}{٣} س^{\frac{١}{٣}} \Leftarrow صَ = ٠$ عندما $\frac{٤}{٣} س^{\frac{١}{٣}} = ٠$

$\Leftarrow س = ٠ \in]-١ ، ٢[$

ص غ.م عندما س = -١ ، ٢ ← أطراف فترة

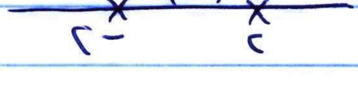


$ص(-١) = ١$

$ص(٠) = ٠$ ← صغرى مطلقة   فرع (ب)

$ص(٢) = \sqrt[٣]{١٦}$ ← عظمى مطلقة

④ $ق(س) = س \sqrt{٤ - س^{٢}}$



$\sqrt{٤ - س^{٢}} \Leftarrow ٤ - س^{٢} = ٠ \Leftarrow س = \pm ٢$

مجال ق(س) هو $[-٢ ، ٢]$

ق(س) متصل على $[-٢ ، ٢]$

$$قَ(س) = \frac{س \times -\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{٤ - س^{٢}}} + \sqrt{٤ - س^{٢}} \times ١$$

$$قَ(س) = \frac{-س^{٢}}{\sqrt{٤ - س^{٢}}} + \sqrt{٤ - س^{٢}}$$

✓ ق‵(س) = ٠ ، عندما $\frac{\cancel{-}س^٢}{\sqrt{٤-س^٢}} = \cancel{-}\sqrt{٤-س^٢}$

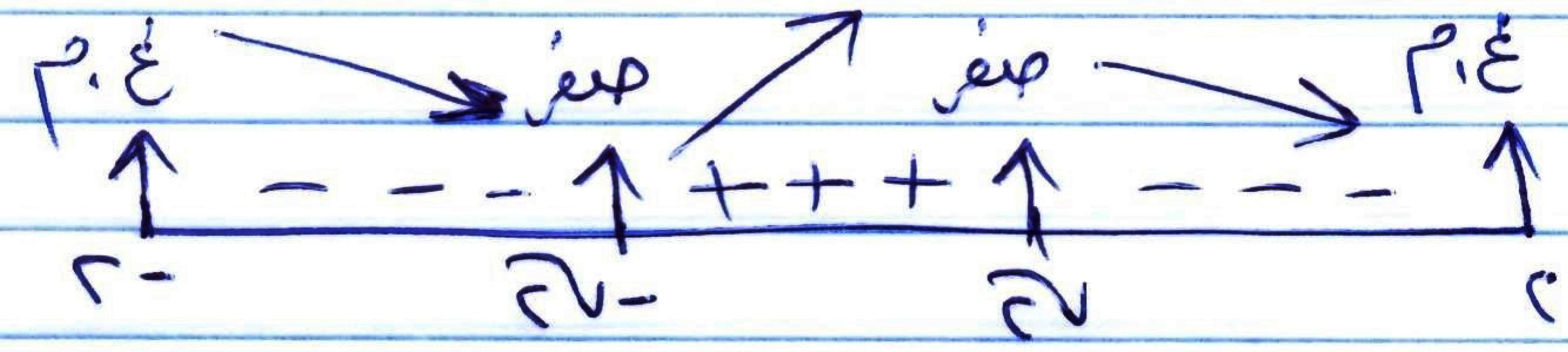
⟸ س^٢ = ٤ − س^٢ ⟸ ٢س^٢ = ٤ ⟸ س = ± $\sqrt{٢}$

∈ [−٢، ٢]

✓ ق(س) غ.م عندما س = −٢، ٢ أطراف فترة

قيم س الحرجة هي {٢، −٢، $\sqrt{٢}$ ، −$\sqrt{٢}$}

إشارة ق‵(س)



ق(−٢) = ٠ ، ق(−$\sqrt{٢}$) = −٢ ⟵ صغرى مطلقة
ق(٢) = ٠ ، ق($\sqrt{٢}$) = ٢ ⟵ عظمى مطلقة

⟸ أكبر قيمة للاقتران هي ② فرع (أ)

⑤ ق(س) = س^٢ − ٢لوهـ س ، س ∈ [٠، ٥[

ق(س) متصل على مجاله

ق‵(س) = ٢س − $\frac{٢}{س}$ = $\frac{٢س^٢-٢}{س}$

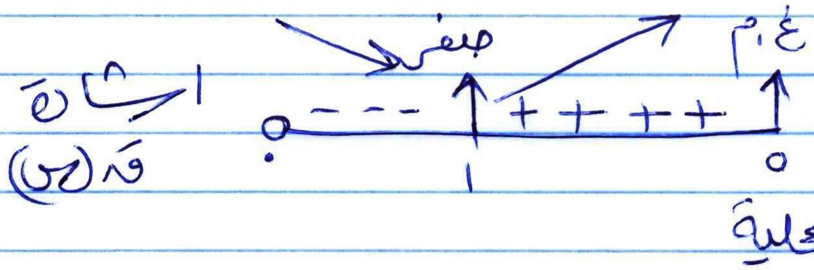
✓ ق‵(س) = ٠ ، عندما ٢س^٢ − ٢ = ٠ ⟸ س = ± ١

س = −١ ∉ [٠، ٥]
س = ١ ∈ [٠، ٥]

قَ(س) غ.م عندما س = ٠ ∉ [٠، ٥]

كذلك قَ(س) غ.م عندما س = ٥ طرف فترة

∴ قيم س الحرجة هي {٥، ١}



ق(١) = ١ ⟵ صغرى محلية

ق(٥) = ٢٥ - لوهـ ٥ ⟵ عظمى محلية فرع (ب)

⑥ $ق(س) = ٢س^{٣} - ٩أس^{٢} + ١٢أ^{٢}س + ١$

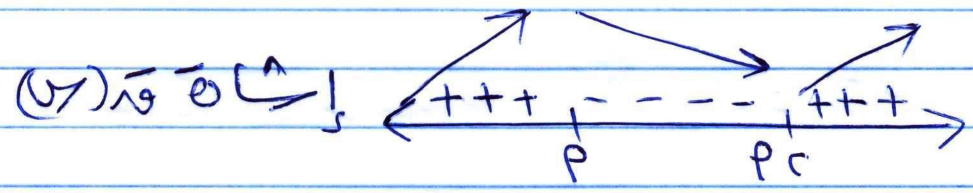
$قَ(س) = ٦س^{٢} - ١٨أس + ١٢أ^{٢}$

$قَ(س) = ٠ \Leftarrow ٦س^{٢} - ١٨أس + ١٢أ^{٢} = ٠$ (÷٦)

$\Leftarrow س^{٢} - ٣أس + ٢أ^{٢} = ٠$

$\Leftarrow (س - أ)(س - ٢أ) = ٠$

$\Leftarrow$ س = أ ، س = ٢أ لكن أ > ٠ $\Leftarrow$ ٢أ > ٠



∴ يوجد عند س = أ قيمة عظمى محلية ⟸ أ = م ⟵ (*)

∴ يوجد عند س = ٢أ قيمة صغرى محلية ⟸ ٢أ = ن ⟵ (**)

∵ م^{٢} = ن عوض من (*) و (**)

أ^{٢} = ٢أ ⟸ أ^{٢} − ٢أ = ٠ ⟸ أ(أ − ٢) = ٠

⟸ أ = ٠ مرفوضة لأنه أ > ٠ ، $\boxed{أ = ٢}$ ✓

فرع أ

(٧) ق(س) = $\sqrt[٣]{٣س - ١}$ ، س ∈ [٠ ، ٣]

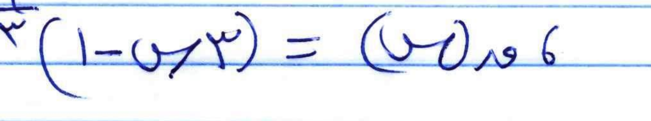
ق(س) متصل على ح ، ق(س) = (٣س − ١)$^{\frac{١}{٣}}$

ق'(س) = $\frac{١}{\cancel{٣}}$ (٣س − ١)$^{\frac{-٢}{٣}}$ × $\cancel{٣}$ = $\frac{١}{\sqrt[٣]{(٣س - ١)^{٢}}}$

∴ ق'(س) = ٠ عندما ١ = ٠ (مستحيل).

∴ ق'(س) غ.م ⟸ ٣س − ١ = ٠ ⟸ س = $\frac{١}{٣}$ ∈]٠ ، ٣[

ق'(س) غ.م عندما س = ٠ ، ٣ ⟵ أطراف فترة



ق(٠) = $\sqrt[٣]{-١}$ = (−١) ⟵ صغرى مطلقة (أصغر قيمة للاقتران)

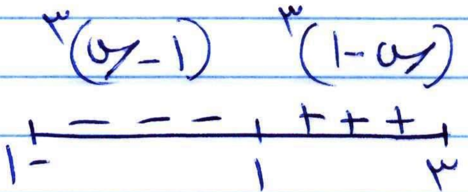
ق(٣) = $\sqrt[٣]{٨}$ = ٢ ⟵ عظمى مطلقة

فرع (أ)

⑧ ق(س) = $|(س-1)^{3}|$ ، س ∈ [-1، 3]

$|(س-1)^{3}|$

$(س-1)^{3}$ = . ⟸ س = 1



ق(س) = { $(1-س)^{3}$ ، -1 ≤ س ≤ 1
$(س-1)^{3}$ ، 1 ≤ س ≤ 3

ق(س) متصل عند س = 1 (تحقق من ذلك)

قَ(س) = { $3(1-س)^{2}$ × -1 ، -1 < س ≤ 1
$3(س-1)^{2}$ × 1 ، 1 ≤ س < 3

قَ$(1)^{+}$ = ق$(1)^{-}$ ⟸ قَ(1) موجودة

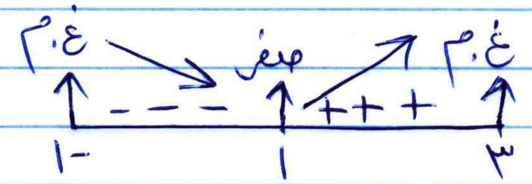
ـ قَ(س) غ.م عند س = -1، 3 ⟵ أطراف فترة

ـ قَ(س) = . عندما

$3(1-س)^{2}$ × -1 = . ⟸ س = 1 ∈]-1، 1]

$3(س-1)^{2}$ = . ⟸ س = 1 ∈ [1، 3[

قيم س الحرجة هي {-1، 3، 1}

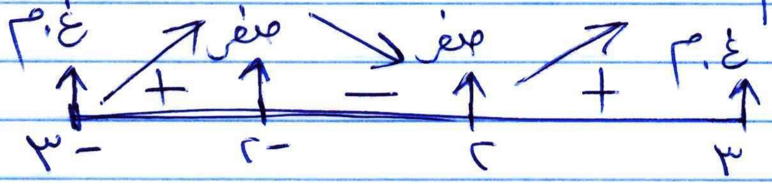


ق(1) = صفر ⟵ صغرى مطلقة

ق(-1) = ق(3) = 8 ⟵ عظمى مطلقة

فرع (أ)

⑨ من الرسم

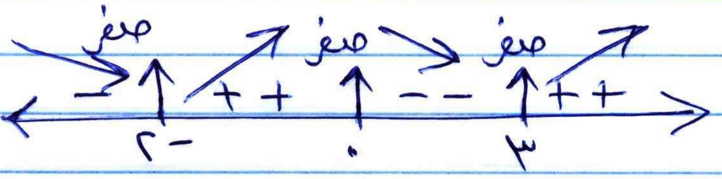


ق(-٢) قيمة عظمى محلية فرع (ب)

⑩ من الرسم

(-١،١) قيمة عظمى محلية لـ قَ(س) ✓

(١،-١) قيمة صغرى محلية لـ قَ(س) ✓



(٠،١) نقطة قيمة عظمى محلية لـ ق(س) ✓

(١،-١) قيمة صغرى محلية لـ ق(س) X فرع (د)

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار التقعر ونقط الانعطاف

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار درس التقعر ونقط الانعطاف

دفعة 2004

① إذا كان ق(س) = س + $\frac{٤}{س}$ فإن الاقتران مقعر للأسفل في الفترة

أ)]−∞، ٠[ب)]−∞، ٠] ج)]٠، ∞[د) [٠، ∞[

② إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ - ١ &، س < ٢ \\ ٥ - س &، س \geq ٢ \end{cases}$

فإن ق(س) مقعر للأعلى في الفترة

أ)]−∞، ٢] ب)]−∞، ٢[ج)]−∞، −١] د)]−∞، −١[

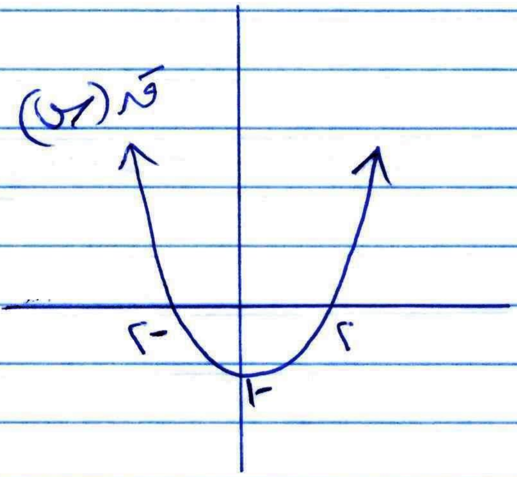
③ إذا كان هـ(س) = $\left(\frac{س - ١}{س}\right)^٢$ فإن للاقتران هـ(س) نقطة انعطاف عند س =

أ) صفر ب) $\frac{٢}{٣}$ ج) $\frac{٣}{٢}$ د) ليس له نقطة انعطاف

④ إذا كان لمنحنى الاقتران ق(س) = جتاس − أس^٣ نقطة انعطاف عند س = $\frac{\pi}{٣}$ فإن قيمة الثابت أ

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{١}{٤}$ د) $-\frac{١}{٤}$

⑤ إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س) فإن ق(س) المعرف على ح مقعر للأعلى في الفترة



Ⓐ]٠، ∞[ⓑ [٠، ∞[

ⓙ ح ⓓ]-١، ∞[

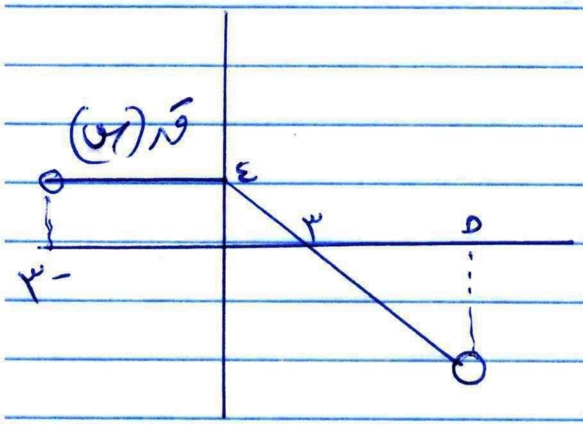
⑥ ق(س) معرف على [٠، ٣] وكان ق(١) = -٢ ، قَ(١) = ٠ ، قً(١) = -٣ فإن القيمة العظمى المحلية للاقتران ق(س) تساوي

Ⓐ ١ ⓑ -٣ ⓙ صفر ⓓ -٢

⑦ إذا كان ق(س) متصل وقابل للاشتقاق على ح وكان قَ($س_1$) > قَ($س_2$) ∀ $س_1 < س_2$ حيث $س_1$، $س_2$ ∈ ح فإن

Ⓐ ق(س) متزايد على ح ⓑ ق(س) متناقص على ح

ⓙ ق(س) مقعر للأعلى ⓓ ق(س) مقعر للأسفل



⑧ الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س) في الفترة [-٣، ٥] فإن منحنى ق(س) يكون

أ) مقعراً لأسفل في]٠، ٥[

ب) مقعراً لأعلى في]-٣، ٣[

جـ) متناقصاً في [٠، ٥]

د) متناقصاً في [٠، ٣]

⑨ إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود حيث ق(س) = ل(س) - هـ(س)، لَ(٢) = هَـ(٢)، لً(٢) < هًـ(٢) فإن للاقتران ق(س) عند س = ٢

أ) قيمة عظمى محلية ب) قيمة صغرى محلية

جـ) نقطة انعطاف د) نقطة حرجة ليست قصوى

⑩ إذا كان ص = ق(س)، س ≠ ١ متزايد على مجاله، قَ(س)، قً(س) معرفتين وكان س $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{دص}{دس}$ - ٣ص، ماهو المجال الذي يقع فيه منحنى ق(س) تحت جميع مماساته

أ)]-∞، ١[ب)]١، ∞[جـ)]١، ٤[د) س ≠ ١

حلول أسئلة اختبار درس

التقعر ونقط الانعطاف دفعة 2004

① $ق(س) = س + \frac{٤}{س}$

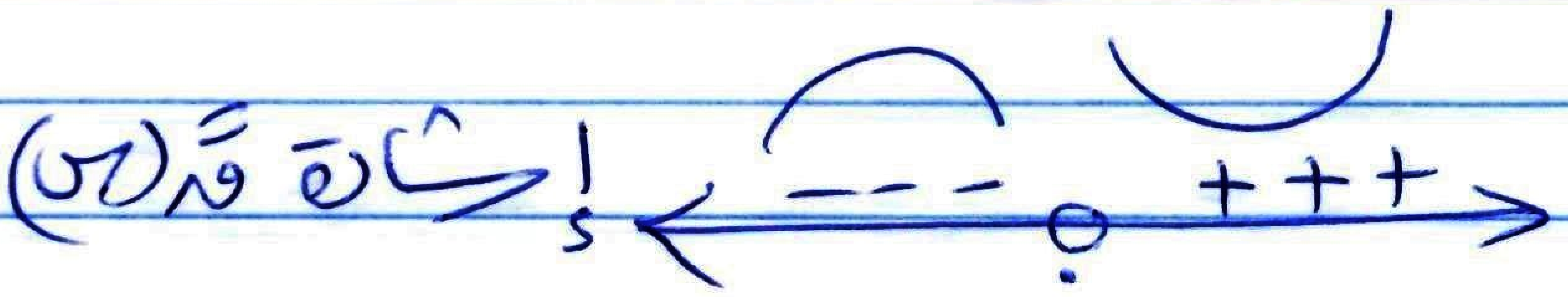
مجال ق(س) هو ح - {٠}

$ق'(س) = ١ - \frac{٤}{س^{٢}}$

$ق''(س) = \frac{س^{٤} \times ٠ - (-٤) \times ٢س}{س^{٤}} = \frac{٨س}{س^{٤}}$

ق''(س) = ٠ عندما ٨س = ٠ ⟸ س = ٠ ∉ المجال

ق''(س) غ.م عندما



$س^{٤} = ٠$ ⟸ س = ٠ ∉ للمجال

⟸ ق(س) مقعر لأسفل في الفترة]-∞، ٠[فرع (ب)

② $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & ، س < ٢ \\ ٥ - س & ، س \geq ٢ \end{cases}$

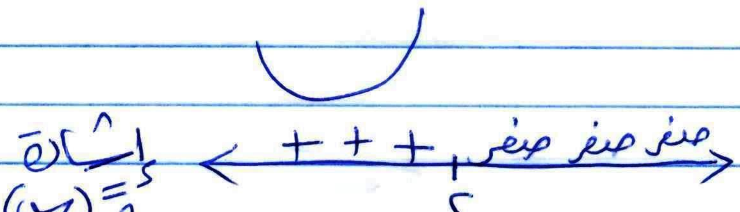
ق(س) متصل عند س = ٢ (تحقق من ذلك)

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & ، س < ٢ \\ -١ & ، س > ٢ \\ غ.م & ، س = ٢ \end{cases}$ ⟵ $ق'(٢)^{+} \neq ق'(٢)^{-}$

تابع س٤/

$$ق''(س) = \begin{cases} ٢ \text{ ، } & س < ٢ \\ ٠ \text{ ، } & س > ٢ \\ غ.م \text{ ، } & س = ٢ \end{cases}$$

$ق''(س) \neq ٠ \quad \forall \; س < ٢$



قَ(س) مقعر لأعلى في الفترة $]-\infty ، ٢[$ فرع (ب)

③ $هـ(س) = \left(\frac{س-١}{س}\right)^{٢} = \left(\frac{س}{س} - \frac{١}{س}\right)^{٢} = \left(١ - \frac{١}{س}\right)^{٢}$

مجال هـ(س) هو ح − {٠}

$هـ'(س) = ٢\left(١ - \frac{١}{س}\right) \times -\left(\frac{-١}{س^{٢}}\right) = ٢\left(١ - \frac{١}{س}\right)\left(\frac{١}{س^{٢}}\right)$

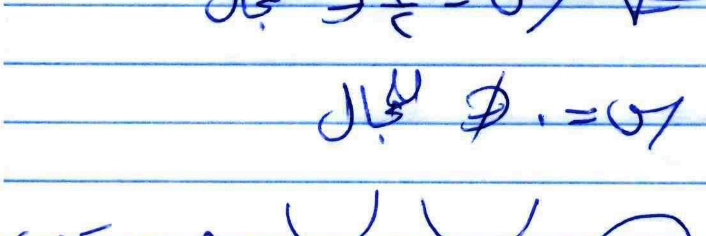
$= ٢\left(\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٣}}\right)$

$هـ''(س) = ٢\left(\frac{-٢س}{س^{٤}} + \frac{٣س^{٢}}{س^{٦}}\right) = ٢\left(\frac{-٢}{س^{٣}} + \frac{٣}{س^{٤}}\right)$

$= ٢\left(\frac{-٢س + ٣}{س^{٤}}\right)$

$هـ''(س) = ٠$ عندما $-٢س + ٣ = ٠ \Leftarrow س = \frac{٣}{٢} \in$ للمجال

$هـ''(س)$ غ.م عندما $س^{٤} = ٠ \Leftarrow س = ٠ \notin$ للمجال



عند $س = \frac{٣}{٢}$

✓ هـ(س) متصل

✓ $هـ''(س) = ٠$ ، هـ(س) يغير من تقعره

$\Leftarrow س = \frac{٣}{٢}$ عندها نقطة انعطاف فرع (ج)

④ د(س) = جتا س − أ س²

د(س) له نقطة انعطاف عند س = $\frac{\pi}{٣}$

⟸ د̿($\frac{\pi}{٣}$) = صفر

د̅(س) = − جا س − ٢أ س

د̿(س) = − جتا س − ٢أ

د̿($\frac{\pi}{٣}$) = − جتا $\frac{\pi}{٣}$ − ٢أ ⟸ − $\frac{١}{٢}$ − ٢أ = ٠

⟸ ٢أ = − $\frac{١}{٢}$ ⟸ أ = ($-\frac{١}{٤}$) فرع ⓓ

⑤ المنحنى يمثل د̅(س) برسم مماسات له نحصل على تقعر د(س)

نلاحظ أنه الفترة]٠، ∞[المماسات تصنع زاوية حادة مع محور

السينات الموجب ⟸ د(س) مقعر لأعلى في الفترة]٠، ∞[فرع ⓑ

⑥ د̅(١) = ٠ ، د̿(١) = −٣ < ٠

حسب اختبار المشتقة الثانية توجد عند س = ١ قيمة عظمى محلية

قيمتها د(١) = (−٢) فرع ⓓ

⑦ فرع ⓓ د(س) مقعر لأسفل

⑧ ق′(س) ميله سالب في الفترة]٠ ، ٥[

⟸ ق″(س) < ٠ في تلك الفترة

⟸ ق(س) مقعر لأسفل في]٠ ، ٥[

⑨ ق(س) = ل(س) − هـ(س)

ق′(س) = ل′(س) − هـ′(س)

ق′(٢) = ل′(٢) − هـ′(٢) = ٠ ⟵ ① (لأن ل′(٢) = هـ′(٢))

ق″(٢) = ل″(٢) − هـ″(٢)

لكن ل″(٢) < هـ″(٢) ⟸ ل″(٢) − هـ″(٢) < ٠ ⟵ ②

من ① ، ②

ق′(٢) = ٠ ، ق″(٢) < ٠ ⟸ توجد عند س = ٢ قيمة عظمى محلية

فرع ⑨

(١٠) ص = ق(س) متزايد ⟸ ص' = ق'(س) > ٠ ⟵ (*)

س ص' = ص' − ٣ص (اشتقه ضمنياً بالنسبة لـ س)

س × ص'' + ص' = ص'' − ٣ص'

س ص'' − ص'' = −٣ص' − ص' ⟸ ص''(س − ١) = −٤ص'

$$ص'' = \frac{-٤ص'}{(س-١)}$$

المجال الذي يقع فيه منحنى ق(س) تحت جميع مماساته

أي ق''(س) = ص'' < ٠

لكن ص' = ق'(س) > ٠ ⟸ البسط سالب

⟸ س − ١ > ٠ ⟸ س > ١ ⟸ س ∈]١ ، ∞[فرع (ب)

رياضيات الثاني عشر العلمي والصناعي

حلول أسئلة اختبار

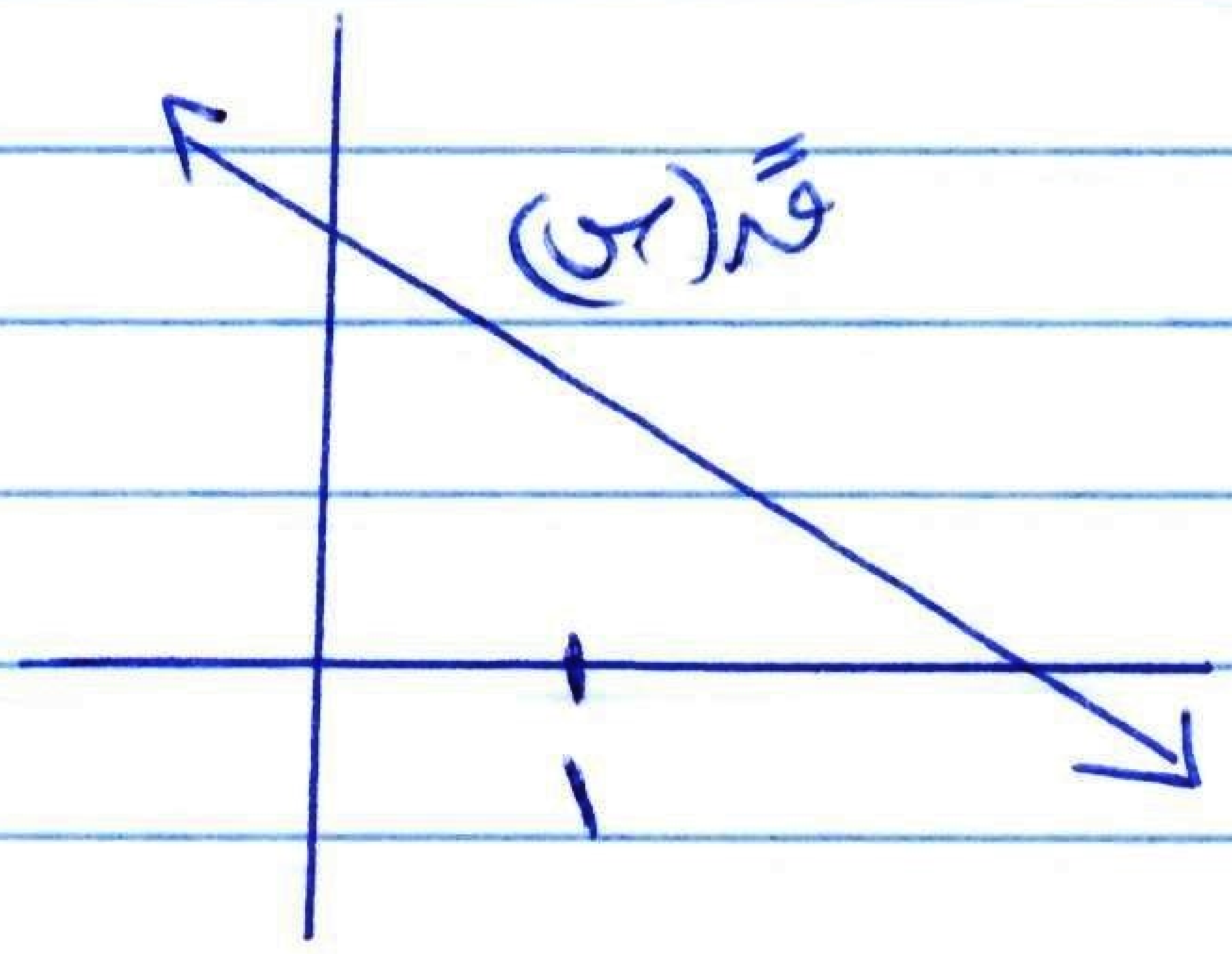
الوحدة الثانية (تطبيقات التفاضل)

دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الثانية (تطبيقات التفاضل)

دفعة 2004

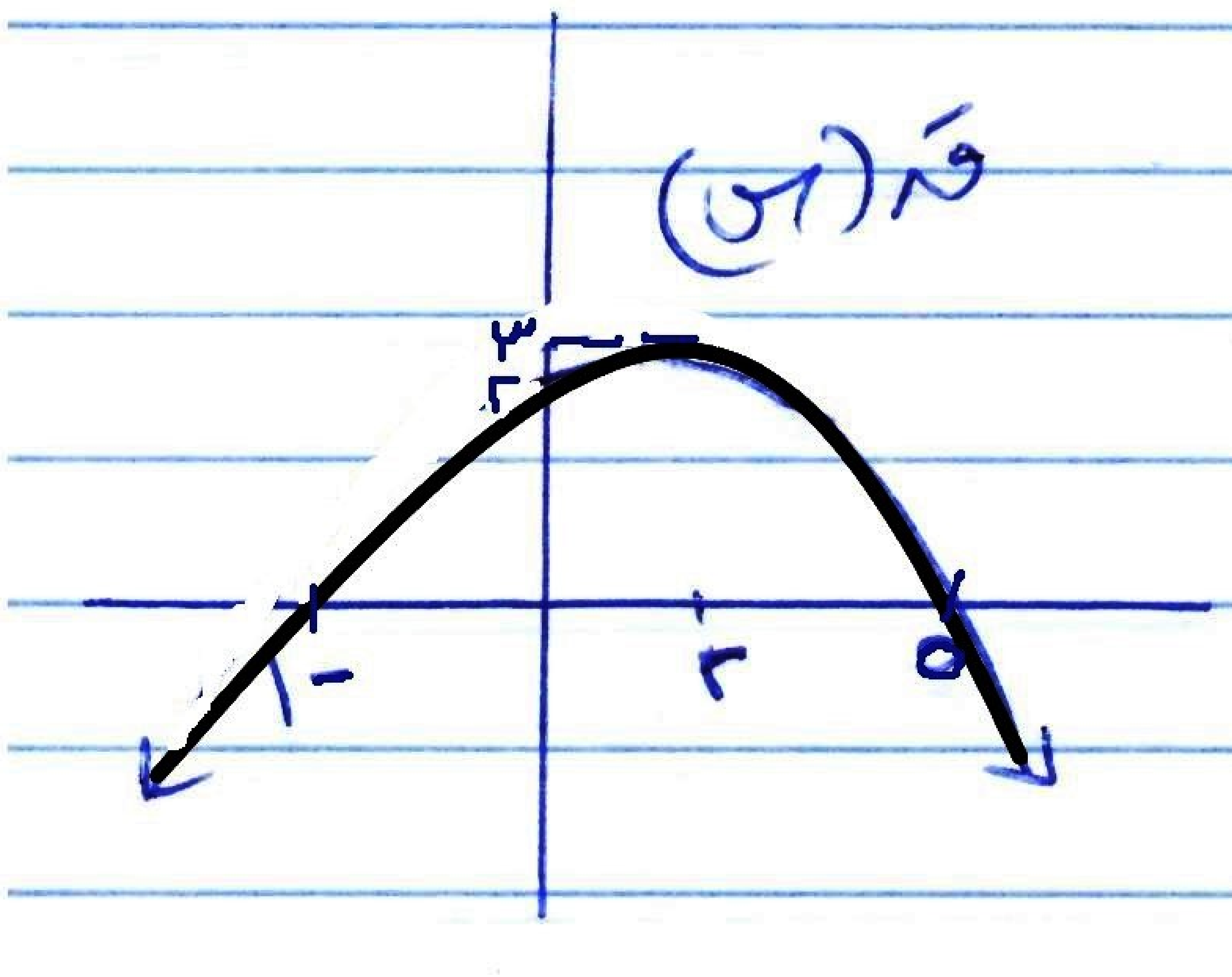


① تمثل منحنى قَ(س) الرسم المجاور إذا كان للاقتران ق(س) نقطة حرجة عند (١، ق(١)) فإن ق(١) هي قيمة

Ⓐ صغرى محلية　Ⓑ عظمى محلية　Ⓒ صغرى وعظمى معاً　Ⓓ نقطة تقعر.

(أ) صغرى محلية　(ب) عظمى محلية　(ج) صغرى وعظمى معاً　(د) نقطة تقعر.

② تمثل الشكل المجاور منحنى قَ(س) لكثير الحدود ق(س) جد:



*① النقاط الحرجة لـ ق(س) عندما س =

(أ) {٢، ٥، -١}　(ب) {٥، -١}

(ج) {٥}　(د) {-١}

*② ق(س) متزايد على الفترة

(أ) [-١، ٥]　(ب)]-∞، ٥]　(ج)]-∞، -١]　(د) [٥، ∞[

*③ ق(س) متناقص على الفترة

(أ) [-١، ٥]　(ب)]-∞، -١]　(ج) [٥، ∞[　(د) ب + ج

*④ ق(س) مقعر للأعلى في الفترة

أ]٢، ∞[ب]٢، ٥[جـ]-∞، ٢[د]-١، ٢[

*⑤ ق(س) مقعر للأسفل في الفترة

أ]٢، ∞[ب]٢، ٥[جـ]-∞، ٢[د]-١، ٢[

*⑥ للاقتران ق(س) نقطة انعطاف عند س =

أ -١ ب ٢ جـ ٥ د ليس له نقطة انعطاف

③ ق(س) = أ$س^٣$ + ب$س^٢$ + جـ س + د اقتران يمر منحناه بالنقطة (٠، ٥) ومعادلة المماس لمنحناه عند النقطة (١، ق(١)) هي ٩س + ص - ٩ = ٠ ولمنحناه نقطة انعطاف عند س = ٢ فإن قيم أ، ب، جـ، د على الترتيب حيث أ، ب، جـ، د ∈ ح

أ أ = ١ ، ب = -٦ ، جـ = ٠ ، د = ٥

ب أ = ٢ ، ب = ٠ ، جـ = ٦ ، د = -٢

جـ أ = -٦ ، ب = ٥ ، جـ = ١ ، د = -٥

د أ = ٠ ، ب = -١ ، جـ = ٢ ، د = ٥

④ قيم م التي تجعل ق(س) = ١٢س + ٦(م-٢) $\text{س}^{٢}$ مقعراً للأسفل هي ؟-

أ) [-∞ ، ٢]   ب)] ٢ ، ∞]   ج) [٢ ، ∞]   د)] ١٢ ، ∞]

⑤ صندوق حجمه معطى بالاقتران ح = $\text{س}^{٣}$ - ٦٥ $\text{س}^{٢}$ + ١٠٠٠س حيث س تمثل ارتفاع الصندوق فإن قيمة س التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن تساوي ؟

أ) $\frac{١٠}{٣}$ ب) $\frac{١٠٠}{٣}$ ج) ١٠   د) ١٠٠

⑥ إذا كانت ظاهـ = $\frac{\text{١٥س}}{\text{س}^{٢}+١٠٠}$ هي العلاقة التي تربط الزاوية هـ والضلع س في مثلث فإن أكبر قياس ممكن للزاوية هـ عندما تكون س =

أ) $\frac{١٠٠}{٣}$ ب) ١٥   ج) -١٠   د) ١٠

⑦ أصغر قيمة للاقتران ق(س) = $\frac{٣}{\text{س}^{٢}+١}$ - ١

أ) -١   ب) صفر   ج) ٢   د) ٣

⑧ إذا كان ق(س) كثير حدود متناقص على ح وكان

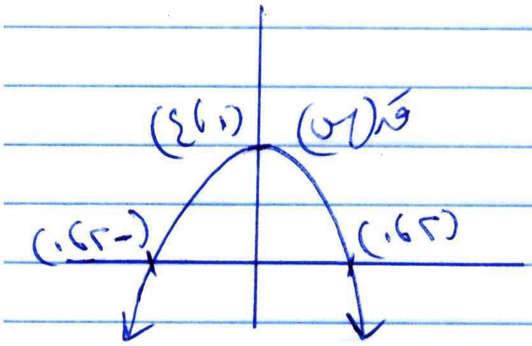
ع(س) = $س^٢$ - ٢س فإن هـ(س) = قَ(س) - ع(س) عَ(س)

أ) متزايد على الفترة [٤، ٥]   ب) ثابتة على الفترة [٤، ٥]

ج) متناقص على الفترة [٤، ٥]   د) ليس مما سبق.

⑨ الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س) فما هي نقطة الانعطاف

لمنحنى ق(س)



أ) (٠، ٤)   ب) (-٢، ٠)

ج) (٠، ق(١))   د) (٢، ٠)

⑩ مثلث متساوي الساقين رأسه في نقطة الأصل وقاعدته

موازية لمحور السينات ونهايتي القاعدة تقعان على منحنى

الاقتران $س^٢$ = ٣٦ - ١٢ص فإن أكبر مساحة ممكنة للمثلث

أ) $٢\sqrt{٢}$ وحدة مساحة   ب) $١٢\sqrt{٢}$ وحدة مساحة

ج) $١٣\sqrt{٣}$ وحدة مساحة   د) $١٢\sqrt{٥}$ وحدة مساحة

حلول أسئلة اختبار الوحدة الثانية
تطبيقات التفاضل دفعة
2004

① للاقتران هـ نقطة حرجة عند (١، هـ(١)) ← هـَ(١) = صفر

من الرسم هـً(١) < ٠ لأن الرسم أعلى محور السينات

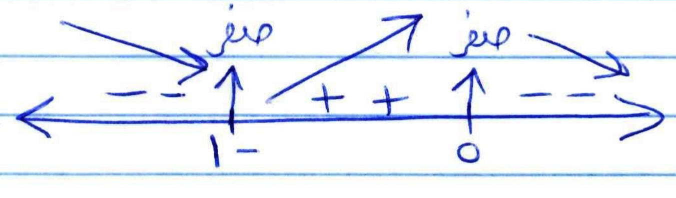
← حسب اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى يوجد قيمة صغرى

محلية عند س = ١ قيمتها هـ(١) فرع (أ)

② من الرسم هـَ(٥) = صفر ، هـَ(١-) = صفر

← *① يوجد نقاط حرجة لـ هـ(س) عند س = {٥، ١-} فرع (ب)

*②



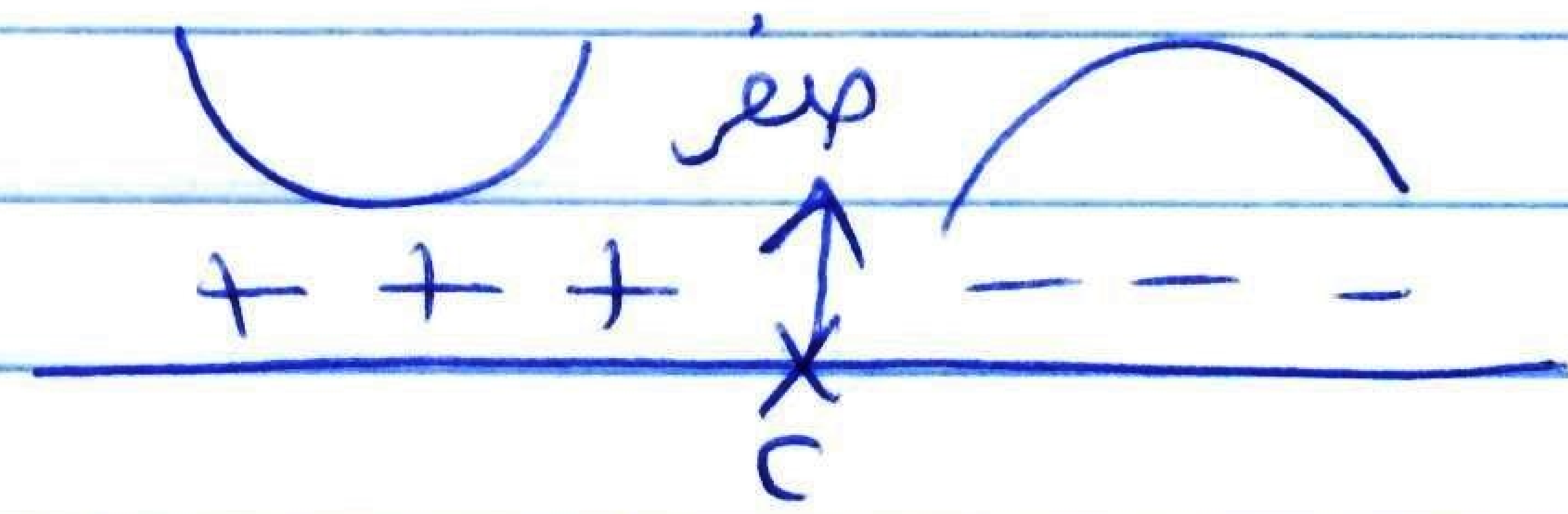
إشارة هـَ(س)

هـ(س) متزايد على الفترة [١-، ٥] فرع (أ)

*③ هـ(س) متناقص على الفترة]-∞، ١-] و [٥، ∞[فرع (د)

* (٤) من خلال رسم مماسات لمنحنى قَ(س) نحصل

على



إشارة قَ(س)

حيث المماسات الحادة موجبة ، المماسات المنفرجة سالبة

ق(س) مقعر لأعلى في الفترة]-∞، ٢[فرع (ج)

* (٥) ق(س) مقعر لأسفل في الفترة]٢، ∞[فرع (أ)

* (٦) بـ ق(س) كثير حدود

(١) ق(س) متصل عند س = ٢

(٢) قَ(٢) = ٠ ⟵ من الرسم المماس أفقي عند س = ٢

(٣) الاقتران يغير من اتجاه تقعره من مقعر لأعلى لمقعر لأسفل

⟵ (٢، ق(٢)) نقطة انعطاف أو للاقتران نقطة

انعطاف عند س = ٢ فرع (ب)

$\boxed{\text{س٣}}$ ق(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د

ق(١) = ٥

قَ(١) = ميل المماس = -٩

قَ(س) = ٣أس^{٢} + ٢ب س + جـ

قَ(١) = ٣أ + ٢ب + ج = -٩ ⟵ ①

ق(٠) = ٥ ⟸ $\boxed{د = ٥}$ ⟵ ②

ق(١) = ص١

س = ١

أ + ب + ج + ٥ = ٠ ⟵ ③

٩س + ص - ٩ = ٠
عندما س = ١
⟸ ٩ + ص - ٩ = ٠
⟸ ص = ٠

ق(س) له نقطة انعطاف عند س = ٢

⟸ قً(٢) = ٠

قً(س) = ٦أس + ٢ب

قً(٢) = ١٢أ + ٢ب = ٠ (÷٢) ⟸ ٦أ + ب = ٠ ⟵ ④

من ① ، ③

٣أ + ٢ب + ج = -٩
-أ + -ب + -ج = ±٥

٢أ + ب = -٤ ⟵ ⑤

من ④ ، ⑤
-٦أ -+ب = ٠
٢أ + ب = -٤

-٤أ = -٤ ⟸ $\boxed{أ = ١}$

بالتعويض في ④ ⟸ ٦ + ب = ٠ ⟸ $\boxed{ب = -٦}$

بالتعويض في ③ ⟸ ١ - ٦ + ج = -٥ ⟸ $\boxed{ج = ٠}$

⟸ أ = ١ ، ب = -٦ ، ج = ٠ ، د = ٥ $\boxed{مع م}$

س٤

$ق(س) = ١٢س + ٦(م-٢)س^{٢}$

$\acute{ق}(س) = ١٢ + ١٢(م-٢)س$

$\acute{\acute{ق}}(س) = ١٢(م-٢)$

ق(س) مقعر لأسفل ← $١٢(م-٢) < ٠$

← $(م-٢) < ٠$ ← $م < ٢$

∴ قيم م التي تجعل ق(س) مقعر لأسفل هي $]-\infty ، ٢[$ فرع ①

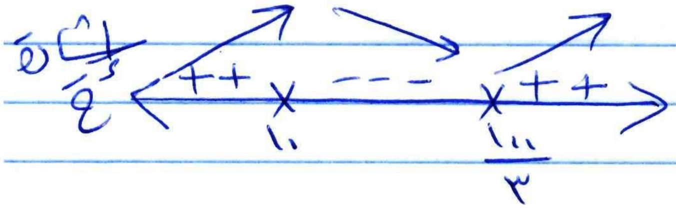
س٥

$ع = س^{٣} - ٦٥س^{٢} + ١٠٠٠س$

$\acute{ع} = ٣س^{٢} - ١٣٠س + ١٠٠٠$

$\acute{ع} = ٠$ عندما $(٣س - ١٠٠)(س - ١٠) = ٠$

← $س = \frac{١٠٠}{٣}$ ، $س = ١٠$



يوجد عند س = ١٠ قيمة عظمى

وبالتالي أكبر حجم ممكن للصندوق عند س = ١٠ فرع ②

س٦ | ظاهـ = $\frac{١٥س}{س^٢ + ١٠٠}$

قاهـ = $\frac{(س^٢ + ١٠٠) × ١٥ - ١٥س × ٢س}{(س^٢ + ١٠٠)^٢}$

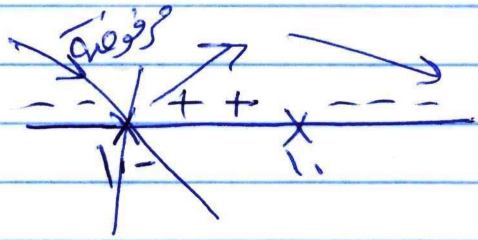
البسط = صفر عندما $١٥س^٢ + ١٥٠٠ - ٣٠س^٢ = ٠$

⇐ $-١٥س^٢ + ١٥٠٠ = ٠$ ⇐ $س^٢ = ١٠٠$

⇐ س = ±١٠

س طول ضلع ⇐ القيم السالبة مرفوضة

∴ س = ١٠ فرع (د)



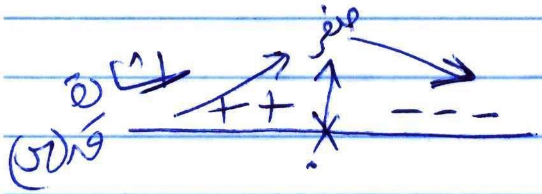
يوجد عند س = ١٠ قيمة عظمى لـ ظاهـ

س٧ | هـ(س) = $\frac{٣}{س^٢ + ١} - ١$

هـَ(س) = $\frac{-٦س}{(س^٢ + ١)^٢}$

هـَ(س) = ٠ عندما -٦س = ٠

⇐ س = ٠



توجد عند س = ٠ قيمة عظمى وهي وحيدة وهـ(س) متصل عندها

⇐ (٠، هـ(٠)) قيمة عظمى مطلقة

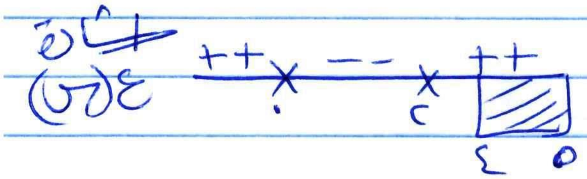
⇐ أكبر قيمة للاقتران هي هـ(صفر) = ٢ فرع (ج)

حل | ق(س) متناقص على ع ⟸ قَ(س) < ٠ ∀س ∈ ع

⟸ قً(س) < ٠ ∀س ∈ [٤،٥]

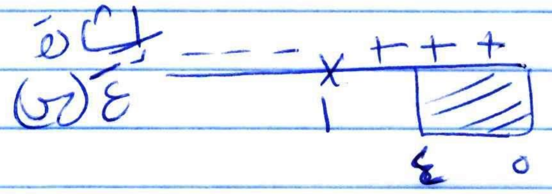
ع(س) = س^٢ - ٢س ⟸ س(س-٢) = ٠

⟸ س = ٠ ، س = ٢



⟸ ع(س) > ٠ ∀س ∈ [٤،٥]

عَ(س) = ٢س - ٢



⟸ ٢س - ٢ = ٠ ⟸ س = ١

عَ(س) > ٠ على الفترة [٤،٥]

عً(س) = ٢ > ٠ ∀س ∈ [٤،٥]

هـ(س) = قَ(س) - ع(س) عَ(س)

هـَ(س) = قً(س) - [ع(س) × عً(س) + عَ(س) × عَ(س)]

= - ⊖ [+ × + ⊕ + × +]

= - ⊖ [⊕ ⊕ ⊕]

= - ⊖ + = سالب (مثل) -٣-٥ = -٨

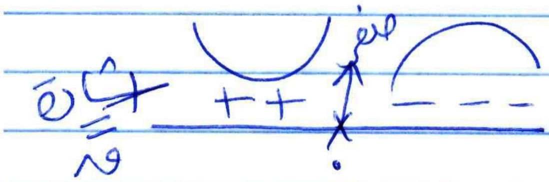
هـَ(س) < ٠ ∀س ∈]٤،٥[

⟸ هـ(س) متناقص على الفترة [٤،٥] فرع (ب)

س٩ | من خلال رسم المماسات لـ ق(س)

فإن المماسات الحادة موجبة الميل ← قَ(+)

والمماسات المنفرجة سالبة الميل ⟸ قَ(-)

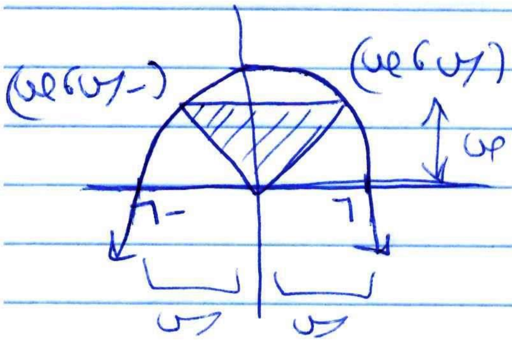


نجد أن قَ(١) = ٠ (المماس أفقي)

(١، ٠) تقع بين تقعرين مختلفين

⟸ (١، ٠) نقطة انعطاف فرع (ج)

س١٠ | س٢ = ٣٦ - ١٢ص



١٢ص = ٣٦ - س٢ (÷ ١٢)

⟸ $\boxed{ص = ٣ - \frac{1}{12} س^2}$ علاقة مساعدة

مساحة Δ = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × ع

= $\frac{1}{2}$ × (س + س) × ص

= $\frac{1}{\cancel{2}}$ × $\cancel{2}$س × ص ⟸ م = س ص

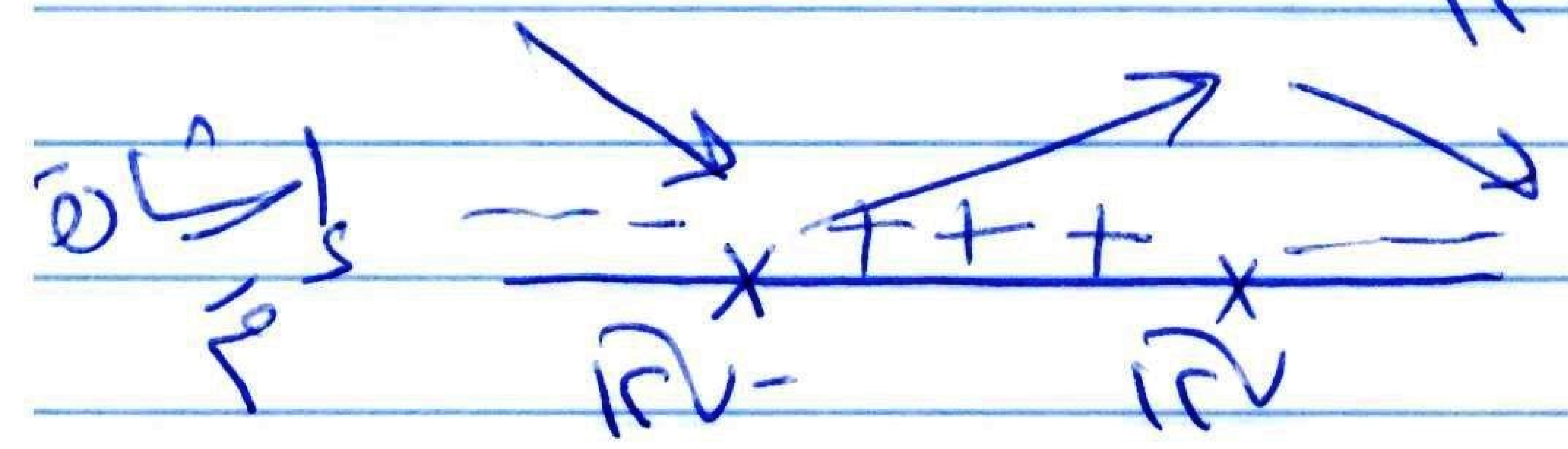
بالتعويض عن ص في م

م = س (٣ - $\frac{1}{12}$ س٢) = ٣س - $\frac{1}{12}$ س٣

مَ = ٣ - $\frac{1}{12}$ × ٣س٢ = ٣ - $\frac{1}{4}$ س٢

مَ = ٠ ⟸ ٣ - $\frac{1}{4}$ س٢ = ٠ (×٤)

$\Leftarrow$ $س^٢ = ١٢$ $\Leftarrow$ $س = \pm \sqrt{١٢}$



يوجد عند $س = \sqrt{١٢}$ قيمة عظمى

∴ أكبر مساحة ممكنة للمثلث عندما $س = \sqrt{١٢}$

$$م = س ص = ٣س - \frac{س^٣}{١٢}$$

$$= ٣\sqrt{١٢} - \frac{(\sqrt{١٢})^٣}{١٢}$$

$$= ٣\sqrt{١٢} - \cancel{\frac{(\sqrt{١٢})^٢}{١٢}} \times \sqrt{١٢}$$

$= ٣\sqrt{١٢} - \sqrt{١٢} = ٢\sqrt{١٢}$ وحدة مساحة

رياضيات الثاني عشر علمي

اختبار الوحدة الأولى (حساب التفاضل)

مراجعات دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الأولى (حساب التفاضل)

دفعة 2004

① إذا كان $ق^{٢}(٣س - ٢) = \left[\frac{س}{٣} + ٦\right] + |١٥ - س|$ ، $ق(٤) > ٠$.

فإن $\bar{ق}(٤) =$

(أ) $-\frac{١}{١٨}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) $-\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{١}{١٨}$

② إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٦ - س ، & س < ٢ \\ س^{٢} + أس ، & س \geq ٢ \end{cases}$

وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى أ ، أ > ٢ يساوي ٩ فإن قيمة أ =

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٨

③ إذا كان $\bar{ق}(٣) = ٢$ ، فما قيمة $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{ق(\sqrt{س + ٨}) - ق(٣)}{س - ١}$

(أ) $-\frac{١}{٣}$ (ب) $-\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{٣}$

④ إذا كانت ص جتاس - ص جاس = $\frac{١}{جتاس + جاس}$ ، فإن $\bar{ص} =$

(أ) ٢قتا٢س ظتا٢س (ب) ٢قا٢س ظا٢س
(جـ) جتاس - جاس (د) -٢قتا٢س ظتا٢س

⑤ إذا كان ص = ع^٣ + ٨ع ، ع س = ٥ + س ، س ≠ ٠

فإن دص/دس |س=١

(أ) -٥٨٠ (ب) ٥٨٠ (ج) ٣٨٠ (د) -٣٨٠

⑥ إذا كان ق'(٢س) = (١+س) هـ(٢/س) ، جد ق(٤) علماً بأن معادلة المماس لـ هـ(س) عند س = ١ هي ص = ١ + ٤س وكان ق(س) يمر بالنقطة (٤ ، ١/٤)

(أ) ١ (ب) -١ (ج) صفر (د) ١/٢

⑦ يتحرك جسم وفق العلاقة ف = ٢أن^٢ - ن^٣ ، أ ∈ ح ، أجد

(أ) سرعة الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة حيث تسارعه في تلك اللحظة ٢٤ م/ث^٢

(أ) -٦٠ م/ث (ب) ٦٠ م/ث (ج) -١٢٠ م/ث (د) ١٢٠ م/ث

(ب) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم

(أ) ٦٦٤ م (ب) ٨٦٤ م (ج) ٤١٤ م (د) ١٦٤ م

⑧ إذا كانت ص = ٧ - ٢س معادلة العمودي على المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) عند نقطة التماس التي احداثيها السيني س = ٢ حيث ق(س) × قَ(س) = $\frac{ل}{س^{٢}}$ ، ق(س) ≠ ٠ .
فإن قيمة الثابت ل =

أ) $-\frac{١٠}{٣}$ ب) ٦ ج) $\frac{٥}{١٢}$ د) $-\frac{٧}{١٢}$

⑨ إذا كان ق(س) = $\frac{أ}{س-٣}$ + ٥هـ(س) وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) على الفترة [-١، ٢] يساوي ٩ والتغير في الاقتران هـ(س) في نفس الفترة يساوي ٣ فإن قيمة الثابت أ =

أ) ١٢ ب) -١٢ ج) -١٦ د) ١٦

⑩ إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ ، هـ(س) = $\frac{ب}{٢س+١}$ وكان (ق ∘ هـ)َ(١) = $\frac{٨}{٩}$ ، فإن قيمة ب =

أ) ٢ ب) ٤ ج) -٤ د) -٢

حلول أسئلة اختبار الوحدة الأولى

مراجعات دفعة 2004

① المطلوب هَ(٤) = ؟!

٣س - ٢ = ٤ ⟸ ٣س = ٦ ⟸ س = ②

نعوض عند س = ٢

ه²(٣س - ٢) = [س/٣ + ٦] + |٥ - س|

عوض عند س = ٢

ه²(٣س - ٢) = [٢/٣ + ٦] + |٥ - ٢|

ه²(٣س - ٢) = ٦ + ٥ - س   اشتق الطرفين

٢ه(٣س - ٢) × هَ(٣س - ٢) × ٣ = -١

÷٦ ه(٤) × هَ(٤) = -١/٦ ⟵ ✱

لكن ه²(٤) = [٢/٣ + ٦] + |٥ - ٢| = ٦ + ٣ = ٩

ه²(٤) = ٩ ⟸ ه(٤) = ٣

عوض في ✱ ⟸ ه(٤) × هَ(٤) = -١/٦

⟸ ٣ × هَ(٤) = -١/٦ ⟸ هَ(٤) = -١/١٨

فرع (P)

② د(س) = { ٦ - س ، س < ٢
س^٢ + أس ، س ≥ ٢

متوسط التغير لـ د(س) = (د(أ) - د(١)) / (أ - ١)

⇐ ((أ^٢ + أ × أ) - (٦ - ١)) / (أ - ١) = ٩

⇐ (٢أ^٢ - ٥) / (أ - ١) = ٩ / ١ ⇐ ٢أ^٢ - ٥ = ٩أ - ٩

⇐ ٢أ^٢ - ٩أ + ٤ = ٠

⇐ (٢أ - ١)(أ - ٤) = ٠

٢أ - ١ = ٠ أو أ = ④ ✓ فرع ⓙ

أ = ١/٢

مرفوض لأنه
(٢ < أ)

③ نهـا س←١ (د(√(س + ٨)) - د(٣)) / (س - ١)

بالتعويض المباشر (د(√٩) - د(٣)) / (١ - ١) = صفر / صفر

لذلك نستخدم لوبيتال والمشتقة بالنسبة لـ س

$$= \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{قَ}\left(\sqrt{\text{٢س}+٨}\right) \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{٢س}+٨}} - \text{صفر}}{١}$$

$$= \text{قَ}(٣) \times \frac{١}{٢\sqrt{٩}} = ٢ \times \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٦} = \boxed{\frac{١}{٣}} \quad \text{فرع} \ \text{(د)}$$

④

$$\text{ص جتاس} - \text{ص جاس} = \frac{١}{\text{جتاس} + \text{جاس}}$$

$$\text{ص} \left(\text{جتاس} - \text{جاس}\right) = \frac{١}{\text{جتاس} + \text{جاس}}$$

$$\frac{\text{ص} \left(\cancel{\text{جتاس} - \text{جاس}}\right)}{\left(\cancel{\text{جتاس} - \text{جاس}}\right)} = \frac{١}{\left(\text{جتاس} + \text{جاس}\right)\left(\text{جتاس} - \text{جاس}\right)}$$

$$\text{ص} = \frac{١}{\text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س}}$$

$$\text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س} = \text{جتا٢س}$$

$$\text{ص} = \frac{١}{\text{جتا٢س}} = \text{قا٢س}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ \ \text{قا٢س ظا٢س} \quad \text{فرع} \ \text{(ب)}$$

⑤ ص = ع^{٣} + ٨ع ، ع س = ٥ + س

(الحل) ص = ع^{٣} + ٨ع (اشتقه بالنسبة لـ ع)

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} = ٣\text{ع}^{٢} + ٨ \longrightarrow (*)$$

ع س = ٥ + س (÷ س)

$$\text{ع} = \frac{٥ + \text{س}}{\text{س}}$$ (اشتقه بالنسبة لـ س)

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = \frac{-٥}{\text{س}^{٢}} \longrightarrow (**)$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$$ (عوض من (*) و (**))

$$= (٣\text{ع}^{٢} + ٨) \times \frac{-٥}{\text{س}^{٢}}$$

عندما س = ١
ع = $\frac{٥}{١}$ + ١ = ⑥

$$\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\substack{\text{س}=١ \\ \text{ع}=٦}} = (٣(٦)^{٢} + ٨) \times \frac{-٥}{١} = \boxed{-٥٨٠}$$ فرع (أ)

⑥ ق²(٢س) = (١+س) هـ($\frac{٢}{س}$)   اشتق الطرفين

٢ق(٢س) × قَ(٢س) × ٢ = (١+س) × هـَ($\frac{٢}{س}$) × $\frac{-٢}{س^٢}$ + هـ($\frac{٢}{س}$) × ١

٤ ق(٢س) قَ(٢س) = $\frac{-٢(١+س)}{س^٢}$ × هـَ($\frac{٢}{س}$) + هـ($\frac{٢}{س}$)

لإيجاد قَ(٤) نضع ٢س = ٤ ⇐ س = ٢

∴ نعوض عند س = ٢

٤ ق(٤) قَ(٤) = $\frac{-٢(٣)}{٤}$ × هـَ($\frac{٢}{٢}$) + هـ($\frac{٢}{٢}$)

٤ ق(٤) قَ(٤) = $\frac{-٦}{٤}$ هـَ(١) + هـ(١) ⟵ (*)

ق يمر بالنقطة (٤، $\frac{١}{٤}$) ⇐ ق(٤) = $\frac{١}{٤}$

عندما س = ١ نقطة التماس لـ هـ(س)

⇐ ص = ١ + ٤ × ١ = ٥ ⇐ $\boxed{\text{هـ(١) = ٥}}$

∴ (١، ٥) تقع على منحنى هـ(س)

ميل مماس منحنى هـ(س) عندما س = ١ هو هـَ = ٤

⇐ $\boxed{\text{هـَ(١) = ٤}}$

عوض في (*) عن هـ(١) ، هـَ(١)

٤ × $\frac{١}{٤}$ × قَ(٤) = $\frac{-٣}{٢}$ × ٤ + ٥ ⇐ قَ(٤) = −٦ + ٥ = $\boxed{-١}$

فرع (ب)

⑤

⑦ (أ) ف = ٢أن^{٢} − ن^{٣}

ع = ٤أن − ٣ن^{٢}

ج = ٤أ − ٦ن

ج = ٢٤م/ث^{٢} ⟸ ٢٤ = ٤أ − ١٢ ⟸ ٤أ = ٣٦
⟸ $\boxed{أ = ٩}$

∴ ع = ٣٦ن − ٣ن^{٢}

∴ سرعة الجسم بعد ثانيتين ع = ٣٦ × ٢ − ٣ × ٤
= ٧٢ − ١٢ = ٦٠م/ث مع (ب)

(ب) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عندما (ع = ٠)

٣٦ن − ٣ن^{٢} = ٠ ⟸ ٣ن(١٢ − ن) = ٠

⟸ ٣ن = ٠ ⟸ ن = ⓪ أو ١٢ − ن = ٠
مرفوض | ⟸ ن = ١٢ ⑧ ✓

∴ ن = ١٢ث

أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم ف = ٢ × ٩ × (١٢)^{٢} − (١٢)^{٣}
= ٨٦٤م مع (ب)

⑧ ص = ٧ - ٢س

صَ = -٢ (ميل العمودي)

∴ ميل المماس $\boxed{\text{قَ}(٢) = \frac{١}{٢}}$

عند نقطة التماس (س = ٢)

$\text{ص}\Big|_{\text{س}=٢} = \text{هـ}(٢)$

٧ - ٢×٢ = هـ(٢) ⟸ $\boxed{\text{هـ}(٢) = ٣}$

$\text{هـ(س)} \times \text{قَ(س)} = \frac{\text{ل}}{٤\text{س}}$

$\text{هـ}(٢) \times \text{قَ}(٢) = \frac{\text{ل}}{٤}$ ⟸ $٣ \times \frac{١}{٢} = \frac{\text{ل}}{٤}$

⟸ $\frac{٣}{٢} \times \frac{\text{ل}}{٤}$ ⟸ ٢ل = ١٢

⟸ $\boxed{\text{ل} = ٦}$ فرع (ب)

⑨ متوسط التغير في ق(س) = $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = ٩$

Δ هـ(س) = ٣

لكن $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(٢) - ق(-١)}{٣} = ٩$

$\boxed{ق(٢) - ق(-١) = ٢٧} \longrightarrow$ (*)

$\left(\boxed{-أ} + ٥هـ(٢)\right) - \left(\boxed{\frac{-أ}{٤}} + ٥هـ(-١)\right) = ٢٧$

$-أ + \frac{أ}{٤} + ٥\left(هـ(٢) - هـ(-١)\right) = ٢٧$

$\frac{-٣أ}{٤} + ٥ \times ٣ = ٢٧ \Leftarrow \frac{-٣أ}{٤} + ١٥ = ٢٧$

$\Leftarrow \frac{-٣أ}{٤} = ١٢ \Leftarrow أ = ١٢ \times \frac{-٤}{٣}$

$\Leftarrow أ = \boxed{-١٦}$ مرع (ج)

⑩ ق(س) = س^٤ ، ق̄(س) = ٢س ، ق̄̄(س) = ٢

$هـ'(س) = \frac{-٢ب}{(٢س+١)^٢} \Leftarrow هـ'(١) = \frac{-٢ب}{٩}$

$(ق \circ هـ)'(١) = ق'(هـ(١)) \times هـ'(١)$

$\frac{٨}{٩} = ٢ \times \frac{-٢ب}{٩} \Leftarrow \frac{٨}{٩} = \frac{-٤}{٩}ب$

$\Leftarrow ب = \boxed{-٢}$ مرع (د)

رياضيات الثاني عشر علمي

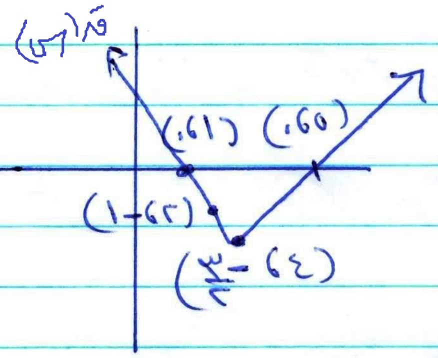
اختبار الوحدة الثانية (تطبيقات التفاضل)

مراجعات دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الثانية (تطبيقات التفاضل)

مراجعات دفعة 2004



① إذا كان ق(س) يحقق شروط رول على [١، ٦] معتمداً على الشكل المجاور فإن قيمة / قيم جـ الناتجة عن النظرية

أ) ٢، ٤ ب) ١، ٥ جـ) ١، ٢، ٣، ٤، ٥ د) ٥

② إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ - ٣س - ب يحقق شروط نظرية رول على الفترة [-٢، ب] فإن قيمة الثابت ب

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٤ د) ٥

③ أي الاقترانات التالية تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على [-٢، ٢]

أ) ق(س) = [س + ٢] ب) ق(س) = $\sqrt{س^{٢} + ٢س + ١}$

جـ) ق(س) = $|س^{٢} + ٢س + ١|$ د) ق(س) = $(٢س - ١)^{\frac{1}{3}}$

④ إذا كانت قيمة جـ التي تعينها نظرية القيمة المتوسطة للاقتران

ق(س) = $(\text{لو}_{هـ}\text{س})^2$ - $\text{لو}_{هـ}\text{س}$ في الفترة [١ ، ب] تساوي

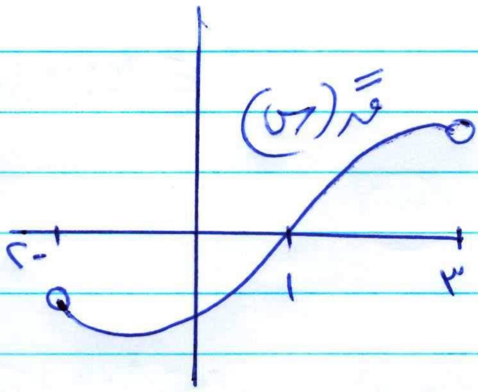
$\sqrt{هـ}$ فإن قيمة ب =

(أ) هـ (ب) $هـ^2$ (جـ) ٢هـ (د) -هـ

⑤ بالاعتماد على منحنى قَ(س) المجاور

حيث ق(س) متصل على [-٢ ، ٣]

وقَ(-١) = قَ(٢) = ٠ جد :



(أ) ق(س) مقعر للأعلى في الفترة

(أ)]١ ، ٣[(ب)]-٢ ، ١[(جـ)]-٢ ، ٣[(د)]١ ، ∞[

(ب) لـ ق(س) قيمة عظمى عند س =

(أ) ٢ (ب) -١ (جـ) ١ (د) -٢

(جـ) ق(س) متناقص على الفترة

(أ)]-∞ ، -١] (ب) [-١ ، ٢] (جـ) [٢ ، ∞[(د) [-٢ ، ٣]

⑥ إذا كان د(س) = س $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ فإن أصغر قيمة للاقتران د(س) هي؟

أ) ٢   ب) -٢   ج) $\sqrt{٢}$ د) -$\sqrt{٢}$

⑦ إذا كان د(س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ ، س ∈]-١، ١[فإن النقطة الحرجة لـ د(س) هي؟

أ) (-١، ١)   ب) (١، ١)   ج) (٠، ٠)   د) (٠، ١)

⑧ إذا كانت قَ(١) = قَ(٣) = ٠ . وكان منحنى قً(س) يقع فوق محور السينات ∀ س ∈]٢، ٤[أي العبارات التالية صحيحة دائماً؟

أ) ق(١) عظمى محلية   ب) ق(١) صغرى محلية

ج) ق(٣) عظمى محلية   د) ق(٣) صغرى محلية

⑨ إذا كان د(س) = |١ - س^٢| ، س ∈ [٠، ٢] فإن الإحداثيات السينية للنقاط الحرجة

أ) {١، -١، ٠}   ب) {١، -١، ٠، ٢}   ج) {٠، ١، ٢}   د) {١}

⑩ إذا كان ص = ٢س يمس منحنى ق(س) = (س² - ٢س) (أس + ب) عند نقطة الأصل وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند النقطة (٢، ١) فإن أ، ب على الترتيب

(أ) -١ ، ١   (ب) ½ ، -١   (جـ) ١ ، -١   (د) ½ ، -½

⑪ دائرة طول قطرها أب يساوي ٤ سم، بدأت النقطة جـ الحركة على الدائرة من ب باتجاه أ فإن قياس الزاوية أ ب جـ التي تجعل مساحة المثلث أ ب جـ أكبر ما يمكن

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$

⑫ إذا كان ق(س) = ٣(أ-٢)س⁴ + ٨س - ٥ فما قيمة الثابت أ التي تجعل المنحنى يقع أعلى مماساته.

(أ) أ < ٢   (ب) أ > ٢   (جـ) أ > ١٢   (د) أ < ١٢

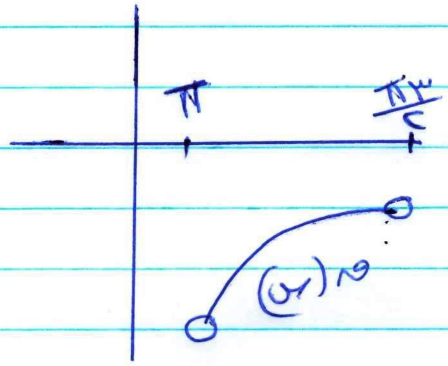
⑬ إذا كانت زاوية الانعطاف للاقتران ق(س) = س³ + ٣س² + أس هي $\frac{٣\pi}{٤}$ فإن قيمة الثابت أ =

(أ) -١   (ب) ٢   (جـ) -٢   (د) ٣

⑭ إذا كان د(س) كثير حدود له قيمة عظمى محلية عند النقطة (١ ، ٤) وكان هـ(س) = (١ - د(س))^٣ فإن إحدى العبارات التالية صحيحة؟

(أ) هـ''(١) > ٠ (ب) هـ''(١) < ٠ (جـ) هـ''(١) = ٠ (د) هـ''(١) غ.م

⑮ في الشكل المجاور والذي يمثل منحنى د(س) على الفترة $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن منحنى هـ(س) = جاس ظاس / د(س) على الفترة $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$



(أ) متناقص على $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$ (ب) متزايد على $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$

(جـ) متناقص على $[\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$ (د) متزايد على $[\pi ، \frac{٣\pi}{٢}]$

حلول أسئلة اختبار الوحدة الثانية

مراجعات دفعة 2024

① الشكل يمثل منحنى ق(س)

∴ ق(س) يحقق رول ⟸ توجد جـ ∈]١، ٦[بحيث

ق(جـ) = ٠ وذلك عند س = ١ ، س = ٥ ← فرع (د)

مرفوض ∉]١، ٦[

② ق(س) = س² − ٣س − ب

∴ ق(س) يحقق رول ⟸ ق(−٢) = ق(ب)

⟸ ٤ + ٦ − ب = ب² − ٣ب − ب

⟸ ١٠ − ب = ب² − ٤ب

⟸ ب² − ٣ب − ١٠ = ٠

⟸ (ب − ٥)(ب + ٢) = ٠

∴ ب = ٥ ، ب = −٢ مرفوض لأنه ب ∈ [−٢، ب]

③ تحقق شروط القيمة المتوسطة

أي نبحث عن الاقتران المتصل على [-٢،٢] وقابل للاشتقاق على

]-٢،٢[

ⓐ غير متصل (X) $\longleftarrow$ غير قابل للاشتقاق .

ⓑ $\sqrt{(\text{س}+1)^2} = |(\text{س}+1)|$ متصل على [-٢،٢] ولكنه

غير قابل للاشتقاق عند س = (-١)

ⓒ $|(\text{س}+1)|^2 = (\text{س}+1)^2$

متصل وقابل للاشتقاق (كثير حدود)

ⓓ متصل لكنه غير قابل للاشتقاق على]-٢،٢[

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{3}(2\text{س}-1)^{-\frac{2}{3}} \times 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2\text{س}-1)^2}}$

عند س = $\frac{1}{2}$ $\longleftarrow$ ق(س) غير قابل للاشتقاق حيث $\frac{1}{2} \in$]-٢،٢[

$\Longleftarrow$ ق(س) غير قابل للاشتقاق على]-٢،٢[

④ $\text{ق}(\text{س}) = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}}$

$\text{ق}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(١)}{\text{ب} - ١}$ ، $\text{جـ} = \sqrt{\text{هـ}}$

$\Leftarrow \text{ق}'(\sqrt{\text{هـ}}) = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب})^{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب} - \left[\overset{\text{صفر}}{\cancel{(\text{لو}_{\text{هـ}}١)^{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}}١}}\right]}{\text{ب} - ١} \longrightarrow ⊛$

$\text{لكن } \text{ق}'(\sqrt{\text{هـ}}) = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{هـ}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}}} - \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}}} = \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}}}\left[٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{هـ}} - ١\right]$

$= \frac{١}{\sqrt{\text{هـ}}}\left[\cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} - ١\right]$

$= \boxed{\text{صفر}}$

عوض عن $\text{ق}'(\sqrt{\text{هـ}})$ في ⊛

$٠ = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب})^{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب}}{\text{ب} - ١} \Longleftarrow ٠ = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب} - ١\right]}{\text{ب} - ١}$

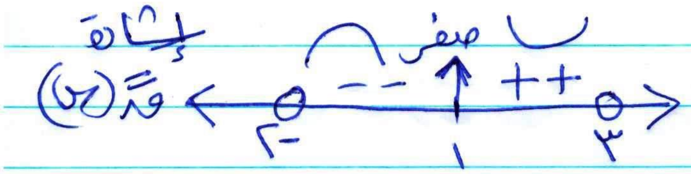
$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب} - ١\right] = ٠$

$\Leftarrow$ إما $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب} = ٠$ أو $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب} - ١ = ٠$

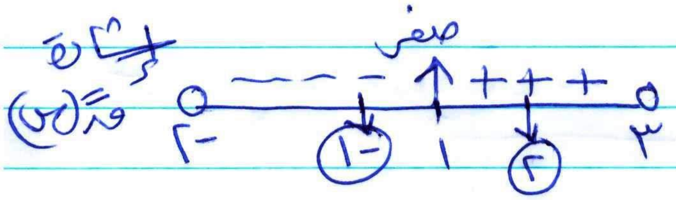
$\Leftarrow \text{ب} = ١\ (\times)$ أو $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ب} = ١ \Leftarrow \text{ب} = \boxed{\text{هـ}}$ فرع (أ)

مرفوض لأنه $]١ ، \text{ب}[$

⑤



(أ) د(س) مقعر لأعلى في الفترة]١، ٣[فرع (أ)



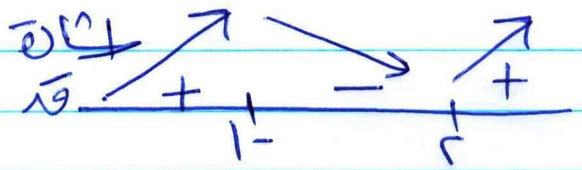
(ب) د̄(−١) = صفر

د̄̄(−١) < صفر

∴ توجد قيمة عظمى عند س = −١ فرع (ب)

د̄(٢) = ٠

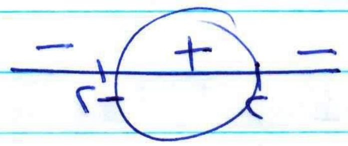
د̄̄(٢) > ٠ ⟸ توجد قيمة صغرى عند س = ٢



(ج) د(س) متناقص في الفترة [−١، ٢] فرع (ب)

⑥ د(س) = س $\sqrt{٤ - س^٢}$

أولاً / نحدد مجال د(س)



٤ − س² ≥ ٠ ⟸ ٤ − س² = ٠ ⟸ س = ±٢

مجال د(س) هو [−٢، ٢]

∵ د(س) متصل في [−٢، ٢]

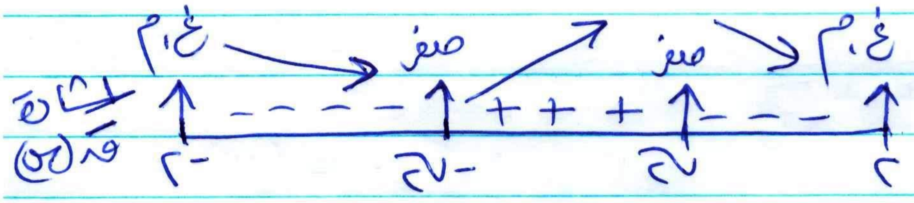
∴ له قيمة عظمى مطلقة وصغرى مطلقة.

$$\text{قَ(س)} = \text{س} \times \frac{-\cancel{\text{٢}}\text{س}}{\cancel{\text{٢}}\sqrt{\text{٤}-\text{س}^{\text{٢}}}} + \sqrt{\text{٤}-\text{س}^{\text{٢}}} \times \text{١}$$

$$\text{قَ(س)} = \frac{-\text{س}^{\text{٢}}}{\sqrt{\text{٤}-\text{س}^{\text{٢}}}} + \sqrt{\text{٤}-\text{س}^{\text{٢}}} = \text{٠}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\sqrt{\text{٤}-\text{س}^{\text{٢}}}} \times \frac{\sqrt{\text{٤}-\text{س}^{\text{٢}}}}{\text{١}}$$

$$\Leftarrow \text{س}^{\text{٢}} = \text{٤} - \text{س}^{\text{٢}} \Leftarrow \text{٢}\text{س}^{\text{٢}} = \text{٤} \Leftarrow \text{س} = \pm\sqrt{\text{٢}}$$



✓ عند س = -٢ قيمة عظمى محلية هي ق(-٢) = ٠

✓ عند س = -√٢ قيمة صغرى محلية هي ق(-√٢) = -٢

✓ عند س = √٢ قيمة عظمى محلية هي ق(√٢) = ٢

✓ عند س = ٢ قيمة صغرى محلية هي ق(٢) = ٠

∴ القيمة العظمى المطلقة لـ ق(س) = ٢ ⇐ أكبر قيمة.

و القيمة الصغرى المطلقة لـ ق(س) = -٢ ⇐ أصغر قيمة ← فرع (ب)

⑦ ق(س) = $\sqrt[٣]{س^{٤}}$ ، س ∈ [-١، ١]

ق(س) = $س^{\frac{٤}{٣}}$ ⇐ قَ(س) = $\frac{٤}{٣}$ $س^{-\frac{١}{٣}}$ = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$

قَ(س) ≠ ٠ لأن ٢ ≠ ٠

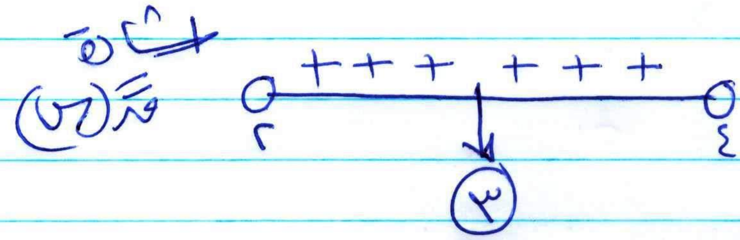
قَ(س) غ.م عند س = ٠

∴ النقطة الحرجة الوحيدة هي (٠، ق(٠)) = (٠، ٠) فرع (ج)

⑧ قَ(١) = ٠

قَ(٣) = ٠

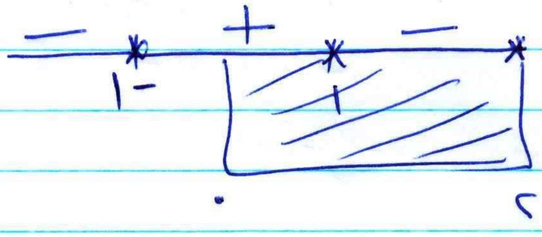
قً(٣) > ٠



⇐ توجد قيمة صغرى عند س = ٣ قيمتها ق(٣) فرع (د)

⑨ ق(س) = |١ - س²| ، س ∈ [٠، ٢]

١ - س² = ٠ ⇐ س = ±١



∴ ق(س) = { ١ - س² ، ٠ ≤ س ≤ ١
س² - ١ ، ١ < س ≤ ٢

ق(س) متصل عند س = ١ (تحقق من ذلك).

قَ(س) = { -٢س ، ٠ < س < ١
٢س ، ١ < س < ٢
غ.م ، س = ⓪، ② ، ① ⟵ قَ(١)$^{+}$ ≠ قَ(١)

أطراف فترة

∴ الإحداثيات السينية للنقاط الحرجة {٠، ١، ٢} فرع (ج)

① معادلة المماس ص = ٢س ⟸ ميل المماس صَ = ٢

كذلك ميل المماس = قَ(٠)

قَ(س) = $(س^{٣} - ٢س)$ × أ + (أس + ب)$(٣س^{٢} - ٢)$

قَ(٠) = ٠ - ٢ب = (-٢ب)

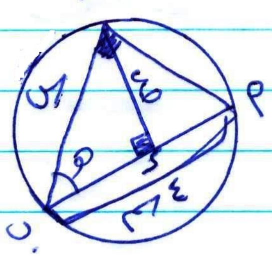
قَ(٠) = (٢) ⟸ -٢ب = ٢ ⟸ ب = (-١)

ب النقطة (٠، ٢) نقطة قيمة صغرى ⟸ قَ(٢) = ٠

⟸ ٠ × أ + (٢أ - ١) × ٢ = ٠ ⟸ أ = $\boxed{\frac{١}{٢}}$

∴ أ = $\frac{١}{٢}$ ، ب = -١ فرع (ب)

⑪



∡ هـ التي تجعل مساحة △ أ جـ ب أكبر ما يمكن

مساحة △ = ½ × القاعدة × ع

= ½ × ٤ × ع

= ½ × ٤ × س جاهـ

= ٢ س جاهـ ⟵ (*)

في △ جـ د ب
جاهـ = ع/س

في △ أ جـ ب

جتاهـ = س/٤ ⟸ س = ٤ جتاهـ ⟵ (**)

بالتعويض من (**) في (*)

م = ٢ × ٤ × جتاهـ جاهـ = ٤ × ٢جتاهـ × جاهـ

⟸ م = ٤ جا٢هـ

∴ م' = ٨ جتا ٢هـ = ٠ ⟸

⟸ جتا ٢هـ = ٠ ⟸ ٢هـ = π/٢ ⟸ هـ = π/٤ ✓

أو ٢هـ = ٣π/٢ ⟸ هـ ≠ ٣π/٤

مرفوضة لأنه الزاوية في مثلث قائم

م'' = -١٦ جا٢هـ ⟸ م''(π/٤) = -١٦ جا π/٢ = -١٦ < ٠

∴ توجد عند $هـ = \frac{\pi}{٤}$ قيمة عظمى مطلقة منع (د)

⑫ $ق(س) = ٣(أ-٢)س^{٢} + ٨س - ٥$

$ق'(س) = ٦(أ-٢)س + ٨$

$ق''(س) = ٦(أ-٢) > ٠$

يكون ق(س) مقعر للأعلى عندما $ق''(س) > ٠$

$٦(أ-٢) > ٠$

$٦أ - ١٢ > ٠ \Leftarrow ٦أ > ١٢$

$\Leftarrow أ > ٢$ منع (ب)

⑬ $ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + أس$ ، زاوية الانعطاف $\frac{٣\pi}{٤}$

<u>تذكر</u>/ إذا كانت جـ الإحداثي السيني لنقطة الانعطاف، (هـ) زاوية الانعطاف $\Leftarrow$ ظاهـ = ق'(جـ)

(الحل) $ق'(س) = ٣س^{٢} + ٦س + أ$

$ق''(س) = ٦س + ٦ = ٠ \Leftarrow س = (-١)$

الإحداثي السيني لنقطة الانعطاف $س = (-١)$

∴ $ظا\left(\frac{٣\pi}{٤}\right) = ق'(-١)$

⇐ -١ = ٣ - ٦ + أ ⇐ -١ = -٣ + أ ⇐ أ = ② فرع (ب)

⑭ (١، ٤) نقطة عظمى محلية

⇐ قَ(١) = ٠

قً(١) < ٠

هـَ(س) = ٣(١ - ق(س))^٢ × - قَ(س)

= -٣(١ - ق(س))^٢ × قَ(س)

هـً(س) = -٣(١ - ق(س))^٢ × قً(س) + قَ(س) × -٦(١ - ق(س))

× - قَ(س)

صفر

هـً(١) = -٣(١ - ق(١))^٢ × قً(١) + ~~قَ(١) × -٦(١ - ق(١))~~ × - قَ(١)

= ⊖ × ⊕ × ⊖ > ٠

⇐ هـً(١) > ٠ فرع (أ)

⑮ $\text{هـ(س)} = \dfrac{\text{س ظاس}}{\text{ق(س)}}$

$$\text{هَ(س)} = \frac{\text{ق(س)} \times (\text{س} \times \text{قا}^{٢}\text{س} + \text{ظاس} \times ١) - \text{س ظاس} \times \text{قَ(س)}}{(\text{ق(س)})^{٢}}$$

لكن ق(س) < ٠ في الفترة $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$ لأنه منحناه يقع في الربع الرابع

قا^{٢}س > ٠ في الفترة $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$ (مربع)

س > ٠ في الفترة $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$

ظاس > ٠ في الفترة $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$ لأنه في الربع الثالث

قَ(س) > ٠ في الفترة $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$ لأنه ق(س) متزايد

$$\therefore \text{هَ(س)} = \frac{\ominus \times (\oplus \times \oplus + \oplus) - \oplus \times \oplus}{\oplus}$$

$$= \frac{\ominus \times \oplus - \oplus}{\oplus} = \frac{\ominus}{\oplus} = \ominus$$

∴ هَ(س) < ٠ ⟵ هـ(س) متناقص في $]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$

رياضيات الثاني عشر علمي

اختبار الورقة الأولى (الوحدة 1، 2)

مراجعات دفعة 2022

إعداد: أ. هدى أسامة فرج

اختبار الوحدة الأولى والثانية

مراجعات - دفعة 2004

① إذا كان $(س-ص)^{٤} + (ص-س)^{٤} = ٣٢$ ، $س \neq ص$

فإن قيمة $\frac{دص}{دس} =$

ⓐ ١ ⓑ ٤ ⓒ -١ ⓓ صفر

② إذا كان متوسط تغير ق(س) على الفترة [١، ٤] يساوي ٣ وكان ق(١) + ق(٤) = ٢ فمتوسط تغير الاقتران هـ(س) = $ق^{٢}(س)$ على الفترة نفسها

ⓐ ٩ ⓑ -٩ ⓒ ٦ ⓓ -٦

③ إذا كان الاقتران $ق(س) = [٢س + ٠٫١] + |س - ٢|$

فإن $قَ(١) =$

ⓐ ١ ⓑ صفر ⓒ -١ ⓓ غير موجودة.

④ إذا كان $هـ(س) = جتا(\frac{\pi}{س})$ ، $ق(\frac{١}{٢}) = ٣$ ، $قَ(\frac{١}{٢}) = \frac{\sqrt{٣}}{١١}$

فإن $\lim_{س \to ٣} \frac{(ق \circ هـ)^{٢}(س) - ٩}{س^{٤} - ٩} =$

ⓐ $-\frac{١}{٦}$ ⓑ $\frac{١}{٦}$ ⓒ $\sqrt{٣}$ ⓓ $-\sqrt{٣}$

⑤ يتحرك جسم حسب العلاقة ف ع = $\frac{١}{٣}$ (ع^{٣} + ن^{٢} - ٩) فإن السارعه بعد ثانيتين علماً بأن المسافة المقطوعة تساوي ١م في ثانيتين

(أ) ١٢م/ث^{٢} (ب) ٢م/ث^{٢} (ج) ١م/ث^{٢} (د) ٤م/ث^{٢}

⑥ إذا كان ل(س) = $\frac{ق^{٢}(س) + س}{هـ(س)}$ ، هـ(س) ≠ ٠

جد لَ(٣) علماً بأن للمنحنيين ق، هـ مماساً أفقياً مشتركاً عند النقطة (٣، ٤) الواقعة على منحنيهما.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) $-\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٤}$

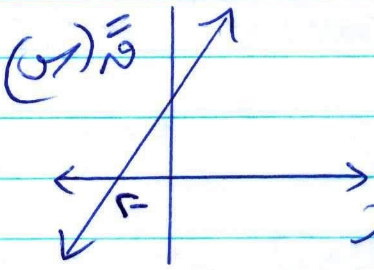
⑦ إذا كانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٣ هي ص + ٢س = ١١ وكانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى هـ(س) عند س = ٣ هي ٤ص + س = ١٥ وكانت ل(س) = ق(س) × هـ(س) فإن لَ(٣) =

(أ) ١٥ (ب) -١٥ (ج) -١٤ (د) ١٤

⑧ إذا كان ق(س) اقتران يقع في الربع الثالث وكان معرفاً في [أ، ب] وكان اقتراناً متناقصاً في نفس الفترة فإن الاقتران ل(س) = $هـ^{س} \times$ ق(س) يكون

أ) مقعر للأعلى في [أ، ب]　　ب) متناقصاً في [أ، ب]

جـ) مقعر للأسفل في [أ، ب]　　د) متزايداً في [أ، ب]



⑨ في الشكل المجاور والذي يمثل منحنى المشتقة الثانية لمنحنى ق(س) كثير الحدود فإذا علمت أنه قَ(-٥) = قَ(١) = صفر ، جد

١) فترات التقعر للأعلى

أ)]-٢، ∞[　　ب)]-∞، -٢[　　جـ)]-٥، ∞[　　د) أ+ب

٢) نقطة الانعطاف لـ ق(س) هي؟

أ) (٠ ، ٠)　　ب) (-٥ ، ق(-٥))　　جـ) (١ ، ق(١))　　د) (-٢ ، ق(-٢))

٣) قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن معادلة المماس عند س = ٠ هي ص = ٣ - ١٠س

أ) $س^{٣} + ٦س^{٢} + ١٠س - ٣$　　جـ) $س^{٣} + ٦س^{٢} - ١٠س + ٣$

ب) $٢س^{٣} - ٦س^{٢} + ١٠س + ٣$　　د) $س^{٣} + ٦س^{٢} - ١٠س + ٣$

④ الاقتران ق(س) متناقص في الفترة

(أ) [-∞، -٥[(ب)]١، ∞] (ج)]-٥، ١[(د) [-٥، ١]

⑩ إذا كانت أن الاقتران ق(س) = $\frac{(س^٤ + (أ-٣)س - ٣أ)(س-٢)}{س-٣}$

س ∈ [-١، ب] يحقق شروط نظرية رول في [-١، ب] وكانت

قيمة جـ التي تعينها النظرية (صفر) فإن قيمة أ، ب على الترتيب

(أ) ٢، ١ (ب) ٢، -١ (ج) -٢، -١ (د) -٢، ٢

⑪ إذا كان الاقتران ق(س) = { أ - س٢ ، -٢ ≤ س ≤ ١
٦ - ب س ، ١ < س ≤ ٢

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [-٢، ٢]

فإن ① الثابتين أ، ب على الترتيب؟

(أ) ٥، ٢ (ب) -٥، ٢ (ج) -٥، -٢ (د) ٥، ٥

② قيمة جـ التي تحققها النظرية

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $-\frac{١}{٨}$ (ج) $\frac{١}{٨}$ (د) $-\frac{١}{٤}$

⑫ باستخدام التفاضل أكبر حجم للشكل الناتج من دوران مستطيل محيطه (٦٠) سم دورة كاملة حول أحد أضلاعه =

(أ) (١٤٠٠π) سم٣ (ب) (٤٠٠π) سم٣ (ج) (٤٠٠٠π) سم٣

حلول أسئلة اختبار الوحدة الأولى والثانية
مراجعات - دفعة - 2004 -

① (س - ص)^{٤} + (ص - س)^{٤} = ٣٢ ، س ≠ ص

الحل (ص - س)^{٤} + (ص - س)^{٤} = ٣٢

⇐ ٢(ص - س)^{٤} = ٣٢ ⇐ (ص - س)^{٤} = ١٦ اشتقاق الطرفين

⇐ ٤(ص - س)^{٣} × (ص' - ١) = ٠

إما ٤(ص - س)^{٣} = ٠ أو (ص' - ١) = ٠

⇐ ص = س (مرفوض) يخالف المعطى | ص' = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ١

ضع (أ)

② متوسط تغير ق(س) في الفترة [١ ، ٤] يساوي ٣

⇐ $\frac{\text{ق(٤) - ق(١)}}{\text{٣}}$ = ٣ ⇐ ق(٤) - ق(١) = ٩ ← (*)

ق(١) + ق(٤) = ٢ ← (**)

متوسط تغير هـ(س) في الفترة [١ ، ٤] = $\frac{\text{هـ(٤) - هـ(١)}}{\text{٣}}$

= $\frac{\text{ق}^{٢}\text{(٤) - ق}^{٢}\text{(١)}}{\text{٣}}$

$$= \frac{\left(\text{ق}(٤) - \text{ق}(١)\right)\left(\text{ق}(٤) + \text{ق}(١)\right)}{٣} = \frac{٩ \times ٢}{٣} = \boxed{٦}$$

فرع (ج)

③ ق(س) = [٢س + ٠٫٦] + |س − ٢| ، قَ(١) = ؟؟

(الحل) نعوض ب ① في [٢س + ٠٫٦] = [٢ + ٠٫٦] = ② ← عدد غير صحيح

نعوض ب ① في |س − ٢| = |١ − ٢| = |−١| ← عدد سالب نعوض في القاعدة السالبة

⇐ ق(س) = ٢ − س + ٢ = −س + ٤

قَ(س) = $\boxed{-١}$ ⇐ قَ(١) = $\boxed{-١}$

④ بالتعويض المباشر

$$\frac{(\text{ق} \circ \text{هـ})^٢(٣) - ٩}{٩ - ٩} = \frac{\left[\text{ق}(\text{هـ}(٣))\right]^٢ - ٩}{٩ - ٩}$$

$$= \frac{\left[\text{ق}\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٣}\right)\right]^٢ - ٩}{٩ - ٩} = \frac{\left[\text{ق}\left(\frac{١}{٢}\right)\right]^٢ - ٩}{٩ - ٩} = \frac{٩ - ٩}{٩ - ٩}$$

$= \boxed{\frac{٠}{٠}}$

لذلك نستخدم لوبيتال والمشتقة بالنسبة لـ س

$$\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}}\ \frac{(\text{ق}\circ\text{هـ})^{\text{٢}}(\text{س})-\text{٩}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٩}}=\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}}\ \frac{\text{٢}(\text{ق}\circ\text{هـ})(\text{س})\times\bar{\text{ق}}(\text{هـ}(\text{س}))\times\bar{\text{هـ}}(\text{س})}{\text{٢س}}$$

$$=\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}}\ \frac{\text{٢ق}(\text{هـ}(\text{س}))\times\bar{\text{ق}}(\text{هـ}(\text{س}))\times\bar{\text{هـ}}(\text{س})}{\text{٢س}}$$

$$*\ \text{هـ}(\text{س})=\text{جتا}\left(\frac{\pi}{\text{س}}\right)$$

$$\text{هـ}(\text{٣})=\text{جتا}\,\frac{\pi}{\text{٣}}=\boxed{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$$

$$*\ \bar{\text{هـ}}(\text{س})=\frac{-\pi}{\text{س}^{\text{٢}}}\times-\text{جا}\left(\frac{\pi}{\text{س}}\right)$$

$$\bar{\text{هـ}}(\text{٣})=\frac{\pi}{\text{٩}}\times\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$$

$$=\boxed{\frac{\sqrt{\text{٣}}\,\pi}{\text{١٨}}}$$

$$=\frac{\text{٢ق}(\text{هـ}(\text{٣}))\times\bar{\text{ق}}(\text{هـ}(\text{٣}))\times\bar{\text{هـ}}(\text{٣})}{\text{٦}}$$

$$=\frac{\text{٢ق}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{\text{٣}}\right)\times\bar{\text{ق}}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{\text{٣}}\right)\times\frac{\sqrt{\text{٣}}\,\pi}{\text{١٨}}}{\text{٦}}$$

$$=\frac{\text{٢}\times\text{ق}\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)\times\bar{\text{ق}}\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)\times\frac{\sqrt{\text{٣}}\,\pi}{\text{١٨}}}{\text{٦}}$$

$$=\frac{\text{٢}\times\text{٣}\times\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\pi}\times\frac{\sqrt{\text{٣}}\,\pi}{\text{١٨}}}{\text{٦}}=\boxed{\frac{\text{١}}{\text{٦}}}\quad\text{فرع}\ \boxed{\text{ب}}$$

⑤ $ف^{٢} = \frac{١}{٣}(ع^{٣} + ن^{٢} - ٩)$ (*) اشتقه بالنسبة لـ ن

$٢ف \times ع = \frac{١}{٣}(٣ع^{٢} \times ح + ٢ن)$ (**)

المسافة المقطوعة = ١م عند ن = ٢ث عوض في (*)

$(١)^{٢} = \frac{١}{٣}(ع^{٣} + ٤ - ٩) \Rightarrow ١ = \frac{١}{٣}ع^{٣} + \frac{-٥}{٣}$

$\Rightarrow ١ + \frac{٥}{٣} = \frac{١}{٣}ع^{٣}$

$\Rightarrow \frac{٨}{٣} = \frac{١}{٣}ع^{٣}$

$\Rightarrow ع^{٣} = ٨ \Rightarrow ع = ٢ م/ث$

ند تسارع الجسم عندما ن = ٢ث ، ع = ٢م/ث ، ف = ١م

نعوض في (**) $٢ \times ١ \times ٢ = \frac{١}{٣}(١٢ \times ح + ٤)$

$٤ = \frac{١}{٣}(١٢ح + ٤) \Rightarrow ١٢ح = ٨$

$\Rightarrow ح = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣} م/ث^{٢}$

⑥ $ل(س) = \frac{ق^{٢}(س) + س}{هـ(س)}$ ، $هـ(س) \neq ٠$ ، $لَ(٣) = ؟$

$$لَ(س) = \frac{هـ(س) \times [٢ق(س) \times قَ(س) + ١] - [(ق^{٢}(س) + س) \times هـَ(س)]}{(هـ(س))^{٢}}$$

$$لَ(٣) = \frac{هـ(٣) \times [٢ق(٣) \times قَ(٣) + ١] - [(ق^{٢}(٣) + ٣) \times هـَ(٣)]}{[هـ(٣)]^{٢}}$$

للمنحنيين د، هـ مماساً أفقياً مشتركاً عند النقطة (٣، ٤)

الواقعة عليهما ⟸ د(٣) = هـ(٣) = ٤

كذلك دَ(٣) = هـَ(٣) = ٠ (مماس أفقي)

∴ كَ(٣) = (٤(٢ × ٤ × ٠ + ١) − (١٦ + ٣) × ٠) / ١٦ = ٤ / ١٦ = (١/٤)

فرع (ب)

⑦ * مماس د(س) هو ص + ٢س = ١١ عند س = ٣

⟸ ميل المماس = دَ(٣) = (-٢) ✓

كذلك ص|س=٣ = د(٣) = (٥) ✓

* العمودي على مماس هـ(س) هو ٤ص + س = ١٥ عند س = ٣

ميل العمودي = -١/٤ ⟸ ميل المماس = هـَ(٣) = (٤) ✓

كذلك عندما س = ٣ ⟸ ص = ٣ ⟸ هـ(٣) = (٣) ✓

ل(س) = د(س) × هـ(س)

لَ(س) = د(س) × هـَ(س) + هـ(س) × دَ(س)

لَ(٣) = د(٣) × هـَ(٣) + هـ(٣) × دَ(٣)

= ٥ × ٤ + ٣ × -٢ = ٢٠ - ٦ = (١٤) فرع (د)

⑧ ل(س) = هـ^س × د(س)

د(س) يقع في الربع الثالث ⟸ د(س) < ٠

د(س) متناقص ⟸ دَ(س) < ٠

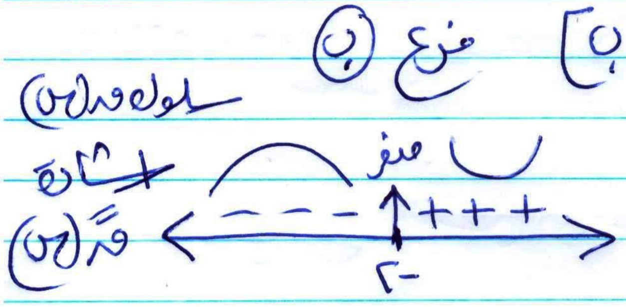
لَ(س) = هـ^س × دَ(س) + د(س) × هـ^س

= + × − ⊕ − × +

= ⊖ ⊕ ⊖ = ⊖

لَ(س) < ٠ ∀ س ∈]أ، ب[

⟸ ل(س) متناقص في الفترة [أ، ب] فرع (ب)



⑨ د(س) مقعر للأعلى في الفترة

①]−٢، ∞[فرع (أ)

② عند س = −٢

✓ د(س) متصل
✓ المنحنى يغير من اتجاه تقعره حولها
✓ دَّ(−٢) = صفر

⟸ (−٢، د(−٢)) نقطة انعطاف

فرع (د)

③ ق''(س) اقتران خطي من الدرجة الأولى

⇐ ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة

∴ ق(س) = $أس^3 + ب س^2 + جـ س + د$ ⟵ (*)

ق'(س) = $٣أس^2 + ٢ب س + جـ$ ⟵ (**)

ق''(س) = ٦أس + ٢ب ⟵ (***)

لكن ق''(-٢) = ٠ (من الفرع السابق)

لأنها نقطة انعطاف

↓ عوض في (***)

-١٢أ + ٢ب = ٠ ⟵ ①

معادلة المماس ص = ٣ - ١٥س عند س = ٠

⇐ ق'(٠) = -١٥

عوض في (**) ⟵ جـ = -١٥ ✓

ص = ٣ - ١٥س عند س = ٠ ⇐ ق(١) = ٣ $\xrightarrow{\text{عوض في (*)}}$ د = ٣ ✓

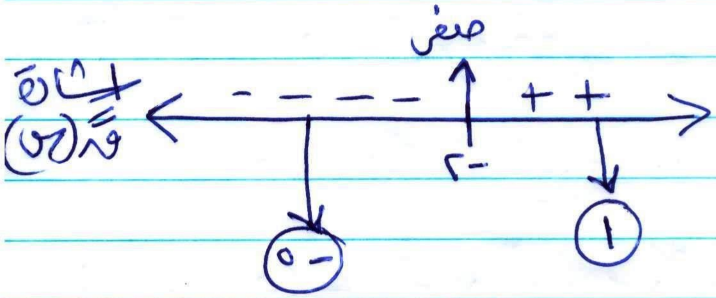
من المعطيات ق'(١) = ٠ $\xrightarrow{\text{عوض في (**)}}$ ٣أ + ٢ب - ١٥ = ٠

⇐ ٣أ + ٢ب = ١٥ ⟵ ②

بحل ① ، ② ينتج أ = ١ ، ب = ٦

∴ ق(س) = $س^3 + ٦س^2 - ١٥س + ٣$ فرع (جـ)

④ قَ(−٥) = قَ(١) = ٠



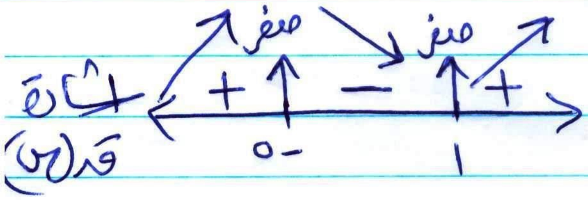
قَ(−٥) = ٠

قً(−٥) < ٠

⟸ توجد قيمة عظمى عند س = −٥

قَ(١) = ٠

قً(١) > ٠ ⟸ توجد قيمة صغرى عند س = ١



ق(س) متناقص في الفترة

[−٥، ١] فرع ج

⑩ ق(س) = (س² + (أ−٣)س − ٣أ)(س−٢) / (س−٣)

= (س² + أس − ٣س − ٣أ)(س−٢) / (س−٣) = (س−٢)[س(س−٣) + أ(س−٣)] / (س−٣)

= (س−٣)(س+أ)(س−٢) / (س−٣)

⟸ ق(س) = (س+أ)(س−٢)

ق(−١) = (−١+أ) × −٣ = ٣ − ٣أ

ق(ب) = (ب+أ)(ب−٢)

د(−١) = د(ب) ⟸ ٣ − ٣أ = (ب + أ)(ب − ٢)

⟸ ٣ − ٣أ = ب^{٢} − ٢ب + أب − ٢أ

⟸ ٣ − أ = ب^{٢} − ٢ب + أب ⟵ (*)

دَ(س) = (س + أ) + (س − ٢)

دَ(جـ) = ٠ ⟸ دَ(٠) = ٠ ⟸ ٢ × ٠ + أ − ٢ = ٠

⟸ أ = ② ✓

عوض في (*) عن أ ⟸ ٣ − ٢ = ب^{٢} − ٢ب + ٢ب

⟸ ب^{٢} = ١ ⟸ ب = ±١

لكن ب = −١ مرفوضة لأنه [−١، ب] ⟸ ب = ① ✓ فرع (أ)

⑪ د(س) = { أ − س^{٢} ، −٢ ≤ س ≤ ١
٦ − ب س ، ١ < س ≤ ٢

① د(س) تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [−٢، ٢]

⟸ د(س) متصل عند س = ١

⟸ نهـا$_{س \to ١^{+}}$ د(س) = نهـا$_{س \to ١^{-}}$ د(س) ⟸ ٦ − ب = أ − ١

⟸ أ + ب = ٧ ⟵ ①

دَ(س) = { −٢س ، −٢ < س < ١
−ب ، ١ < س < ٢

د(س) قابل للاشتقاق في]−٢، ٢[

قَ(١)$^+$ = قَ(١)$^-$

-ب = -٢ ⟵ $\boxed{ب = ٢}$

عوض في ① عن قيمة ب ⟵ $\boxed{أ = ٥}$

أ = ٥ ، ب = ٢   فرع (أ)

② قَ(س) = { -٢س ، -٢ ≤ س < ١
 -ب ، ١ ≤ س < ٢

قَ(ج) = $\frac{ق(٢) - ق(-٢)}{٢-(-٢)}$

<u>حالة ①</u>

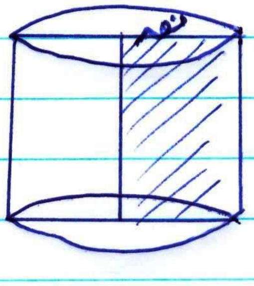
-٢ج = $\frac{٢-١}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$ ⟵ ج = $-\frac{١}{٨}$ ∈]-٢، ٢[✓

فرع (ب)

<u>حالة ②</u>

-٢ ≠ $\frac{١}{٤}$ (مرفوض)

١٢



(ح) حجم الأسطوانة = π × نق² × ع ← ①

محيط المستطيل = ٢نق + ٢ع = ٦٠

⇐ نق + ع = ٣٠ ⇐ ع = ٣٠ - نق ← ②

عوض من ② في ①

ح = π نق² × (٣٠ - نق)

ح = ٣٠π نق² - π نق³   اشتق بالنسبة لـ نق

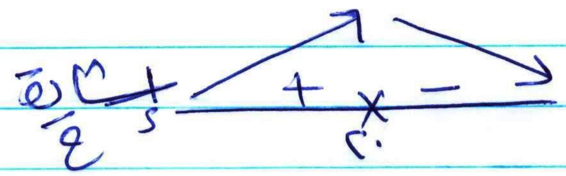
$\frac{دح}{دنق}$ = ٦٠π نق - ٣π نق² = ٠   (÷ ٣π)

$\frac{دح}{دنق}$ = ٢٠نق - نق² = ٠ ⇐ نق (٢٠ - نق) = ٠

إما نق = ٠ (مرفوض)   أو   ٢٠ - نق = ٠

⇐ نق = ⑳

أكبر قيمة عندما نق = ٢٠



ح = π (٢٠)² (٣٠ - ٢٠)

= ٤٠٠π × ١٠ = ٤٠٠٠π سم³ ⇐ فرع (ج)